∽ Dérivation : applications ∽

APMEP

LaTeX

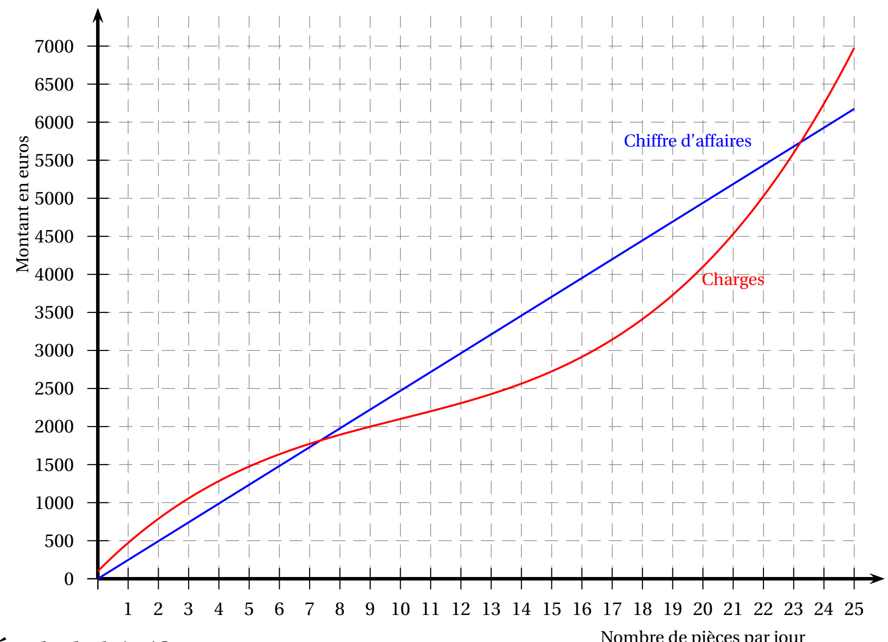
EXERCICE 1

Une entreprise fabrique chaque jour des pièces métalliques pour l'industrie automobile. La production quotidienne varie entre 0 et 25 pièces.

Partie A : Lectures graphiques

À l'aide du graphique donné ci-dessous, répondre aux questions suivantes :

1. Quel est le montant des charges pour 5 pièces produites par jour ?
2. Combien de pièces sont produites par jour pour un montant des charges de 2 000 euros ?
3. Quelles quantités produites par jour permettent à l'entreprise de réaliser un bénéfice ?



Partie B : Étude du bénéfice

Le montant des charges correspondant à la fabrication de x pièces, exprimé en euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0 ; 25]$ par :

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 100.$$

On suppose que l'entreprise vend chaque jour sa production journalière. Chaque pièce est vendue au prix de 247 euros.

1. On note B la fonction bénéfice, exprimée en euros. Justifier que l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 25]$ est : $B(x) = -x^3 + 30x^2 - 153x - 100$.
2. On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
   Calculer $B'(x)$, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; 25]$.
3. Justifier le tableau suivant :

x	0		3		17		25
signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. En déduire le tableau de variations **complet** de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;\,25]$.
5. Déterminer le nombre de pièces que l'entreprise doit produire chaque jour pour que le bénéfice réalisé soit maximal. Que vaut alors ce bénéfice maximal ?

Partie C : Coût moyen

On appelle coût moyen la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0\,;\,25]$ par $C_M = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. Calculer $C_M(16)$ et $C_M(17)$. *On arrondira au centime d'euro.*
2. On donne le tableau de variations de la fonction C_M :

