Baccalauréat S 2013–2019

APMEP

LaTeX

∽ Baccalauréat S Amérique du Nord 28 mai 2019 ∾

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice et sauf mention contraire, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Une usine fabrique des tubes.

Partie A

Les questions **1.** *et* **2.** *sont indépendantes.*

On s'intéresse à deux types de tubes, appelés tubes de type 1 et tubes de type 2.

1. Un tube de type 1 est accepté au contrôle si son épaisseur est comprise entre $1,35$ millimètre et $1,65$ millimètre.

a. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe son épaisseur exprimée en millimètres. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $1,5$ et d'écart-type $0,07$.

On prélève au hasard un tube de type 1 dans la production de la journée. Calculer la probabilité que le tube soit accepté au contrôle.

b. L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des tubes de type 1. Pour cela, on modifie le réglage des machines produisant ces tubes. On note X_1 la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé dans la production issue de la machine modifiée, associe son épaisseur. On suppose que la variable aléatoire X_1 suit une loi normale d'espérance $1,5$ et d'écart-type σ_1.

Un tube de type 1 est prélevé au hasard dans la production issue de la machine modifiée. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_1 pour que la probabilité que ce tube soit accepté au contrôle soit égale à $0,98$. (On pourra utiliser la variable aléatoire Z définie par $Z = \dfrac{X_1 - 1,5}{\sigma_1}$ qui suit la loi normale centrée réduite.)

2. Une machine produit des tubes de type 2. Un tube de type 2 est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci, en millimètres, appartient à l'intervalle [298 ; 302]. Le cahier des charges établit que, dans la production de tubes de type 2, une proportion de 2 % de tubes non « conformes pour la longueur » est acceptable.

On souhaite décider si la machine de production doit être révisée. Pour cela, on prélève au hasard dans la production de tubes de type 2 un échantillon de 250 tubes dans lequel 10 tubes se révèlent être non « conformes pour la longueur ».

a. Donner un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des tubes non « conformes pour la longueur » dans un échantillon de 250 tubes.

b. Décide-t-on de réviser la machine ? Justifier la réponse.

Partie B

Des erreurs de réglage dans la chaine de production peuvent affecter l'épaisseur ou la longueur des tubes de type 2.

Une étude menée sur la production a permis de constater que :

— 96 % des tubes de type 2 ont une épaisseur conforme ;

— parmi les tubes de type 2 qui ont une épaisseur conforme, 95 % ont une longueur conforme ;

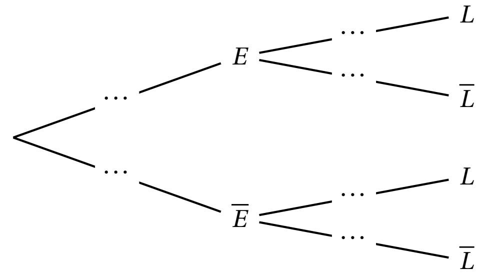
— 3,6 % des tubes de type 2 ont une épaisseur non conforme et une longueur conforme.

On choisit un tube de type 2 au hasard dans la production et on considère les évènement s :

— E : « l'épaisseur du tube est conforme » ;

— L : « la longueur du tube est conforme ».

On modélise l'expérience aléatoire par un arbre pondéré :



1. Recopier et compléter entièrement cet arbre.
2. Montrer que la probabilité de l'évènement L est égale à $0,948$.

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Dans ce qui suit, z désigne un nombre complexe.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : L'équation $z - \text{i} = \text{i}(z+1)$ a pour solution $\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.

Affirmation 2 : Pour tout réel $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, le nombre complexe $1+\text{e}^{2\text{i}x}$ admet pour forme exponentielle $2\cos x\text{e}^{-\text{i}x}$.

Affirmation 3 : Un point M d'affixe z tel que $|z-\text{i}| = |z+1|$ appartient à la droite d'équation $y = -x$.

Affirmation 4 : L'équation $z^5 + z - \text{i} + 1 = 0$ admet une solution réelle.

Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : établir une inégalité

Sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = x - \ln(x+1)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[,\quad \ln(x+1) \leqslant x$.

Partie B : application à l'étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n)$. On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

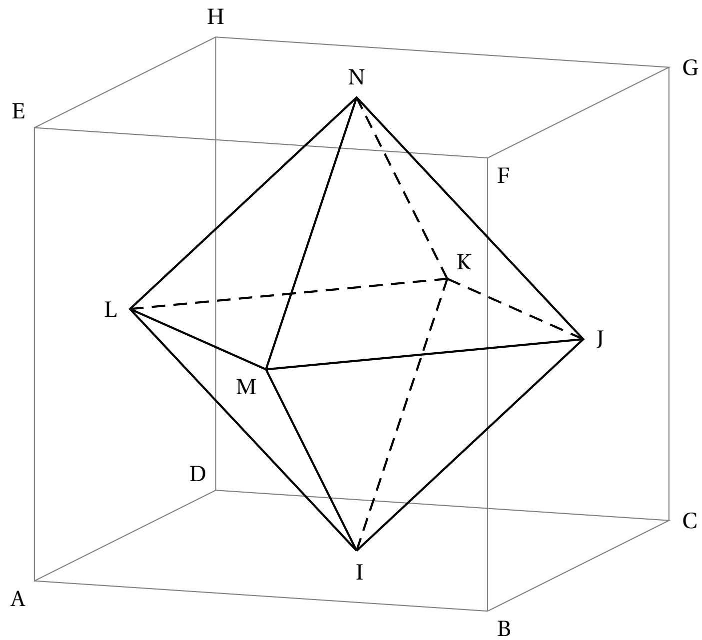
1. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2.
2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n,\quad u_n \geqslant 0$.
   b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel $n,\quad u_n \leqslant 1$.
   c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que $\ell = f(\ell)$, où f est la fonction définie dans la **partie A**. En déduire la valeur de ℓ.
4. **a.** Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p}.
   b. Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15}. [1]

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On relie les centres de chaque face d'un cube ABCDEFGH pour former un solide IJKLMN comme sur la figure ci-dessous.

1. La plupart des calculatrices et même des tableurs sont incapables de traiter cette question donnant même des résultats faux. Elle peut être sautée.



Plus précisément, les points I, J, K, L, M et N sont les centres respectifs des faces carrées ABCD, BCGF, CDHG, ADHE, ABFE et EFGH (donc les milieux des diagonales de ces carrés).

1. Sans utiliser de repère (et donc de coordonnées) dans le raisonnement mené, justifier que les droites (IN) et (ML) sont orthogonales.

Dans la suite, on considère le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\overrightarrow{\text{AD}}\,;\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$ dans lequel, par exemple, le point N a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$.

[resume]

1. a. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{NC}}$ et $\overrightarrow{\text{ML}}$.

b. En déduire que les droites (NC) et (ML) sont orthogonales.

c. Déduire des questions précédentes une équation cartésienne du plan (NCI).

2. a. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (NJM) est : $x - y + z = 1$.

b. La droite (DF) est-elle perpendiculaire au plan (NJM) ? Justifier.

c. Montrer que l'intersection des plans (NJM) et (NCI) est une droite dont on donnera un point et un vecteur directeur. Nommer la droite ainsi obtenue en utilisant deux points de la figure.

Exercice 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Deux matrices colonnes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ à coefficients entiers sont dites congrues modulo 5 si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} x \equiv x' \ [5] \\ y \equiv y' \ [5] \end{array}\right.$.

Deux matrices carrées d'ordre 2 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ à coefficients entiers sont dites congrues modulo 5 si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} a \equiv a' \ [5] \\ b \equiv b' \ [5] \\ c \equiv c' \ [5] \\ d \equiv d' \ [5] \end{array}\right.$.

Alice et Bob veulent s'échanger des messages en utilisant la procédure décrite ci-dessous.

— Ils choisissent une matrice M carrée d'ordre 2, à coefficients entiers.
— Leur message initial est écrit en lettres majuscules sans accent.
— Chaque lettre de ce message est remplacée par une matrice colonne $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ déduite du tableau ci-contre : x est le chiffre situé en haut de la colonne et y est le chiffre situé à la gauche de la ligne ; par exemple, la lettre T d'un message initial correspond à la matrice colonne $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.
— On calcule une nouvelle matrice $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ en multipliant $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ à gauche par la matrice M :
$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \mathrm{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.
— On calcule r' et t' les restes respectifs des divisions euclidiennes de x' et y' par 5.

	0	1	2	3	4
0	A	B	C	D	E
1	F	G	H	I	J
2	K	L	M	N	O
3	P	Q	R	S	T
4	U	V	X	Y	Z

Remarque : la lettre W est remplacée par les deux lettres accolées V.

— On utilise le tableau ci-contre pour obtenir la nouvelle lettre correspondant à la matrice colonne $\begin{pmatrix}r'\\t'\end{pmatrix}$.

1. Bob et Alice choisissent la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$.

a. Montrer que la lettre « T » du message initial est codée par la lettre « U » puis coder le message « TE ».

b. On pose $\mathrm{P} = \begin{pmatrix}3 & 1\\4 & 2\end{pmatrix}$. Montrer que les matrices PM et $\mathrm{I} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5.

c. On considère A, A$'$ deux matrices d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 et $\mathrm{Z} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\mathrm{Z}' = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients entiers congrues modulo 5. Montrer alors que les matrices AZ et A$'$Z$'$ sont congrues modulo 5.

Dans ce qui suit on admet que si A, A$'$ sont deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 et si B, B$'$ sont deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 alors les matrices produit AB et A'B' sont congrues modulo 5.

[start=2][start=4]

a. On note $\mathrm{X} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients entiers. Déduire des questions précédentes que si MX et Y sont congrues modulo 5 alors les matrices X et PY sont congrues modulo 5 ; ce qui permet de « décoder » une lettre chiffrée par la procédure utilisée par Alice et Bob avec la matrice M choisie.

b. Décoder alors la lettre « D ».

1. On souhaite déterminer si la matrice $\mathrm{R} = \begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{pmatrix}$ peut être utilisée pour coder un message.

a. On pose $\mathrm{S} = \begin{pmatrix}2 & 2\\4 & 4\end{pmatrix}$. Vérifier que la matrice RS et la matrice $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5.

b. On admet qu'un message codé par la matrice R peut être décodé s'il existe une matrice T telle que les matrices TR et I soient congrues modulo 5. Montrer que si c'est le cas alors les matrices TRS et S sont congrues modulo 5 (par la procédure expliquée en question **1. d.** pour le codage avec la matrice M).

c. En déduire qu'un message codé par la matrice R ne peut être décodé.

Sommaire Index

∽ Baccalauréat S Liban 31 mai 2019 ∾

Durée : 4 heures

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par

$$f(x) = x(1 - \ln x)^2.$$

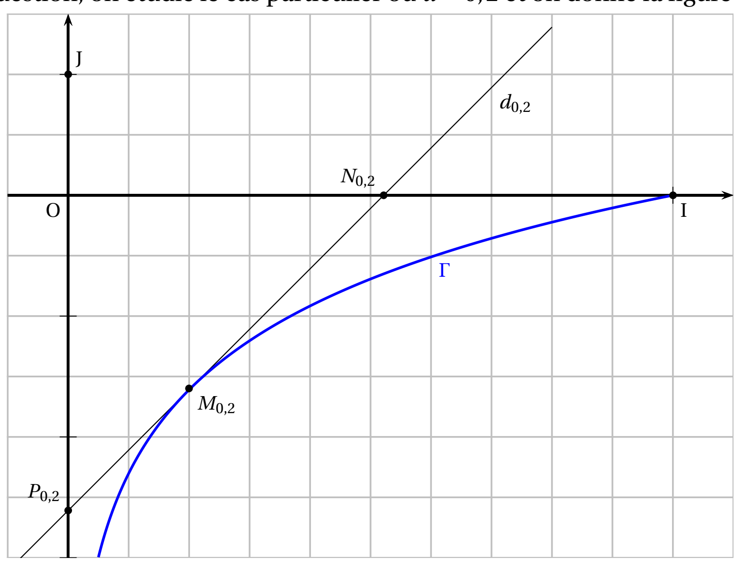
a. Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0\,;\,1]$, $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.

b. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $g(x) = \ln x$.
Soit a un réel de l'intervalle $]0\,;\,1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a.
On s'intéresse à l'aire du triangle ON_aP_a quand le réel a varie dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

[resume]Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0,2$ et on donne la figure ci-dessous.

1.



a. Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle O$N_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.

b. Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

c. Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle O$N_{0,2}P_{0,2}$.

Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0\,;\,1]$, l'aire du triangle ON_aP_a en unités d'aire est donnée par $\mathscr{A}(a) = \dfrac{1}{2}a(1 - \ln a)^2$.

2. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathscr{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$ d'unité 2 cm. On appelle f la fonction qui, à tout point M, distinct du point O et d'affixe un nombre complexe z, associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = -\frac{1}{z}.$$

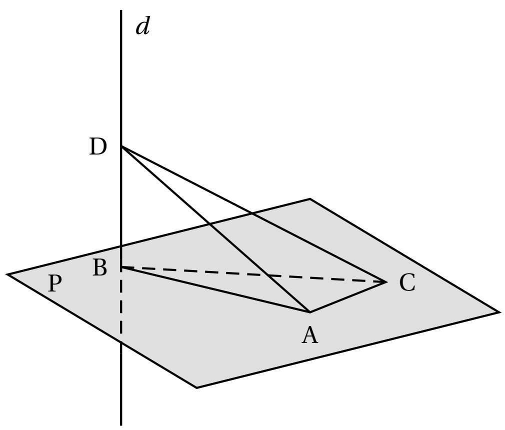
1. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = -1 + \text{i}$ et $z_{\text{B}} = \dfrac{1}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.
   - **a.** Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A$'$ image du point A par la fonction f.
   - **b.** Déterminer la forme exponentielle de l'affixe du point B$'$ image du point B par la fonction f.
   - **c.** Sur la copie, placer les points A, B, A$'$ et B$'$ dans le repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Pour les points B et B$'$, on laissera les traits de construction apparents.
2. Soit r un réel strictement positif et θ un réel. On considère le complexe z défini par $z = r\text{e}^{\text{i}\theta}$.
   - **a.** Montrer que $z' = \dfrac{1}{r}\text{e}^{\text{i}(\pi - \theta)}$.
   - **b.** Est-il vrai que si un point M, distinct de O, appartient au disque de centre O et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M' par la fonction f est à l'extérieur de ce disque ? Justifier.
3. Soit le cercle Γ de centre K d'affixe $z_{\text{K}} = -\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.
   - **a.** Montrer qu'une équation cartésienne du cercle Γ est $x^2 + x + y^2 = 0$.
   - **b.** Soit $z = x + \text{i}y$ avec x et y non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y.
   - **c.** Soit M un point, distinct de O, du cercle Γ. Montrer que l'image M' du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un plan P, on considère un triangle ABC rectangle en A.
Soit d la droite orthogonale au plan P et passant par le point B. On considère un point D de cette droite distinct du point B.



1. Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD).

On appelle *bicoin* un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.

[resume]Montrer que le tétraèdre ABCD est un bicoin.

2. **a.** Justifier que l'arête [CD] est la plus longue arête du bicoin ABCD.
   - **b.** On note I le milieu de l'arête [CD]. Montrer que le point I est équidistant des 4 sommets du bicoin ABCD.

Partie B

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point A$(3~;~1~;~-5)$ et la droite d de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2t+1 \\ y &=& -2t+9 \\ z &=& t-3 \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P orthogonal à la droite d et passant par le point A.
2. Montrer que le point d'intersection du plan P et de la droite d est le point B$(5~;~5~;~-1)$,

3. Justifier que le point C(7 ; 3 ; −9) appartient au plan P puis montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

4. Soit t un réel différent de 2 et M le point de paramètre t appartenant à la droite d.

   a. Justifier que le triangle ABM est rectangle.

   b. Montrer que le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si le réel t vérifie l'équation $t^2 - 4t = 0$.

   c. En déduire les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

Partie C

On donne le point D(9 ; 1 ; 1) qui est un des deux points solutions de la question **4. c.** de la partie B. Les quatre sommets du tétraèdre ABCD sont situés sur une sphère.
En utilisant les résultats des questions des parties A et B précédentes, déterminer les coordonnées du centre de cette sphère et calculer son rayon.

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties 1 et 2 sont indépendantes.

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.
On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.
Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :
- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95 ;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».

1. **a.** Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements R_1 et R_2.

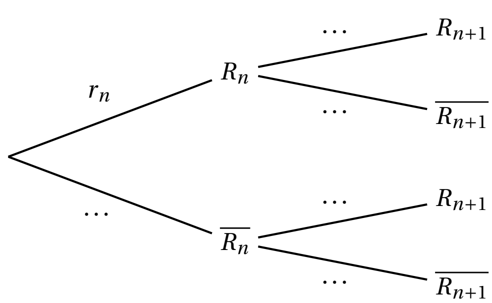
   b. Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.

   c. Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à 0,875.

   d. Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ?
   On arrondira le résultat à 10^{-3}.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = p(R_n)$.

   a. Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



   b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

   c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.

   d. Calculer la limite de la suite (r_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un jardin public, un artiste doit installer une œuvre aquatique commandée par la mairie. Cette œuvre sera constituée de deux bassins A et B ainsi que d'une réserve filtrante R.

Au départ, les deux bassins contiennent chacun 100 litres d'eau.

Un système de canalisations devra alors permettre de réaliser, toutes les heures et dans cet ordre, les transferts d'eau suivants :

— dans un premier temps, la moitié du bassin A se vide dans la réserve R ;

— ensuite, les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A ;

— enfin, on rajoute 200 litres d'eau dans le bassin A et 300 litres d'eau dans le bassin B.

Une étude de faisabilité du projet amène à étudier la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour éviter tout débordement.

On modélise les quantités d'eau des deux bassins A et B à l'aide de deux suites (a_n) et (b_n) : plus précisément pour tout entier naturel n, on note a_n et b_n les quantités d'eau en centaines de litres qui seront respectivement contenues dans les bassins A et B au bout de n heures. On suppose pour cette étude mathématique que les bassins sont a priori suffisamment grands pour qu'il n'y ait pas de débordement.

Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n + C$ où $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer P^2. En déduire que la matrice P est inversible et préciser sa matrice inverse.

b. Montrer que PMP est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c. Calculer PDP.

d. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP$.

On admet par la suite que pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3 \times 0,5^n - 3 \times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}$.

[resume]Montrer que la matrice $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie $X = MX + C$. Pour tout entier naturel n, on définit la matrice V_n par $V_n = U_n - X$.

2. a. Montrer que tout entier naturel n, $V_{n+1} = MV_n$.

b. On admet que, pour tout entier naturel non nul n, $V_n = M^n V_0$.

Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $U_n = \begin{pmatrix} -18 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n + 10 \\ -3 \times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}$.

3. a. Montrer que la suite (b_n) est croissante et majorée. Déterminer sa limite.

b. Déterminer la limite de la suite (a_n).

c. On admet que la suite (a_n) est croissante. En déduire la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour la faisabilité du projet, c'est-à-dire pour éviter tout débordement.

Sommaire Index

∾ Baccalauréat S Centres étrangers [2] 13 juin 2019 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q. C. M.) qui envisage quatre situations relatives à une station de ski.
Les quatre questions sont indépendantes.

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte. ***Aucune justification n'est demandée****. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

1. Une étude statistique a établi qu'un client sur quatre pratique le surf.
Dans une télécabine accueillant 80 clients de la station, la probabilité arrondie au millième qu'il y ait exactement 20 clients pratiquant le surf est :

a. 0,560 **b.** 0,25 **c.** 1 **d.** 0,103

2. L'épaisseur maximale d'une avalanche, exprimée en centimètre, peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 150$ cm et d'écart-type inconnu.
On sait que $P(X \geqslant 200) = 0,025$. Quelle est la probabilité $P(X \geqslant 100)$?

a. On ne peut pas répondre car il manque des éléments dans l'énoncé. **b.** 0,025 **c.** 0,95 **d.** 0,975

3. Dans un couloir neigeux, on modélise l'intervalle de temps séparant deux avalanches successives, appelé temps d'occurrence d'une avalanche, exprimé en année, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle.
On a établi qu'une avalanche se déclenche en moyenne tous les 5 ans. Ainsi $E(T) = 5$.
La probabilité $P(T \geqslant 5)$ est égale à :

a. 0,5 **b.** $1 - \mathrm{e}^{-1}$ **c.** e^{-1} **d.** e^{-25}

4. L'office de tourisme souhaite effectuer un sondage pour estimer la proportion de clients satisfaits des prestations offertes dans la station de ski.
Pour cela, il utilise un intervalle de confiance de longueur 0,04 avec un niveau de confiance de 0,95.
Le nombre de clients à interroger est :

a. 50 **b.** 2 500 **c.** 25 **d.** 625

2. Pondichéry

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_1 et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par la relation :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

Partie A

1. Vérifier, en détaillant le calcul, que si $u_1 = 0$ alors $u_4 = -17$.
2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'en saisissant préalablement dans U une valeur de u_1 il calcule les termes de la suite (u_n) de u_2 à u_{13}.

```
Pour N allant de 1 à 12
        U ←
Fin Pour
```

3. On a exécuté cet algorithme pour $u_1 = 0,7$ puis pour $u_1 = 0,8$.
   Voici les valeurs obtenues.

Pour $u_1 = 0,7$	Pour $u_1 = 0,8$
0,4	0,6
0,2	0,8
$-0,2$	2,2
-2	10
-13	59
-92	412
-737	3 295
$-6\,634$	29 654
$-66\,341$	296 539
$-729\,752$	3 261 928
$-8\,757\,025$	39 143 135
$-113\,841\,326$	508 860 754

   Quelle semble être la limite de cette suite si $u_1 = 0,7$? Et si $u_1 = 0,8$?

Partie B

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

On rappelle que le nombre e est la valeur de la fonction exponentielle en 1, c'est-à-dire que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$.

1. Prouver que la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $F(x) = (-1-x)\mathrm{e}^{1-x}$ est une primitive sur l'intervalle $[0 ; 1]$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$.
2. En déduire que $I_1 = \mathrm{e} - 2$.
3. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

   Utiliser cette formule pour calculer I_2.
4. **a.** Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant x^n \mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n \mathrm{e}$.

   b. Justifier que : $\displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

   d. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Partie C

Dans cette partie, on note $n!$ le nombre défini, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par : $1\,!=1$
$2\,!= 2 \times 1$
et si $n \geqslant 3$: $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$
On a ainsi par exemple
$3! = 3 \times 2 \times 1 = 3 \times (2 \times 1) = 3 \times 2!$
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times (3 \times 2 \times 1) = 4 \times 3!$
$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8 \times (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 8 \times 7!$
Et, plus généralement :

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_n = n!\,(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n.$$

On rappelle que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{ et } I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

2. On admet que : $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$.
   a. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0,7$.
   b. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0,8$.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Le but de cet exercice est de déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les points d'affixes 1, z^2 et $\dfrac{1}{z}$ soient alignés.
Sur le graphique fourni en annexe, le point A a pour affixe 1.

Partie A : étude d'exemples

1. **Un premier exemple**
   Dans cette question, on pose $z = \mathrm{i}$.
   a. Donner la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\dfrac{1}{z}$.
   b. Placer les points N_1 d'affixe z^2, et P_1 d'affixe $\dfrac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.
   On remarque que dans ce cas les points A, N_1 et P_1 ne sont pas alignés.
2. **Une équation**
   Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2 + z + 1 = 0$.
3. **Un deuxième exemple**
   Dans cette question, on pose : $z = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   a. Déterminer la forme exponentielle de z, puis celles des nombres complexes z^2 et $\dfrac{1}{z}$.
   b. Placer les points N_2 d'affixe z^2 et P_2, d'affixe $\dfrac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.
   On remarque que dans, ce cas les points A, N_2 et P_2 sont alignés.

Partie B

Soit z un nombre complexe non nul.
On note N le point d'affixe z^2 et P le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

1. Établir que, pour tout nombre complexe différent de 0, on a :

$$z^2 - \frac{1}{z} = \left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$

2. On rappelle que si, $\overrightarrow{U}$ est un vecteur non nul et $\overrightarrow{V}$ un vecteur d'affixes respectives $z_{\overrightarrow{U}}$ et $z_{\overrightarrow{V}}$, les vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $z_{\overrightarrow{V}} = kz_{\overrightarrow{U}}$.

   En déduire que, pour $z \neq 0$, les points A, N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.

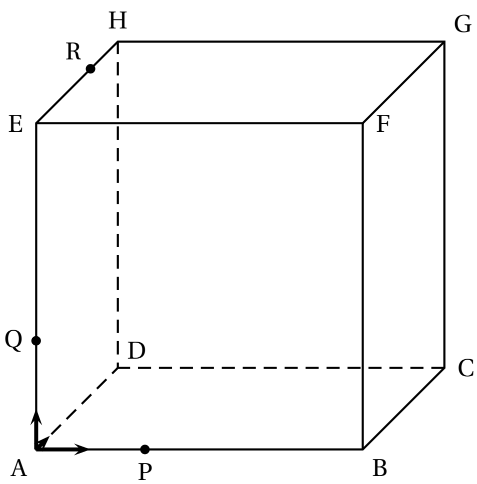
3. On pose $z = x + \mathrm{i}y$, où x et y désignent des nombres réels.
   Justifier que : $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + \mathrm{i}(2xy + y)$.