x	0	15,2	25
$C_M(x)$	‖ ↘	181,6	↗ 279

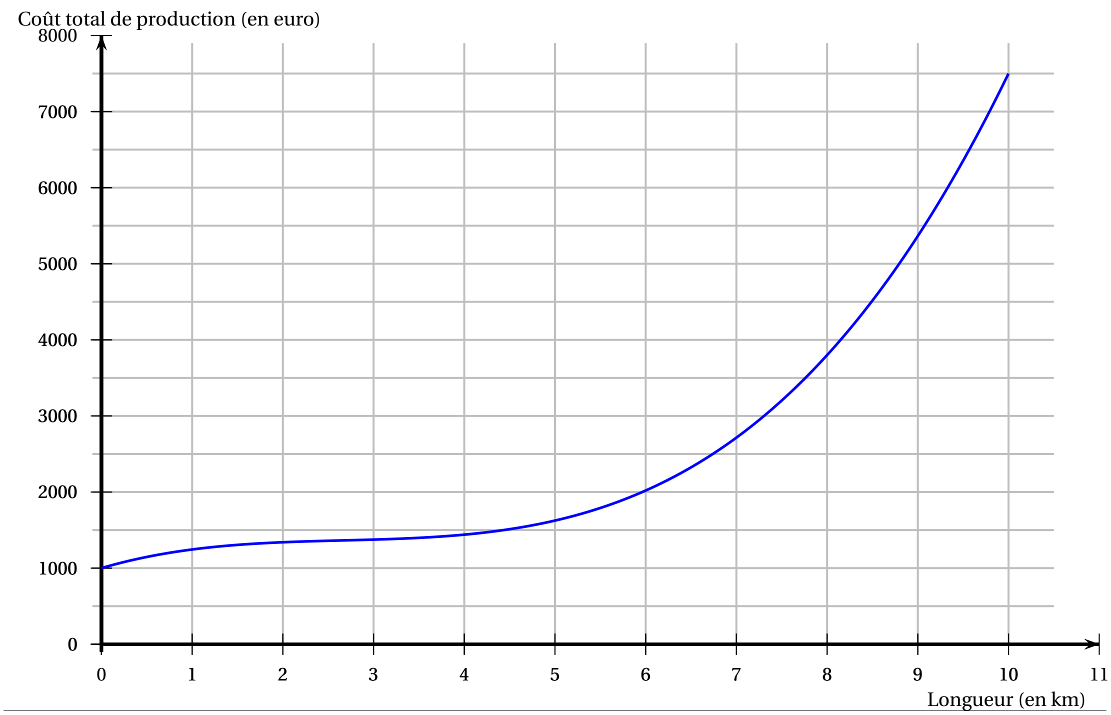
L'affirmation suivante est-elle vraie ? « *Lorsque le bénéfice de l'entreprise augmente, le coût moyen diminue* ». Justifier la réponse.

EXERCICE 2

Une entreprise produit et vend un tissu en coton de forme rectangulaire de 1 mètre de large ; on note x sa longueur exprimée en kilomètre, x étant un nombre compris entre 0 et 10.
Le coût total de production en euro de ce tissu est donné, en fonction de x, par :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 350x + 1\,000.$$

La courbe de la fonction C est représentée sur le graphique ci-dessous.



Partie A : Étude du coût total

1. Déterminer le montant des coûts fixes.
2. **a.** Déterminer, par lecture graphique, le montant du coût total lorsque l'entreprise produit 6 km de tissu.

   b. Déterminer par un calcul sa valeur exacte.
3. Déterminer graphiquement la longueur, arrondie au kilomètre, de tissu produit lorsque le coût total s'élève à 5 500 €.

Partie B : Étude du bénéfice

Le cours du marché offre un prix de 530 € le kilomètre de tissu fabriqué par l'entreprise.
Pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$, on note $R(x)$ la recette et $B(x)$ le bénéfice générés par la production et la vente de x kilomètres de tissu par l'entreprise.

1. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
2. Montrer que pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$, $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 1000$.
3. Déterminer $B'(x)$ pour $x \in [0\ ;\ 10]$ où B' désigne la fonction dérivée de B.
4. Étudier le signe de $B'(x)$ et en déduire les variations de la fonction B sur $[0\ ;\ 10]$.
5. **a.** Pour quelle longueur de tissu produit et vendu l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal ?

   b. Donner alors la valeur de ce bénéfice maximal.

EXERCICE 3

En 2012, le gérant d'une brasserie de bord de plage propose le midi, un menu à 9,80 €.
À ce tarif, il sert en moyenne 420 couverts par semaine. Cette formule rencontre un tel succès qu'il décide d'augmenter son prix les étés suivants.
Il observe une légère diminution du nombre de couverts mais sa formule demeure rentable.

Les deux parties A et B sont indépendantes

Partie A
Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de couverts lorsque le prix du menu varie.

Été	2012	2013	2014	2015
Prix du menu (en euro)	9,80	11,00	12,30	13,80
Nombre hebdomadaire de couverts	420	395	370	345

Le gérant a réalisé le tableau ci-dessous extrait d'une feuille de calcul :

	A	B	C	D	E
1	Été	Prix du menu (en euro)	Nombre hebdomadaire moyen de couverts	Taux d'évolution annuel du nombre hebdomadaire moyen de couverts	Taux d'évolution annuel du prix
2	2012	9,80	420		
3	2013	11,00	395	−5,95 %	12,24 %
4	2014	12,30	370		
5	2015	13,80	345		

La plage de cellules D3 :E5 est au format pourcentage arrondi à 0,01 %.

1. Proposer une formule à saisir dans la cellule D3, permettant par recopie vers le bas de compléter les cellules D4 et D5.

2. Proposer de même une formule à saisir dans la cellule E3, permettant par recopie vers le bas de compléter les cellules E4 et E5.
3. **a.** Calculer le taux d'évolution annuel moyen, arrondi à 0,01 %, du prix du menu entre l'été 2012 et l'été 2015.
   b. En supposant que le taux d'évolution annuel du prix du menu reste constant et égal à ce taux moyen après l'été 2015, donner une estimation du prix du menu, arrondi au centime, pendant l'été 2017.
4. Donner, en détaillant la démarche, une estimation du nombre hebdomadaire moyen de couverts pendant l'été 2017.