4. **a.** Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que les points A, N et P soient alignés.

   b. Tracer cet ensemble de points sur le graphique donné en annexe.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Dans l'espace, on considère un cube ABCDEFGH de centre Ω et d'arête de longueur 6.
Les points P, Q et R sont définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{HR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}.$$

Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $\left(A~;~\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ avec :

$$\overrightarrow{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}.$$

Dans ce repère, on a par exemple :

$$B(6~;~0~;~0), F(6~;~0~;~6) \text{ et } R(0~;~4~;~6).$$

1. **a.** Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et Ω.

   b. Déterminer les nombres réels b et c tels que $\overrightarrow{n}\,(1~;~b~;~c)$ soit un vecteur normal au plan (PQR).

   c. En déduire qu'une équation du plan (PQR) est : $x - y + z - 2 = 0$.

2. **a.** On note Δ la droite perpendiculaire au plan (PQR) passant par le point Ω, centre du cube.
   Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

   b. En déduire que la droite Δ coupe le plan (PQR) au point I de coordonnées $\left(\frac{8}{3}~;~\frac{10}{3}~;~\frac{8}{3}\right)$.

   c. Calculer la distance ΩI.

3. On considère les points J(6 ; 4 ; 0) et K(6 ; 6 ; 2).

   a. Justifier que le point J appartient au plan (PQR).

   b. Vérifier que les droites (JK) et (QR) sont parallèles.

   c. Sur la figure donnée en annexe, tracer la section du cube par le plan (PQR).
   On laissera apparents les traits de construction, ou bien on expliquera la démarche.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le but de cet exercice est d'envisager plusieurs décompositions arithmétiques du nombre 40.

Partie A :

Les questions 1., 2. *et* 3. *sont indépendantes*

1. Sans justifier, donner deux nombres premiers x, et y tels que $40 = x + y$.

2. On considère l'équation $20x + 19y = 40$, où x et y désignent deux, entiers relatifs.
   Résoudre cette équation.
3. Le nombre 40 est une somme de deux carrés puisque : $40 = 2^2 + 6^2$. On veut savoir si 40, est aussi différence de deux carrés, autrement dit s'intéresser à l'équation $x^2 - y^2 = 40$, où x et y désignent deux entiers naturels.
   a. Donner la décomposition de 40 en produit de facteurs premiers.
   b. Montrer que, si x et y désignent des entiers naturels, les nombres $x - y$ et $x + y$ ont la même parité.
   c. Déterminer toutes les solutions de l'équation $x^2 - y^2 = 40$ où x et y désignent deux entiers naturels.

Partie B : « sommes » de cubes
Les questions 1. *et* 2. *sont indépendantes.*

Certains nombres entiers peuvent se décomposer en somme ou différence de cubes d'entiers naturels.
Par exemple :

$$\begin{array}{rcl} 13 & = & 4^3 + 7^3 + 7^3 - 9^3 - 2^3 \\ 13 & = & -1^3 - 1^3 - 1^3 + 2^3 + 2^3 \\ 13 & = & 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3 \end{array}$$

Dans tout ce qui suit, on écrira pour simplifier « sommes » de cubes à la place de « sommes ou différence de cubes d'entiers naturels ».
Les deux premiers exemples montrent que 13 peut se décomposer en « somme » de 5 cubes. Le troisième exemple montre que 13 peut se décomposer en « somme » de 4 cubes.

1. **a.** En utilisant l'égalité $13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$, donner une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes.
   b. On admet que pour tout entier naturel n on a :

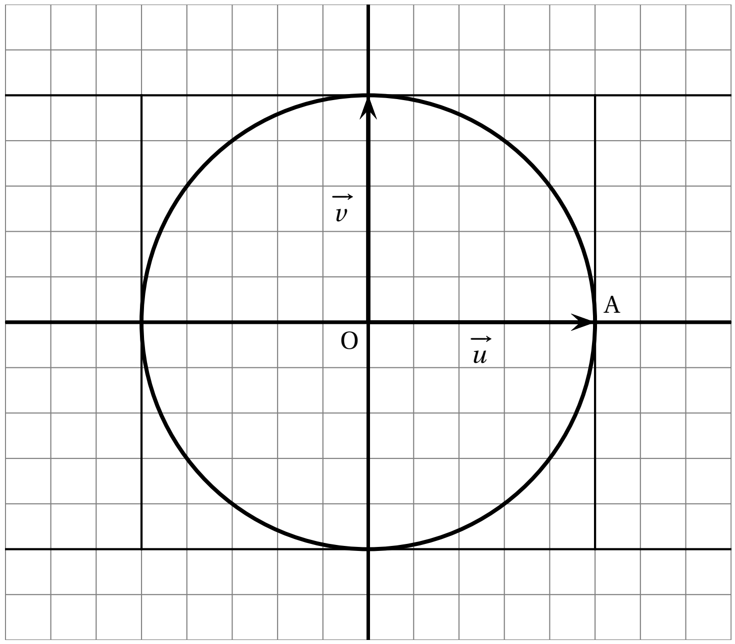
$$6n = (n+1)^3 + (n-1)^3 - n^3 - n^3$$

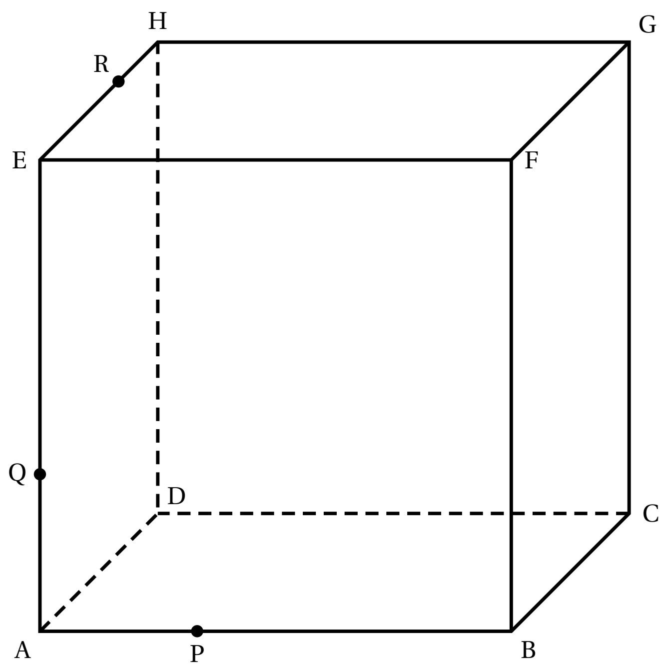
   En déduire une décomposition de 48 en « somme » de 4 cubes, puis une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes, différente de celle donnée en **1. a.**)
2. Le nombre 40 est une « somme » de 4 cubes : $40 = 4^3 - 2^3 - 2^3 - 2^3$.
   On veut savoir si 40 peut être décomposé en « somme » de 3 cubes.
   a. Recopier et compléter sans justifier :

Reste de la division euclidienne de n par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division euclidienne de n^3 par 9					1				

   b. On déduit du tableau précédent que, pour tout entier naturel n, l'entier naturel n^3 est congru modulo 9 soit à 0, soit à 1, soit à -1.
   Prouver que 40 ne peut pas être décomposé en « somme » de 3 cubes.

Annexe (à rendre avec la copie)





Sommaire

Index

Baccalauréat S Antilles-Guyane 18 juin 2019

EXERCICE 1 **6 points**

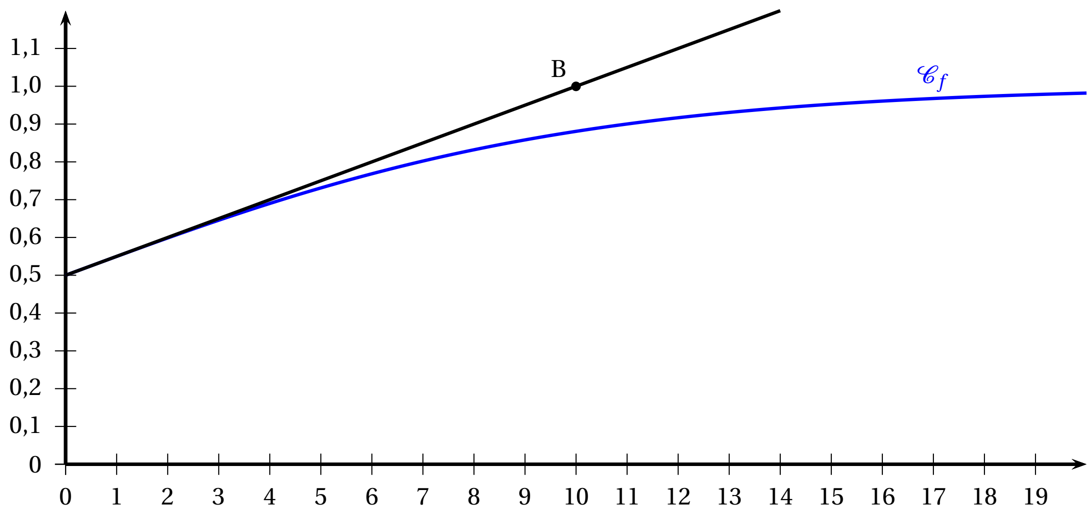
COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Partie A

Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.
La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point A(0 ; 0,5). La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A passe par le point B(10 ; 1).



1. Justifier que $a = 1$.
   On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$

$$f'(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bx}\right)^2}.$$

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0~;~+\infty[$.

b. Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.

c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé.
Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.

4. On définit la proportion moyenne d'individus équipés entre 2008 et 2010 par

$$m = \frac{1}{2}\int_8^{10} p(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$p(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,2x}}{1+\mathrm{e}^{0,2x}}.$$

b. En déduire une primitive de la fonction p sur $[0~;~+\infty[$.

c. Déterminer la valeur exacte de m et son arrondi au centième.

EXERCICE 2 **5 points**

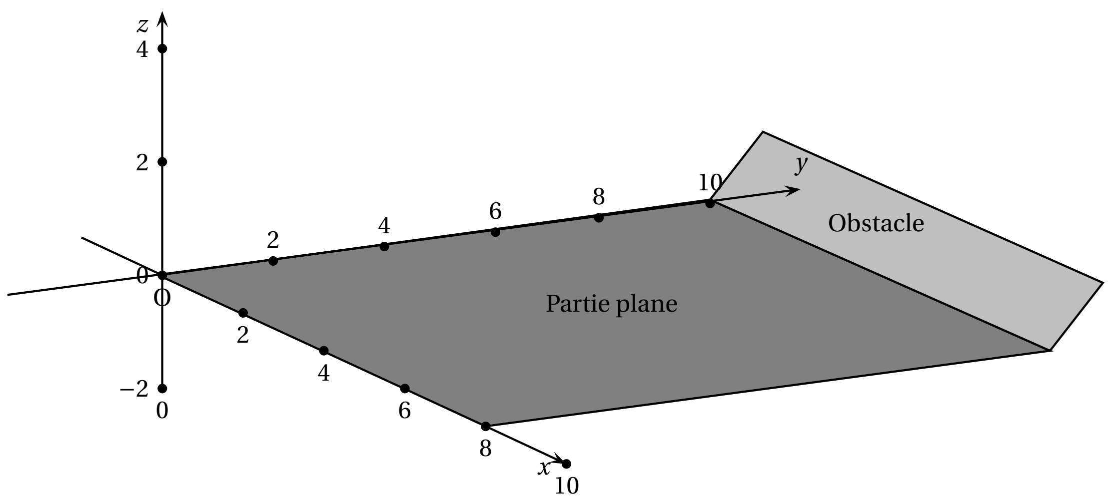
COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Alex et Élisa, deux pilotes de drones, s'entraînent sur un terrain constitué d'une partie plane qui est bordée par un obstacle.
On considère un repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$, une unité correspondant à dix mètres. Pour modéliser le relief de la zone, on définit six points O, P, Q, T, U et V par leurs coordonnées dans ce repère :

$$\text{O}(0~;~0~;~0),~\text{P}(0~;~10~;~0),~\text{Q}(0~;~11~;~1),~\text{T}(10~;~11~;~1),~v\text{U}(10~;~10~;~0)~\text{et}~\text{V}(10~;~0~;~0)$$

La partie plane est délimitée par le rectangle OPUV et l'obstacle par le rectangle PQTU.



Les deux drones sont assimilables à deux points et on suppose qu'ils suivent des trajectoires rectilignes :

- le drone d'Alex suit la trajectoire portée par la droite (AB) avec A(2 ; 4 ; 0,25) et B(2 ; 6 ; 0,75) ;
- le drone d'Élisa suit la trajectoire portée par la droite (CD) avec C(4 ; 6 ; 0,25) et D(2 ; 6 ; 0,25).

Partie A : Étude de la trajectoire du drone d'Alex

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

2. **a.** Justifier que le vecteur $\vec{n}\,(0~;~1~;~-1)$ est un vecteur normal au plan (PQU).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQU).

3. Démontrer que la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées $\left(2~;~\dfrac{37}{3}~;~\dfrac{7}{3}\right)$.

4. Expliquer pourquoi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

Partie B : Distance minimale entre les deux trajectoires

Pour éviter une collision entre leurs deux appareils, Alex et Élisa imposent une distance minimale de 4 mètres entre les trajectoires de leurs drones.
L'objectif de cette partie est de vérifier si cette consigne est respectée.
Pour cela, on considère un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (CD).
Il existe alors deux réels a et b tels que $\overrightarrow{\text{A}M} = a\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{C}N} = b\overrightarrow{\text{CD}}$.
On s'intéresse donc à la distance MN.

1. Démontrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $(2-2b\,;\,2-2a\,;\,-0,5a)$.
2. On admet que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires. On admet également que la distance MN est minimale lorsque la droite (MN) est perpendiculaire à la fois à la droite (AB) et à la droite (CD).
   Démontrer alors que la distance MN est minimale lorsque $a = \frac{16}{17}$ et $b = 1$.
3. En déduire la valeur minimale de la distance MN puis conclure.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère le nombre complexe $c = \dfrac{1}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et les points S et T d'affixes respectives c^2 et $\dfrac{1}{c}$.

1. **Affirmation 1 :**
   Le nombre c peut s'écrire $c = \dfrac{1}{4}\left(1-\text{i}\sqrt{3}\right)$.
2. **Affirmation 2 :**
   Pour tout entier naturel n, c^{3n} est un nombre réel.
3. **Affirmation 3 :**
   Les points O, S et T sont alignés.
4. **Affirmation 4 :**
   Pour tout entier naturel non nul n,
   $$|c| + \left|c^2\right| + \ldots + \left|c^n\right| = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

EXERCICE 4 **6 points**
CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Lors d'une soirée, une chaîne de télévision a retransmis un match. Cette chaîne a ensuite proposé une émission d'analyse de ce match.
On dispose des informations suivantes :
- 56 % des téléspectateurs ont regardé le match ;
- un quart des téléspectateurs ayant regardé le match ont aussi regardé l'émission ;
- 16,2 % des téléspectateurs ont regardé l'émission.

On interroge au hasard un téléspectateur. On note les évènements :
- M : « le téléspectateur a regardé le match » ;
- E : « le téléspectateur a regardé l'émission ».

On note x la probabilité qu'un téléspectateur ait regardé l'émission sachant qu'il n'a pas regardé le match.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

2. Déterminer la probabilité de $M \cap E$.
3. **a.** Vérifier que $p(E) = 0,44x + 0,14$.
   b. En déduire la valeur de x.
4. Le téléspectateur interrogé n'a pas regardé l'émission. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il ait regardé le match ?

Partie B

Pour déterminer l'audience des chaînes de télévision, un institut de sondage recueille, au moyen de boîtiers individuels, des informations auprès de milliers de foyers français.
Cet institut décide de modéliser le temps passé, en heure, par un téléspectateur devant la télévision le soir du match, par une variable aléatoire T suivant la loi normale d'espérance $\mu = 1,5$ et d'écart-type $\sigma = 0,5$.

1. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'un téléspectateur ait passé entre une heure et deux heures devant sa télévision le soir du match ?
2. Déterminer l'arrondi à 10^{-2} du réel t tel que $P(T \geqslant t) = 0,066$.
   Interpréter le résultat.

Partie C

La durée de vie d'un boîtier individuel, exprimée en année, est modélisée par une variable aléatoire notée S qui suit une loi exponentielle de paramètre λ strictement positif. On rappelle que la densité de probabilité de S est la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

L'institut de sondage a constaté qu'un quart des boîtiers a une durée de vie comprise entre un et deux ans.
L'usine qui fabrique les boîtiers affirme que leur durée de vie moyenne est supérieure à trois ans.
L'affirmation de l'usine est-elle correcte ? La réponse devra être justifiée.

EXERCICE 4 — 6 points

CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

On étudie l'évolution quotidienne des conditions météorologiques d'un village sur une certaine période. On suppose que, pour un jour donné, il existe trois états météorologiques possibles : « ensoleillé », « nuageux sans pluie » et « pluvieux ».
On sait que :

- si le temps est ensoleillé un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est $0,5$ et celle qu'il soit pluvieux est $0,1$;
- si le temps est nuageux sans pluie un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est $0,2$ et celle qu'il soit pluvieux est $0,7$;
- si le temps est pluvieux un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est $0,6$ et celle qu'il soit ensoleillé $0,2$.

Pour tout entier naturel n, on note les évènements :

- A_n : « le temps est ensoleillé au bout de n jours » ;
- B_n : « le temps est nuageux sans pluie au bout de n jours » ;
- C_n : « le temps est pluvieux au bout de n jours ».

Pour tout entier naturel n, on note respectivement a_n, b_n et c_n les probabilités des évènements A_n, B_n et C_n. Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$.
On suppose qu'initialement, le temps est ensoleillé.
On a donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

1. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1b_n + 0,2c_n$.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,3a_n - 0,1b_n + 0,2$.
   On admet que, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = 0,2a_n + 0,2$.
2. On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 \\ 0,2 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad R \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}.$$

   a. Justifier que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n + R$.

b. Soit $Y = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ tel que $Y = MY + R$. Démontrer que $\alpha = \beta = 0,25$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - Y$.

a. En utilisant la question 2., vérifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = MV_n$

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif, $V_n = M^n V_0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel strictement positif n,

$$M^n = \begin{pmatrix} 2\times 0,2^n - 0,1^n & 0,1^n - 0,2^n \\ 2\times 0,2^n - 2\times 0,1^n & 2\times 0,1^n - 0,2^n\end{pmatrix}.$$

a. Déterminer l'expression de a_n en fonction de l'entier strictement positif n.

b. Déterminer la limite de la suite (a_n).

c. On admet que, pour tout entier naturel n, $c_n = 0,5 + 3\times 0,1^n - 3,5\times 0,2^n$.
La probabilité que le temps soit pluvieux au bout de n jours peut-elle dépasser $0,5$?

Sommaire Index

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Polynésie 19 juin 2019

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les probabilités demandées seront arrondies à 0,01.

Un commerçant vient de s'équiper d'un distributeur de glaces à l'italienne.

1. La durée, en mois, de fonctionnement sans panne de son distributeur de glaces à l'italienne est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif (on rappelle que la fonction f de densité de la loi exponentielle est donnée sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Le vendeur de l'appareil assure que la durée moyenne de fonctionnement sans panne de ce type de distributeur, c'est-à-dire l'espérance mathématique de X, est de 10 mois.

a. Justifier que $\lambda = 0,1$.

b. Calculer la probabilité que le distributeur de glaces à l'italienne n'ait connu aucune panne pendant les six premiers mois.

c. Sachant que le distributeur n'a connu aucune panne pendant les six premiers mois, quelle est la probabilité qu'il n'en connaisse aucune jusqu'à la fin de la première année ? Justifier.

d. Le commerçant remplacera son distributeur de glaces à l'italienne au bout d'un temps t, exprimé en mois, qui vérifie que la probabilité de l'évènement $(X > t)$ est égale à $0,05$.
Déterminer la valeur de t arrondie à l'entier.

2. La notice du distributeur de glaces précise que le distributeur fournit des glaces à l'italienne dont la masse est comprise entre 55 g et 65 g.
On considère la variable aléatoire M représentant la masse, en grammes, d'une glace distribuée. On admet que M suit la loi normale d'espérance 60 et d'écart-type $2,5$.

a. Calculer la probabilité que la masse d'une glace à l'italienne choisie au hasard parmi celles distribuées soit comprise entre 55 g et 65 g.

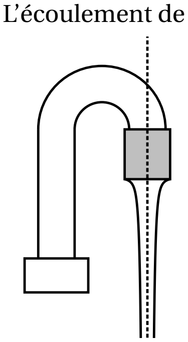
b. Déterminer la plus grande valeur de m, arrondie au gramme près, telle que la probabilité $P(M \geqslant m)$ soit supérieure ou égale à $0,99$.

3. Le distributeur de glaces à l'italienne permet de choisir un seul des deux parfums : vanille ou fraise. Pour mieux gérer ses achats de matières premières, le commerçant fait l'hypothèse qu'il y aura en proportion deux acheteurs de glace à la vanille pour un acheteur de glace à la fraise. Le premier jour d'utilisation de son distributeur, il constate que sur 120 consommateurs, 65 ont choisi de la glace à la vanille.
Pour quelle raison mathématique pourrait-il mettre en doute son hypothèse ? Justifier.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'écoulement de l'eau d'un robinet a un débit constant et modéré.



On s'intéresse en particulier à une partie du profil d'écoulement représentée en **annexe 1** par la courbe C dans un repère orthonormé.

Partie A

On considère que la courbe C donnée en **annexe 1** est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $]0 ; 1]$ qui respecte les trois conditions suivantes :

$$(H) : f(1) = 0 \qquad f'(1) = 0,25 \quad \text{et} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty.$$

1. La fonction f peut-elle être une fonction polynôme du second degré ? Pourquoi ?
2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $g(x) = k\ln x$.
   a. Déterminer le réel k pour que la fonction g respecte les trois conditions (H).
   b. La courbe représentative de la fonction g coïncide-t-elle avec la courbe C ? Pourquoi ?
3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $h(x) = \dfrac{a}{x^4} + bx$ où a et b sont des réels.
   Déterminer a et b pour que la fonction h respecte les trois conditions (H).

Partie B

On admet dans cette partie que la courbe C est la représentation graphique d'une fonction f continue, strictement croissante, définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ d'expression :

$$f(x) = \frac{1}{20}\left(x - \frac{1}{x^4}\right).$$

1. Justifier que l'équation $f(x) = -5$ admet sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ une unique solution qui sera notée α. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
2. On admet que le volume d'eau en cm^3, contenu dans les 5 premiers centimètres de l'écoulement, est donné par la formule : $V = \displaystyle\int_{\alpha}^{1} \pi x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$.
   a. Soit u la fonction dérivable sur $]0\,;\,1]$ définie par $u(x) = \dfrac{1}{2x^2}$. Déterminer sa fonction dérivée.
   b. Déterminer la valeur exacte de V. En utilisant la valeur approchée de α obtenue à la question 1, donner alors une valeur approchée de V.

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier naturel n non nul

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $I_0 = \ln(2)$.
2. **a.** Calculer $I_0 - I_1$.
   b. En déduire I_1.
3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n - I_{n+1} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.
   b. Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel n donné, la valeur de I_n.
4. Soit n un entier naturel non nul.
   On admet que si x appartient à l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ alors $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1-x} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
   b. En déduire la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}.$$

   a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $S_n = I_0 - I_n$.
   b. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Sur la figure donnée en **annexe 2 à rendre avec la copie** :

- ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que AB = 12, AD = 18 et AE = 6
- EBDG est un tétraèdre.

.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine A dans lequel les points B, D et E ont pour coordonnées respectives B(12 ; 0 ; 0), D(0 ; 18 ; 0) et E(0 ; 0 ; 6).

1. Démontrer que le plan (EBD) a pour équation cartésienne $3x+2y+6z-36=0$.

2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).

b. En déduire que la droite (AG) coupe le plan (EBD) en un point K de coordonnées (4 ; 6 ; 2) .

3. La droite (AG) est-elle orthogonale au plan (EBD) ? Justifier.

4. **a.** Soit M le milieu du segment [ED]. Démontrer que les points B, K et M sont alignés.

b. Construire alors le point K sur la figure donnée en annexe 2 à rendre avec la copie.

5. On note P le plan parallèle au plan (ADE) passant par le point K.

a. Démontrer que le plan P coupe le plan (EBD) selon une parallèle à la droite (ED).

b. Construire alors sur l'**annexe 2** à rendre avec la copie l'intersection du plan P et de la face EBD du tétraèdre EBDG.

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la matrice $M=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$ et les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0=1,\ v_0=0$, et pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$.

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On a calculé les premiers termes de la suite (v_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
v_n	0	1	4	15	56	209	780	2 911	10 864	40 545	151 316	564 719	2 107 560

1. Conjecturer les valeurs possibles du chiffre des unités des termes de la suite (v_n).

2. On admet que pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix}u_{n+3}\\v_{n+3}\end{pmatrix}=M^3\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$.

a. Justifier que pour tout entier nature n, $\left\{\begin{array}{rcl}u_{n+3}&=&26u_n+45v_n\\v_{n+3}&=&15u_n+26v_n\end{array}\right.$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n : $v_{n+3}\equiv v_n\ [5]$.

3. Soit r un entier naturel fixé. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout entier naturel q, $v_{3q+r}\equiv v_r\ [5]$.

4. En déduire que pour tout entier naturel n le terme v_n est congru à 0, à 1 ou à 4 modulo 5.

5. Conclure quant à l'ensemble des valeurs prises par le chiffre des unités des termes de la suite (v_n).

Partie B

L'objectif de cette partie est de démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel en utilisant la matrice M.