Partie B

1. Le nombre hebdomadaire moyen de couverts en fonction du prix x du menu est

$$N(x) = -19x + 604.$$

   Le prix x du menu est exprimé en euro.
   a. Calculer le nombre hebdomadaire moyen de couverts lorsque le prix du menu est de 11 €.
   b. Calculer le chiffre d'affaires hebdomadaire réalisé par la brasserie lorsque le menu est au prix de 11 €.
   c. On note $C(x)$ le chiffre d'affaires hebdomadaire en euro pour un prix du menu de x euros. Montrer que $C(x) = -19x^2 + 604x$.
2. On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;25]$ par

$$C(x) = -19x^2 + 604x.$$

   a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée C' de C.
   b. Donner le signe de $C'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;25]$.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction C sur l'intervalle $[0\,;25]$.
3. **a.** Pour quel prix du menu le chiffre d'affaires hebdomadaire de la brasserie est-il maximal ? On arrondira le résultat au centième.
   b. À ce prix, quel est le chiffre d'affaires hebdomadaire de la brasserie ? On arrondira le résultat à l'unité.

EXERCICE 4

Un bijoutier souhaite lancer un nouveau modèle de bijou contenant de l'or.
On admet que le coût de production de ce bijou, exprimé en millier d'euros, est modélisé par la fonction C définie par

$$C(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x + 15$$

où x représente le nombre de centaines de bijoux fabriqués.
On admet également que la recette, exprimée en millier d'euros, est modélisée par la fonction R définie par $R(x) = 15x$ où x représente le nombre de centaines de bijoux fabriqués et vendus.
Le nombre de bijoux fabriqués et vendus est compris entre 50 et 300 donc $x \in [0,5\,;\,3]$.

1. Montrer que la fonction bénéfice B est définie pour tout $x \in [0,5\ ;\ 3]$ par :

$$B(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 15.$$

2. Déterminer $B'(x)$ pour $x \in [0,5\ ;\ 3]$, où B' désigne la fonction dérivée de B.
3. Étudier le signe de B'(x) pour $x \in [0,5\ ;\ 3]$.
   En déduire le tableau de variations de B.
4. Préciser alors le nombre de bijoux fabriqués et vendus qui permet de réaliser un bénéfice maximal.

EXERCICE 5

Une entreprise qui connaît des difficultés économiques souhaite réaliser des prévisions de son chiffre d'affaires mensuel pour l'année 2018.

Partie A

On estime que le chiffre d'affaires mensuel sera de 35 millions d'euros en janvier 2018 et que celui-ci diminuera chaque mois de 18 %.
On définit la suite (c_n) en notant c_n le chiffre d'affaires exprimé en millions d'euros pour le n-ième mois de l'année 2018 ; on a ainsi $c_1 = 35$.

1. Calculer la valeur de c_2 et vérifier qu'une valeur approchée de c_3 est 23,5.
2. **a.** Déterminer la nature de la suite (c_n).
   b. Donner la valeur du chiffre d'affaires pour le mois de décembre 2018.
3. Au cours de quel mois le chiffre d'affaires mensuel sera-t-il pour la première fois inférieur à 5 millions d'euros ?
4. On considère l'algorithme incomplet ci-contre :
   Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il réponde à la question **3.** précédente.

Variables :	U nombre réel
	N nombre entier
Traitement :	U prend la valeur 35
	N prend la valeur 1
	TANT QUE $U \geqslant 5$
	U prend la valeur ....
	N prend la valeur $N+1$
	FIN TANT QUE
Sortie :	AFFICHER ......

Partie B

Cette entreprise a la possibilité de bénéficier d'une aide de l'État.
Avec cette aide, on modélise le chiffre d'affaires mensuel en millions d'euros par la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ 12]$ par