Pour cela, on effectue un raisonnement par l'absurde et on suppose que $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel. Dans ce cas, $\sqrt{3}$ peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$ où p et q sont des entiers naturels non nuls, avec q le plus petit entier naturel possible.

1. Montrer que $q<p<2q$.

2. On admet que la matrice M est inversible. Donner son inverse M^{-1} (aucune justification n'est attendue).

Soit le couple $(p' ; q')$ défini par $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

3. **a.** Vérifier que $p' = 2p - 3q$ et que $q' = -p + 2q$.

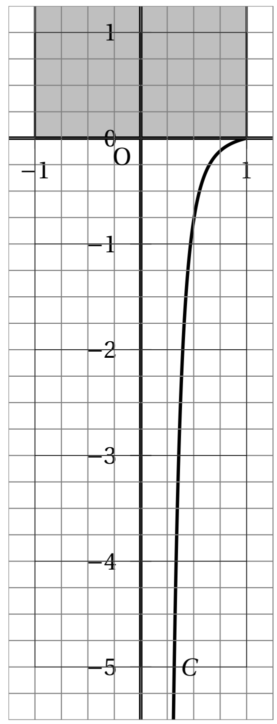
b. Justifier que $(p' ; q')$ est un couple d'entiers relatifs.

c. On rappelle que $p = q\sqrt{3}$. Montrer que $p' = q'\sqrt{3}$.

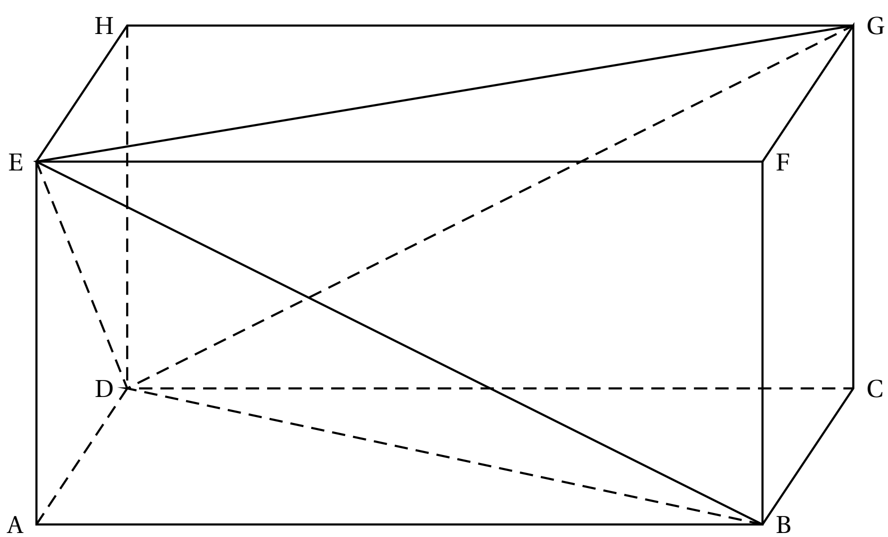
d. Montrer que $0 < q' < q$.

e. En déduire que $\sqrt{3}$ n'est pas un rationnel.

Annexe 1 (exercice 2) :



Annexe 2 (exercice 4 pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité) : à rendre avec la copie



Sommaire Index

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Asie 20 juin 2019

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.

Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant deux modèles. L'un, dans la partie A, utilise une suite ; l'autre, dans la partie B, utilise une fonction.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Dans cette partie, pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.

On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = k\left(T_n - M\right)$$

où k est une constante réelle.

Dans la suite de la partie A, on choisit $M = 10$ et $k = -0,2$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} - T_n = -0,2\left(T_n - 10\right)$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite $\left(T_n\right)$?
2. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.
3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.
   a. Montrer que $\left(u_n\right)$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 70 \times 0,8^n + 10$.
   c. Déterminer la limite de la suite $\left(T_n\right)$.
4. On considère l'algorithme suivant :

```
Tant que T ⩾ 40
        T ← 0,8T + 2
        n ← n + 1
Fin Tant que
```

   a. Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n.
   Quelle valeur numérique contient la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
   b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie A, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité :

$$\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - M).$$

1. Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel t de cet intervalle : $\theta'(t) = -0,2\theta(t)$.
   a. Si θ est une telle fonction, on pose pour tout t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $f(t) = \dfrac{\theta(t)}{\mathrm{e}^{-0,2t}}$.
   Montrer que la fonction f est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, $f'(t) = 0$.

b. En conservant l'hypothèse du **a.**, calculer $f(0)$.
En déduire, pour tout t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, une expression de $f(t)$, puis de $\theta(t)$.

c. Vérifier que la fonction θ trouvée en **b.** est solution du problème.

2. Dans cette question, on choisit $M = 10$. On admet qu'il existe une unique fonction g dérivable sur $[0~;~+\infty[$, modélisant la température du café à tout instant positif t, et que, pour tout t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$:

$$g(t) = 10 + 70\mathrm{e}^{-0,2t}, \text{ où } t \text{ est exprimé en minute et } g(t) \text{ en degré Celsius.}$$

Une personne aime boire son café à 40 °C.
Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $[0~;~+\infty[$ tel que $g(t_0) = 40$.
Donner la valeur de t_0 arrondie à la seconde.

Exercice 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre affirmations est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Il est attribué un point si la lettre correspond à l'affirmation exacte, 0 sinon.

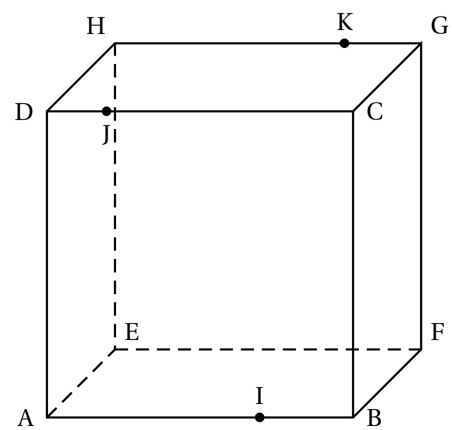
Dans tout l'exercice, on se place dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ de l'espace.
Les quatre questions sont indépendantes. **Aucune justification n'est demandée.**

1. On considère le plan P d' équation cartésienne $3x + 2y + 9z - 5 = 0$ et la droite d dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 4t + 3\\ y &=& -t + 2\\ z &=& -t + 9 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

Affirmation A : l'intersection du plan P et de la droite d est réduite au point de coordonnées $(3 ; 2 ; 9)$.
Affirmation B : le plan P et la droite d sont orthogonaux.
Affirmation C : le plan P et la droite d sont parallèles.
Affirmation D : l'intersection du plan P et de la droite d est réduite au point de coordonnées $(-353~;~91~;~98)$.

2.
On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre et les points I, J et K définis par les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{DJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DC}}, \overrightarrow{\mathrm{HK}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{HG}}.$$



Affirmation A : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un triangle.
Affirmation B : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un quadrilatère.
Affirmation C : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un pentagone.
Affirmation D : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un hexagone.

3. On considère la droite d dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{l c r} x &=& t + 2\\ y &=& 2\\ z &=& 5t - 6 \end{array}\right.$, avec $t \in \mathbb{R}$, et le point $\mathrm{A}(-2~;~1~;~0)$.

Soit M un point variable de la droite d.

Affirmation A : la plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{53}$.
Affirmation B : la plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{27}$.
Affirmation C : la plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées $(-2~;~1~;~0)$.
Affirmation D : la plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées $(2~;~2~;~-6)$.

4. On considère le plan P d'équation cartésienne $x + 2y - 3z + 1 = 0$ et le plan P' d'équation cartésienne $2x - y + 2 = 0$.

Affirmation A : les plans P et P' sont parallèles.
Affirmation B : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par les points $\mathrm{A}(5 ; 12 ; 10)$ et $\mathrm{B}~(3 ; 1 ; 2)$.

Affirmation C : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par le point C(2 ; 6 ; 5) et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\,(1\,;\,2\,;\,2)$.

Affirmation D : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par le point D(−1 ; 0 ; 0) et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{v}\,(3\,;\,6\,;\,5)$.

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*
Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats au **millième**.

Partie A

En France, la consommation de produits bio croît depuis plusieurs années.
En 2017, le pays comptait 52 % de femmes. Cette même année, 92 % des Français avaient déjà consommé des produits bio. De plus, parmi les consommateurs de produits bio, 55 % étaient des femmes.
On choisit au hasard une personne dans le fichier des Français de 2017. On note :

[leftmargin=15mm] F l'évènement « la personne choisie est une femme » ; H l'évènement « la personne choisie est un homme » ;
B l'évènement « la personne choisie a déjà consommé des produits bio ».

••**1.** Traduire les données numériques de l'énoncé à l'aide des évènements F et B.
2. **a.** Montrer que $P(F \cap B) = 0,506$.
b. En déduire la probabilité qu'une personne ait consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est une femme.
3. Calculer $P_H\left(\overline{B}\right)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans un supermarché, un chef de rayon souhaite développer l'offre de produits bio.
Afin de justifier sa démarche, il affirme à son responsable que 75 % des clients achètent des produits bio au moins une fois par mois.
Le responsable souhaite vérifier ses dires. Pour cela, il organise un sondage à la sortie du magasin. Sur 2 000 personnes interrogées, 1 421 répondent qu'elles consomment des produits bio au moins une fois par mois.
Au seuil de 95 %, que peut-on penser de l'affirmation du chef de rayon ?

Partie C

Pour promouvoir les produits bio de son enseigne, le responsable d'un magasin décide d'organiser un jeu qui consiste, pour un client, à remplir un panier avec une certaine masse d'abricots issus de l'agriculture biologique. Il est annoncé que le client gagne le contenu du panier si la masse d'abricots déposés est comprise entre 3, 2 et 3, 5 kilogrammes.
La masse de fruits en kg, mis dans le panier par les clients, peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi de probabilité de densité f définie sur l'intervalle [3; 4] par :

$$f(x) = \frac{2}{(x-2)^2}.$$

Rappel : on appelle fonction de densité d'une loi de probabilité sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ toute fonction f définie, continue et positive sur $[a\,;\,b]$, telle que l'intégrale de f sur $[a\,;\,b]$ est égale à 1.

1. Vérifier que la fonction f précédemment définie est bien une fonction de densité d'une loi de probabilité sur l'intervalle [3; 4].
2. Le magasin annonce : « Un client sur trois gagne le panier ! ».
Cette annonce est-elle exacte ?
3. Cette question a pour but de calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.
On rappelle que, pour une variable aléatoire X de densité f sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, E(X) est donnée par : $\text{E}(X) = \displaystyle\int_a^b x f(x)\,\text{d}x$.
a. Vérifier que la fonction G, définie sur l'intervalle [3; 4] par $G(x) = \ln(x-2) - \dfrac{x}{x-2}$, est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{(x-2)^2}$ sur cet intervalle.
b. En déduire la valeur exacte de E(X), puis sa valeur arrondie au centième.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi la spécialité mathématique

1. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) à l'inconnue z :

$$z^3+\left(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)z^2+\left(4-4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z+8\mathrm{i}=0 \quad (E).$$

a. Montrer que le nombre $-2\mathrm{i}$ est une solution de l'équation (E).

b. Vérifier que, pour tout nombre complexe z, on a :

$$z^3+\left(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)z^2+\left(4-4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z+8\mathrm{i}=(z+2\mathrm{i})\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right).$$

c. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

d. Écrire les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

Dans la suite, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

[resume]On considère les points A, B, C d'affixes respectives $-2\mathrm{i}$, $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

1. a. Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

b. Placer ces points sur une figure que l'on complètera par la suite.

c. On note D le milieu du segment [OB]. Déterminer l'affixe z_{L} du point L tel que AODL soit un parallélogramme.

2. On rappelle que, dans un repère orthonormé du plan, deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\ ;\ y)$ et $(x'\ ;\ y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx'+yy'=0$.

a. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives z et z'.
Montrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $z\overline{z'}$ est un imaginaire pur.

b. À l'aide de la question **3. a.**, démontrer que le triangle AOL est rectangle en L.

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi la spécialité mathématique

On note r l'ensemble des matrices colonnes à 2 lignes, à coefficients entiers.
Soit $U=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ deux éléments de r. À U et V, on associe la matrice $A=\begin{pmatrix}u_1 & v_1\\u_2 & v_2\end{pmatrix}$ et le nombre $d(A)=u_1v_2-u_2v_1$.
On dit que $(U,\ V)$ est une base de r si et seulement si, pour tout élément X de r, il existe un unique couple d'entiers relatifs $(a\ ;\ b)$ tel que $X=aU+bV$.

1. Dans cette question, on pose $U=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$

a. Montrer que X ne peut pas s'écrire $X=aU+bV$, avec a et b entiers relatifs.

b. Le couple $(U,\ V)$ est-il une base de r ?

Dans la suite de l'exercice, on souhaite illustrer sur un exemple la propriété : « si $d(A)=1$, alors $(U,\ V)$ est une base de r ».

[resume]En posant $U=\begin{pmatrix}6\\-11\end{pmatrix}$ le but de cette question est de déterminer $V\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ tel que $d(A)=1$. On rappelle dans ce cas que la matrice A associée au couple $(U,\ V)$ s'écrit : $A=\begin{pmatrix}6 & v_1\\-11 & v_2\end{pmatrix}$.

1. a. Exprimer la condition $d(A)=1$ par une égalité reliant v_1 et v_2.

b. On considère l'équation (E) : $11x+6y=1$, où x et y sont des entiers relatifs.
Donner une solution particulière de l'équation (E).

c. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des entiers relatifs.

d. Déterminer alors une matrice $V\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ de r vérifiant d'une part l'égalité $d(A)=1$ et, d' autre part, la condition $0\leqslant v_1\leqslant 10$.

2. Dans cette question, on pose $U=\begin{pmatrix}6\\-11\end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix}5\\-9\end{pmatrix}$. Ainsi $A=\begin{pmatrix}6 & 5\\-11 & -9\end{pmatrix}$.

a. Montrer que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1}.

b. Soit X un élément de r.

Montrer que l'égalité $X = aU + bV$ s'écrit matriciellement $X = A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

c. Déduire des questions précédentes qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs $(a~;~b)$ tel que $X = aU+bV$, c'est-à-dire tel que $(U,~V)$ est une base de r.

d. Déterminer ce couple $(a~;~b)$ lorsque $X = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Sommaire Index

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Métropole–La Réunion 21 juin 2019

Exercice 1 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)$$

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

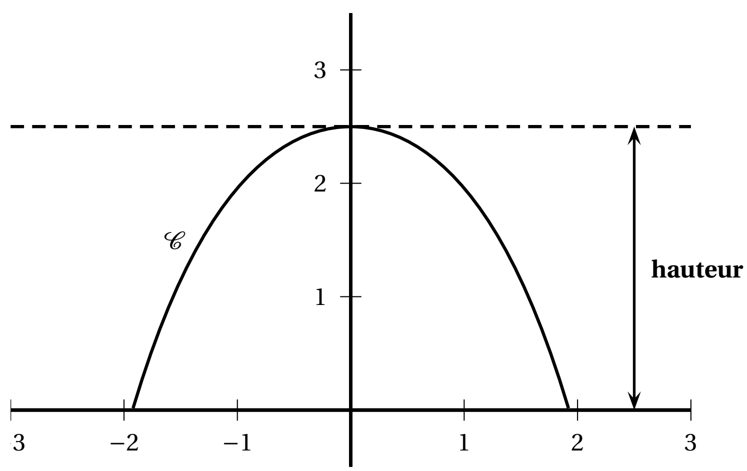
   c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, une unique solution, que l'on note α.

2. En remarquant que, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$, justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ et qu'elles sont opposées.

Partie B

Les **serres en forme de tunnel** sont fréquemment utilisées pour la culture des plantes fragiles ; elles limitent les effets des intempéries ou des variations de température.
Elles sont construites à partir de plusieurs arceaux métalliques identiques qui sont ancrés au sol et supportent une bâche en plastique.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 mètre. La fonction f et le réel α sont définis dans la **partie A**. Dans la suite de l'exercice, on modélise un arceau de serre par la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[-\alpha\ ;\ +\alpha]$.
On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-\alpha\ ;\ +\alpha]$.



On admettra que la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

1. Calculer la hauteur d'un arceau.

2. **a.** Dans cette question, on se propose de calculer la valeur exacte de la longueur de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$. On admet que cette longueur est donnée, en mètre, par l'intégrale :

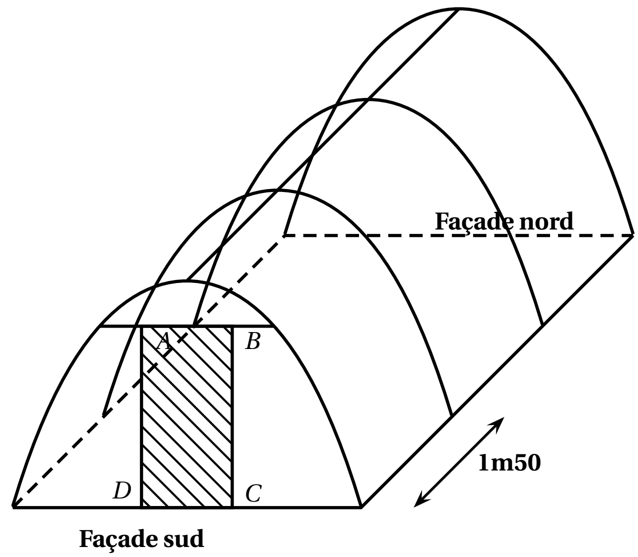
   $$I = \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

   Montrer que, pour tout réel x, on a : $1 + \left(f'(x)\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)^2$

   b. En déduire la valeur de l'intégrale I en fonction de α.
   Justifier que la longueur d'un arceau, en mètre, est égale à : $\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha}$.

Partie C

On souhaite construire une serre de jardin en forme de tunnel.
On fixe au sol quatre arceaux métalliques, dont la forme est celle décrite dans la partie précédente, espacés de 1,5 mètre, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.
Sur la façade sud, on prévoit une ouverture modélisée sur le schéma par le rectangle $ABCD$ de largeur 1 mètre et de longueur 2 mètres.



On souhaite connaître la quantité, exprimée en m^2, de bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.
Cette bâche est constituée de trois parties, l'une recouvrant la façade nord, l'autre la façade sud (sauf l'ouverture), la troisième partie de forme rectangulaire recouvrant le toit de la serre.

1. Montrer que la quantité de bâche nécéssaire pour recouvrir les façades sud et nord est donnée, en m^2, par :

$$\mathscr{A} = 4\int_0^{\alpha} f(x)\, dx - 2$$

2. On prend $1,92$ pour valeur approchée de α. Déterminer, au m^2 près, l'aire totale de la bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.

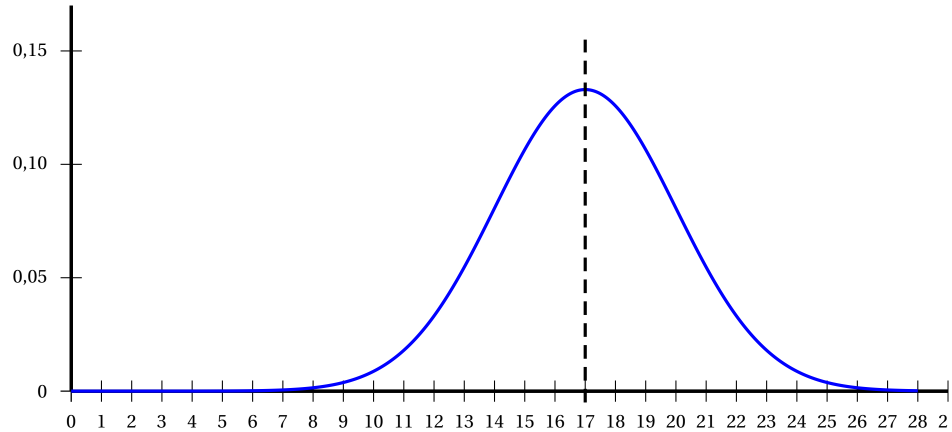
Exercice 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B.

Partie A

Les durées des parties de type A et de type B, exprimées en minutes, peuvent être modélisées respectivement par deux variables aléatoires X_A et X_B.
La variable aléatoire X_A suit la loi uniforme sur l'intervalle $[9 ; 25]$.
La variable aléatoire X_B suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type 3. La représentation graphique de la fonction de densité de cette loi normale et son axe de symétrie sont donnés ci-dessous.



1. **a.** Calculer la durée moyenne d'une partie de type A.

   b. Préciser à l'aide du graphique la durée moyenne d'une partie de type B.

2. On choisit au hasard, de manière équiprobable, un type de jeu. Quelle est la probabilité que la durée d'une partie soit inférieure à 20 minutes ? On donner le résultat arrondi au centième.

Partie B

On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

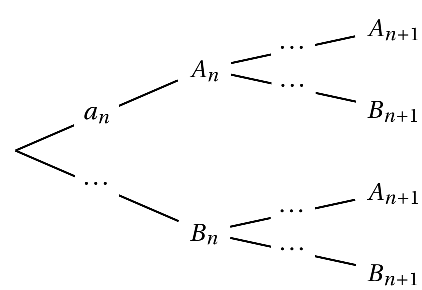
- si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8 ;
- si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7.

Pour une entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les évènements :
A_n : « la n-ième partie est une partie de type A. »
B_n : « la n-ième partie est une partie de type B. »
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n.

1. **a.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci contre.

   b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$$



Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$. La suite (a_n) est donc définie par : $a_1 = a$, et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

2. *Étude d'un cas particulier.* Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.

   a. Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$.

   b. Montrer que la suite (a_n) est croissante.

   c. Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.

3. *Étude du cas général.* Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$.
   On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = a_n - 0,6$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.

   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :
   $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$.

   c. Déterminer la limite de la suite (a_n). Cette limite dépend-elle de la valeur de a ?

   d. La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre insérée en début des parties de type B. Quelle devrait-être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?

Exercice 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation (E) : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
   On note A et B les points du plan dont les affixes sont les solutions de (E).
   On note O le point d'affixe 0.
   Affirmation 1 : Le triangle OAB est équilatéral.
2. On note u le nombre complexe : $u = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et on note $\overline{u}$ son conjugué.
   Affirmation 2 : $u^{2019} + \overline{u}^{2019} = 2^{2019}$
3. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :
$$f_n(x) = x\mathrm{e}^{-nx+1}.$$
   Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la fonction f_n admet un maximum.
4. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Affirmation 4 : La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$.
5. Soit A un nombre réel strictement positif.
   On considère l'algorithme ci-contre.
   On suppose que la variable I contient la valeur 15 en fin d'exécution de cet algorithme.
   Affirmation 5 : $15\ln(2) \leqslant \ln(A) \leqslant 16\ln(2)$

```
I ← 0
Tant que 2^I ⩽ A
    I ← I + 1
Fin Tant que
```

Exercice 4 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.
Dans cet exercice, on étudie l'ensemble S des matrices qui s'écrivent sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où a, b, c et d appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ et vérifient : $ad - bc = 1$.
On note I la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie A

1. Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ appartient à l'ensemble S.
2. Montrer qu'il existe exactement quatre matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$ appartenant à l'ensemble S ; les expliciter.
3. **a.** Résoudre dans Z l'équation (E) : $5x - 2y = 1$. On pourra remarquer que le couple $(1~;~2)$ est une solution particulière de cette équation.
   b. En déduire qu'il existe une infinité de matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ qui appartiennent à l'ensemble S. Décrire ces matrices.

Partie B

Dans cette partie, on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice appartenant à l'ensemble S. On rappelle que a, b, c et d sont des entiers relatifs tels que $ad - bc = 1$.

1. Montrer que les entiers a et b sont premiers entre eux.
2. Soit B la matrice : $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
   a. Calculer le produit AB. On admet que $AB = BA$.
   b. En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1}.

c. Montrer que A^{-1} appartient à l'ensemble S.

3. Soient x et y deux entiers relatifs. On note x' et y' les entiers relatifs tels que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

a. Montrer que $x = dx' - by'$ On admet de même que $y = ay' - cx'$

b. On note D le PGCD de x et y et on note D' le PGCD de x' et y'. Montrer que $D = D'$.

4. On considère les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies par : $x_0 = 2019$, $y_0 = 673$ et pour tout entier naturel n :
$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{array}\right.$
En utilisant la question précédente, déterminer, pour tout entier naturel n, le PGCD des entiers x_n et y_n.

Exercice 4 — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1, dont la figure est donnée en annexe.
On note I le milieu du segment $[EF]$, J le milieu du segment $[EH]$ et K le point du segment $[AD]$ tel que $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
On note $\mathscr{P}$ le plan passant pat I et parallèle au plan (FHK).

Partie A

Dans cette partie, les constructions demandées seront effectuées sans justification sur la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie.