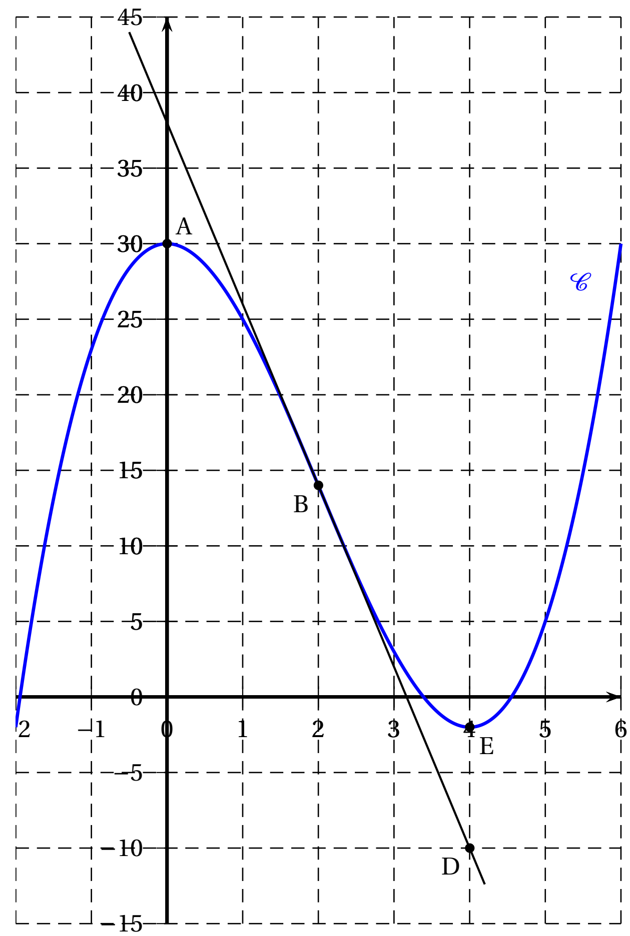
$$f(x) = \frac{15x + 20}{x}.$$

Ainsi, $f(1)$ désigne le chiffre d'affaires du mois de janvier, $f(2)$ désigne le chiffre d'affaires du mois de février, etc.

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
   Donner le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\ ;\ 12]$.
2. Montrer qu'avec ce modèle, le chiffre d'affaires mensuel restera supérieur à 15 millions d'euros durant l'année 2018.

EXERCICE 6

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-2~;~6]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous.
On considère les points A$(0\,;30)$, B$(2~;~14)$, D$(4~;~-10)$ et E$(4~;~-2)$.
La droite (BD) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B.
Les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points A et E sont parallèles à l'axe des abscisses.



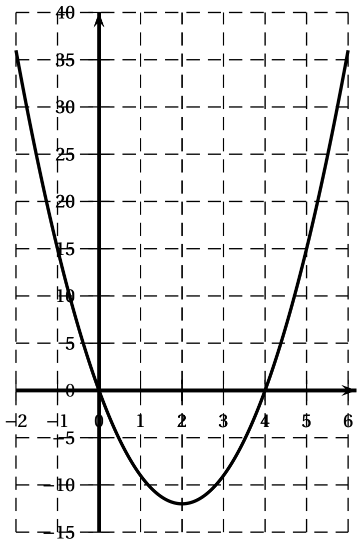
Partie A :

1. À l'aide des informations précédentes, compléter le tableau ci-dessous reproduit en annexe :

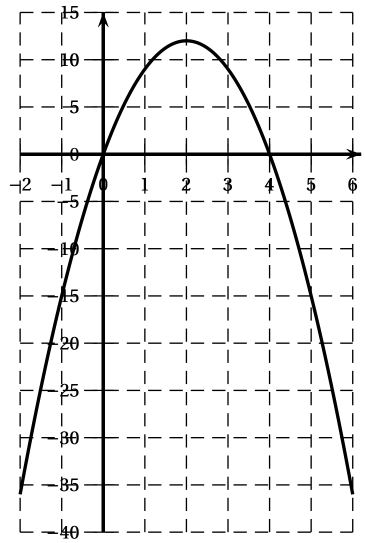
x	-2		$\dots$		4		6
Signe de $f'(x)$		$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
Variations de f	-2	↗	$\dots$	↘	-2	↗	$\dots$

2. Donner sans justification le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3. Justifier que le coefficient directeur de la droite (BD) est -12. En déduire la valeur de $f'(2)$.

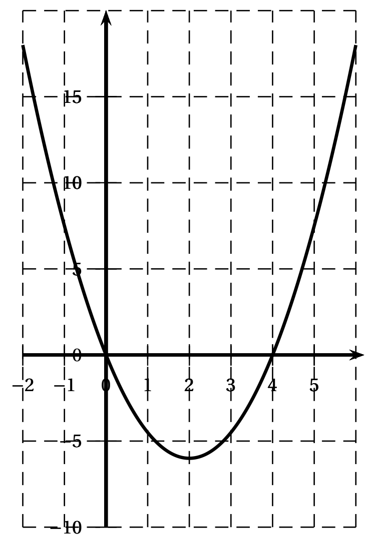
4. Parmi les courbes suivantes indiquez celle qui représente la fonction dérivée f'. On justifiera le choix.



Proposition 1



Proposition 2



Proposition 3

Partie B :

L'expression de la fonction f est donnée, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[-2\ ;\ 6]$ par

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 30.$$

1. Calculer $f'(x)$, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[-2\ ;\ 6]$.
2. En déduire une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 5.