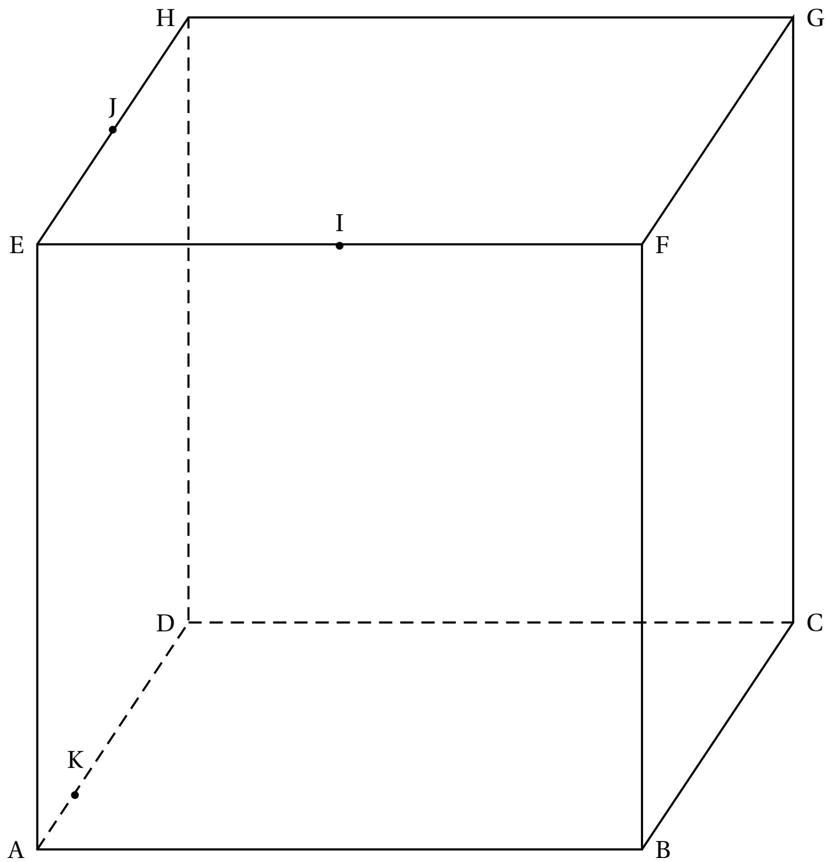
1. Le plan (FHK) coupe la droite (AE) en un point qu'on note M. Construire le point M.
2. Construire la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.

Partie B

Dans cette partie, on munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
On rappelle que $\mathscr{P}$ est le plan passant par I et parallèle au plan (FHK).

1. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FHK).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (FHK) est : $4x+4y-3z-1=0$.
   c. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$.
   d. Calculer les coordonnées du point M', point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (AE).
2. On note Δ la droite passant par le point E et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   b. Calculer les coordonnées du point L, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
   c. Tracer les droite Δ sur la figure donnée en annexe.
   d. Les droites Δ et (BF) sont-elles sécantes ? Qu'en est-il des droites Δ et (CG) ? Justifier.

Annexe à rendre avec la copie



Sommaire Index

Durée : 4 heures

Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie 4 septembre 2019

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A *et* B *peuvent être abordées de façon indépendante.*

Deux groupes de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.

Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution

Le groupe de spécialistes en environnement étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement de la population de grenouilles autour de l'étang. Ce taux dépend notamment du nombre de grenouilles présentes sur les lieux, de la quantité de nourriture à disposition, de l'espace disponible et de la qualité de l'environnement.

Une étude, menée en 2018 par ce premier groupe de scientifiques, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à $0,9$; cela signifie que 90 % des ressources sont disponibles.

On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite (T_n) qui, à tout entier naturel n, associe le taux de disponibilité des ressources n années après 2018. On a ainsi $T_0 = 0,9$.

Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} = T_n - 0,1T_n^2$.

1. Certains spécialistes en environnement estiment qu'en 2022, le taux de disponibilité des ressources sera proche de $0,4$. Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?
2. On définit la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = x - 0,1x^2$.
   Ainsi, la suite (T_n) vérifie pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = f(T_n)$.
   a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
   b. Montrer que pour tout n entier naturel, on a : $0 \leqslant T_{n+1} \leqslant T_n \leqslant 1$.
   c. La suite (T_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.
   d. Le groupe de spécialistes en environnement affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à $0,4$ au cours des vingt premières années qui suivent le début de l'étude et qu'il est capable de déterminer en quelle année, ce seuil serait atteint pour la première fois.
   Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

Partie B - Étude d'un modèle continu d'évolution

Le groupe de biologistes a choisi une autre option et travaille sur le nombre de grenouilles peuplant l'étang. Au 1er janvier 2018, il avait été dénombré 250 grenouilles.

Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $P(t) = \dfrac{1000}{0,4 + 3,6\mathrm{e}^{-0,5t}}$ où t est le temps, mesuré en années, écoulé depuis le 1er janvier 2018 (cette fonction découle d'un modèle continu, usuel en biologie, le modèle de Verhulst).

1. Calculer $P'(t)$ où P' est la fonction dérivée de P puis étudier le signe de $P'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0 ; +\infty[$ telle que $P(t_0) = 2000$. Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.
4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2000 grenouilles.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront précisées à 10^{-4} *près.*

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, ...

Une suite de 8 bits est appelé un octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

Partie A

On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet.
On envoie un octet au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des bits précédents. On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à $0,01$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

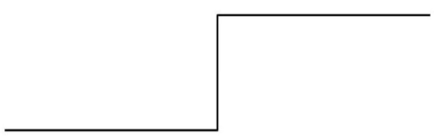
2. Déterminer la probabilité qu'exactement deux bits de l'octet soient mal transmis.

3. Que peut-on penser de l'affirmation suivante : « La probabilité que le nombre de bits mal transmis de l'octet soit au moins égal à trois est négligeable » ? Argumenter.

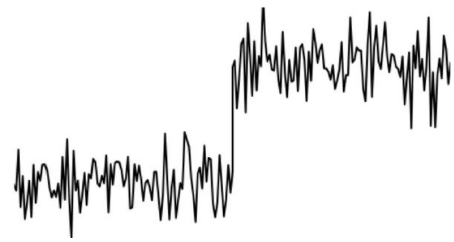
Partie B

Les erreurs de transmission des bits sont liées à la présence de bruits parasites sur le canal de communication comme l'illustre la figure ci-dessous :

Transmission idéale de 0 puis 1



Transmission réelle, bruitée, de 0 puis 1



On admet que l'information d'un bit reçu, incluant le bruit, peut être modélisée à l'aide d'une variable aléatoire continue qui suit une loi normale dont l'espérance est liée à la valeur du bit envoyé.
On envoie un bit de valeur 1. On admet que l'information reçue d'un bit de valeur 1 peut être modélisée par une variable aléatoire R qui suit la loi normale d'espérance 1 et d'écart-type $0,3$.
On considère que le bit reçu n'est pas correctement interprété lorsque la valeur de R est inférieure ou égale à $0,4$.
Calculer la probabilité que le bit reçu ne soit pas correctement interprété.

Partie C

Afin de détecter si un ou plusieurs bits de l'octet sont mal transmis, on utilise un protocole de détection d'erreur. Il consiste à ajouter, à la fin de l'octet à transmettre, un bit, appelé bit de parité et qui est transmis après les huit bits de l'octet.

On s'intéresse désormais à la transmission de l'octet suivi de son bit de parité.
Une étude statistique a permis d'obtenir que :

- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis sans erreur vaut $0,922$;
- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis avec exactement une erreur vaut $0,075$;
- si les huit bits (octet) ont été transmis sans erreur, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut $0,99$;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec exactement une erreur, la probabilité que le bit de parité ait été envoyé sans erreur vaut $0,9$;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec au moins deux erreurs, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut $0,99$.

On choisit au hasard un octet suivi de son bit de parité. On considère les évènements suivants :

- Z : « les huit bits de l'octet sont transmis avec aucune erreur » ;
- E : « les huit bits de l'octet sont transmis avec exactement une erreur » ;
- D : « les huit bits de l'octet sont transmis avec au moins deux erreurs » ;
- B : « le bit de parité est transmis sans erreur ».

1. Compléter l'arbre pondéré de l'annexe 1 à rendre avec la copie.

2. Quelle est la probabilité que l'octet soit transmis avec une erreur exactement et que le bit de parité soit transmis sans erreur ?

3. Calculer la probabilité de l'évènement B.

Exercice 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. On considère le nombre complexe $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

   Affirmation 1 : Le nombre complexe z^2 est un réel positif.
   Affirmation 2 : L'argument du nombre complexe z^{2019} vaut 0 modulo 2π.

Dans ce qui suit, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

[resume]On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2-3z+5 = 0$. **Affirmation 3** : Cette équation admet deux solutions dont les images sont symétriques par rapport à l'origine du repère. À tout point M d'affixe z du plan complexe, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \overline{z}(1-z).$$

Affirmation 4 : Il existe une infinité de points M confondus avec leur point image M'.

Exercice 4 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

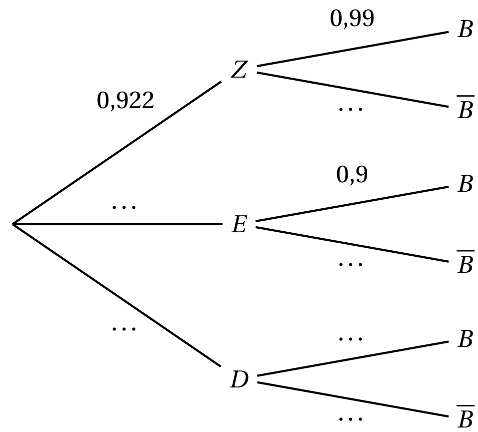
Sur la figure donnée en **annexe 2 à rendre avec la copie**, on considère le cube ABCDEFGH de côté 6 cm dans le repère orthonormé $\left(\text{A}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, l'unité étant le cm.
On admet que le point I a pour coordonnées (6 ; 0 ; 3) dans ce repère.
On appelle L le milieu du segment [FG].
On appelle P le plan défini par les trois points E, I et L.
On rappelle que le volume du tétraèdre est donné par la formule $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

1. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P.

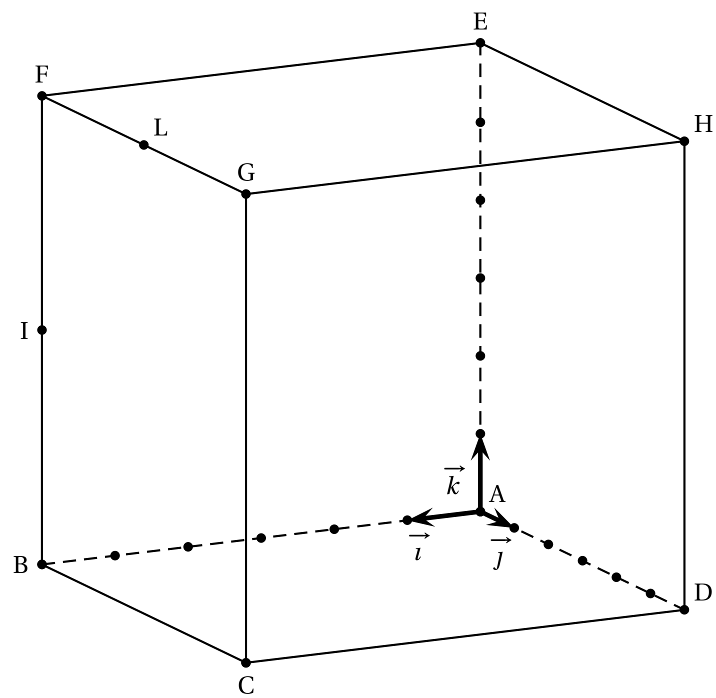
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan P.
2. Justifier que le volume du tétraèdre FELI est 9 cm^3.
3. **a.** Soit Δ la perpendiculaire au plan P passant par le point F. Justifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& t+6\\y &=& -2t\\z &=& 2t+6\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

   b. Montrer que l'intersection de la droite Δ et du plan P est le point K$\left(\frac{16}{3}\,;\,\frac{4}{3}\,;\,\frac{14}{3}\right)$.
4. Calculer l'aire en cm^2 du triangle ELI.
5. Tracer sur le graphique fourni en **annexe 2 à rendre avec la copie**, la section du cube ABCDEFGH par le plan parallèle au plan P passant par le point G et en donner la nature précise sans justification.

Annexe 1 de l'exercice 2 à rendre avec la copie



Annexe 2 de l'exercice 4 : Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
À rendre avec la copie



Sommaire Index

☙ Baccalauréat S Antilles-Guyane 9 septembre 2019 ❧

EXERCICE 1 **5 points**

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées indépendamment.

Une association offre à ses adhérents des paniers de légumes. Chaque adhérent a le choix entre trois tailles de panier :

- un panier de petite taille ;
- un panier de taille moyenne ;
- un panier de grande taille.

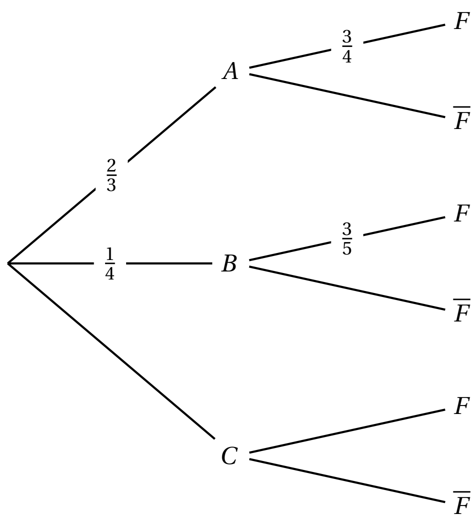
Partie A

L'association envisage de proposer en outre des livraisons d'œufs frais. Pour savoir si ses adhérents sont intéressés, elle réalise un sondage.

On interroge un adhérent au hasard. On considère les évènements suivants :

- A : « l'adhérent choisit un panier de petite taille » ;
- B : « l'adhérent choisit un panier de taille moyenne » ;
- C : « l'adhérent choisit un panier de grande taille » ;
- F : « l'adhérent est intéressé par une livraison d'œufs frais ».

On dispose de certaines données, qui sont résumées dans l'arbre ci-dessous :



1. Dans cette question, on ne cherchera pas à compléter l'arbre.
   a. Calculer la probabilité que l'adhérent choisisse un panier de petite taille et soit intéressé par une livraison d'œufs frais.
   b. Calculer $P\left(B \cap \overline{F}\right)$, puis interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.
   c. La livraison d'œufs frais ne sera mise en place que si la probabilité de l'évènement F est supérieure à $0,6$. Pourquoi peut-on affirmer que cette livraison sera mise en place ?
2. Dans cette question, on suppose que $P(F) = 0,675$.
   a. Démontrer que la probabilité conditionnelle de F sachant C, notée $P_C(F)$, est égale à $0,3$.
   b. L'adhérent interrogé est intéressé par la livraison d'œufs frais.
   Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un panier de grande taille ? Arrondir le résultat à 10^{-2}.

Partie B

1. La masse, en gramme, d'un panier de grande taille peut être modélisée par une variable aléatoire, notée X, suivant une loi normale d'espérance $5\,000$ et d'écart- type 420. Un panier de grande taille est déclaré non conforme lorsque sa masse est inférieure à $4,5$ kg.
   On choisit au hasard un panier de grande taille.
   Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit non conforme ?

2. Les responsables de l'association décident de modifier la méthode de remplissage. Avec cette nouvelle méthode, la masse, en gramme, d'un panier de grande taille est désormais modélisée par une variable aléatoire, notée Y, suivant une loi normale d'espérance 5 000 et d'écart-type σ. La probabilité qu'un panier de grande taille choisi au hasard soit non conforme est alors de $0,04$.

   Déterminer la valeur de σ arrondie à l'unité.

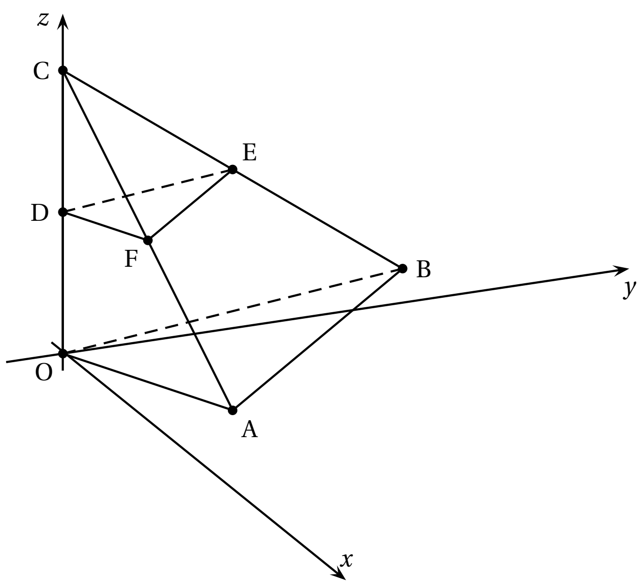
Partie C

Depuis plusieurs années, les associations distribuant des produits frais à leurs adhérents se développent dans tout le pays et connaissent un succès grandissant.
Lors d'une émission de radio consacrée à ce sujet, un journaliste annonce que 88 % des adhérents de ces associations sont satisfaits.
Un auditeur intervient dans l'émission pour contester le pourcentage avancé par le journaliste. à l'appui de son propos, l'auditeur déclare avoir réalisé un sondage auprès de 120 adhérents de ces associations et avoir constaté que, parmi eux, seuls 100 ont indiqué être satisfaits.
La contestation de l'auditeur est-elle fondée ?

EXERCICE 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(10 ; 0 ; 1), B(1 ; 7 ; 1) et C(0 ; 0 ; 5).



1. **a.** Démontrer que les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.
   b. Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{AOB}$, arrondie au dixième.
2. Vérifier que $7x + 9y - 70z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CA).
4. Soit D le milieu du segment [OC]. Déterminer une équation du plan P parallèle au plan (OAB) passant par D.
5. Le plan P coupe la droite (CB) en E et la droite (CA) en F.
   Déterminer les coordonnées du point F. On admet que le point E a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{7}{2}\ ;\ 3\right)$.
6. Démontrer que la droite (EF) est parallèle à la droite (AB).

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

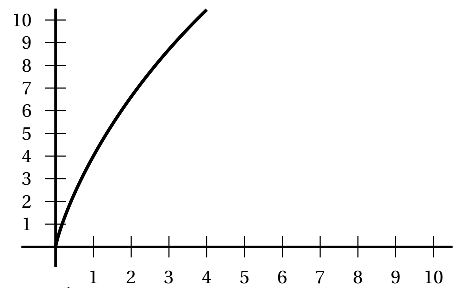
$$g(x) = 4x - x\ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note g' sa dérivée.

Partie A

Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe représentative de la fonction g obtenue par un élève sur sa calculatrice. Cet élève émet les deux conjectures suivantes :

- il semble que la fonction g soit positive ;
- il semble que la fonction g soit strictement croissante.



L'objectif de cette partie est de valider ou d'invalider chacune de ces conjectures.

1. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

3. Les conjectures de l'élève sont-elles vérifiées ?

Partie B

Dans cette partie, on poursuit l'étude de la fonction g.

1. a. On rappelle que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0.$$

En déduire que

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = 0.$$

b. Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.

2. a. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = 3 - \ln x$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

3. On désigne par G la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$G(x) = \frac{1}{4}x^2(9 - 2\ln x).$$

On admet que la fonction G est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

a. Démontrer que la fonction G est une primitive de la fonction g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

b. L'affirmation suivante est-elle vraie ?

« Il n'existe aucun réel α strictement supérieur à 1 tel que $\displaystyle\int_1^{\alpha} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. »

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A *et* B *de cet exercice sont indépendantes.*

Partie A

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte, une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n, par

$$p_n = n^2 - 42n + 4.$$

Affirmation 1 : La suite (p_n) est strictement décroissante.

2. Soit a un nombre réel. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
   - $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$;
   - $v_n = u_n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

   Affirmation 2 : La suite (v_n) est une suite géométrique.
3. On considère une suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n,

$$n^2 \leqslant (n+1)^2 w_n \leqslant n^2 + n.$$

   Affirmation 3 : La suite (w_n) converge.

Partie B

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = \frac{2U_n}{1 + U_n}.$$

1. Calculer U_1 que l'on écrira sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$U_n = \frac{2^n}{1 + 2^n}.$$

3. On considère les trois algorithmes suivants dans lesquels les variables n, p et u sont du type nombre. Pour un seul de ces trois algorithmes la variable u ne contient pas le terme U_n en fin d'exécution.
   Déterminer lequel en justifiant votre choix.

Algorithme 1	**Algorithme 2**	**Algorithme 3**
$u \leftarrow \frac{1}{2}$ $i \leftarrow 0$ Tant que $i < n$ $\quad u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$ $\quad i \leftarrow i+1$ Fin Tant que	$u \leftarrow \frac{1}{2}$ Pour i allant de 0 à n $\quad u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$ Fin Pour	$p \leftarrow 2^n$ $u \leftarrow \frac{p}{p+1}$

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une ville possède deux ports maritimes :
- un port de plaisance A ;
- un port de commerce B.

Le port de plaisance A n'a pas d'accès direct à l'océan mais est relié au port de commerce B qui, lui, est ouvert sur l'océan. Un passant, installé en terrasse sur le port de plaisance A, jette une bouteille dans l'eau.
À l'instant 0, la bouteille se trouve dans le port A.
Soit n un entier naturel.
On admet que :
- quand la bouteille est dans le port A au bout de n heures, la probabilité qu'elle y soit encore l'heure suivante est $\frac{3}{5}$;
- quand la bouteille est dans le port B au bout de n heures, la probabilité qu'elle soit dans le port A l'heure suivante est $\frac{1}{10}$ et la probabilité qu'elle se trouve toujours dans le port B l'heure suivante est $\frac{1}{15}$;
- le port A n'ayant pas d'accès direct à l'océan, lorsque la bouteille est dans le port A, elle ne peut pas se trouver dans l'océan l'heure suivante ;
- une fois dans l'océan, la bouteille ne revient jamais dans les ports.

Soient les évènements :
- A_n : « la bouteille se trouve dans le port A au bout de n heures » ;
- B_n : « la bouteille se trouve dans le port B au bout de n heures » ;
- C_n : « la bouteille se trouve dans l'océan au bout de n heures ».

On note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de ces évènements.
Ainsi on a $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

1. **a.** Compléter l'arbre fourni en **ANNEXE** à rendre avec la copie.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \dfrac{3}{5}a_n + \dfrac{1}{10}b_n \\ b_{n+1} & = & \dfrac{2}{5}a_n + \dfrac{1}{15}b_n \end{array}\right.$$

Soient les matrices suivantes :

$$M = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

c. Démontrer que, pour tout entier strictement positif n, $U_n = M^n U_0$.

2. **a.** Donner U_0.

b. Calculer M^2 en détaillant les calculs de l'un des coefficients et en déduire qu'il existe un réel k tel que $M^2 = kM$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif,

$$M^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M.$$

d. En déduire que, pour tout entier n strictement positif,

$$U_n = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \\ \dfrac{2}{5} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. Soit n un entier strictement positif.

a. Démontrer que la probabilité que la bouteille soit dans l'océan au bout de n heures est égale à $1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$.

b. On considère l'algorithme ci-dessous :

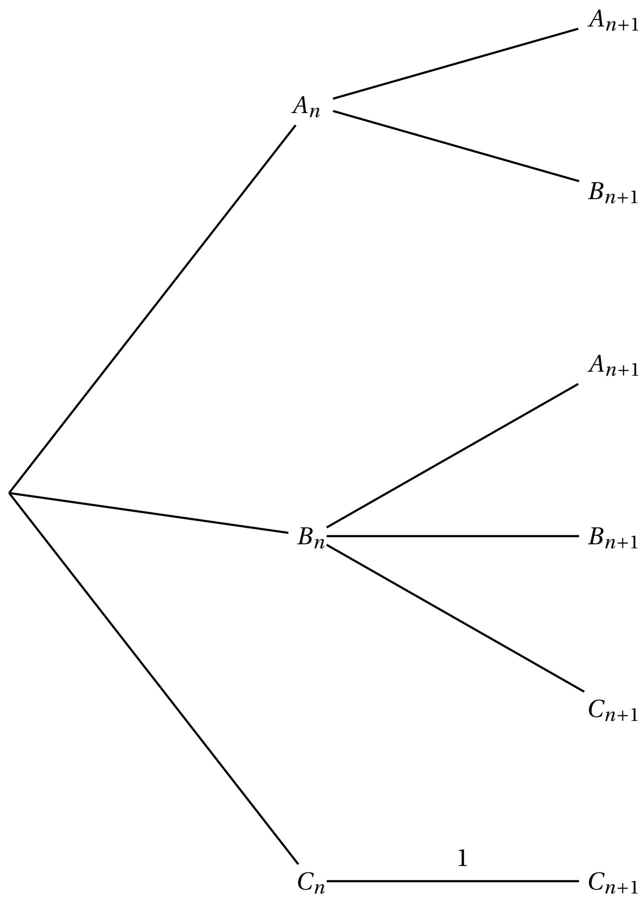
```
n ← 1
Tant que 1 − (2/3)^(n−1) < 0,9
        n ← n + 1
Fin Tant que
```

Indiquer sans justification le nombre contenu dans la variable n de cet algorithme à la fin de son exécution.
Interpréter ce nombre dans le contexte de l'exercice.

À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE de l'exercice 4

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



Sommaire Index

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Métropole–La Réunion 13 septembre 2019

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Lors d'un examen professionnel, chaque candidat doit présenter un dossier de type A ou un dossier de type B ; 60 % des candidats présentent un dossier de type A, les autres présentant un dossier de type B.

Le jury attribue à chaque dossier une note comprise entre 0 et 20. Un candidat est reçu si la note attribuée à son dossier est supérieure ou égale à 10.

On choisit au hasard un dossier.

On admet qu'on peut modéliser la note attribuée à un dossier de type A par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance 11, 3 et d'écart-type 3, et la note attribuée à un dossier de type B par une variable aléatoire Y suivant la loi normale d'espérance 12, 4 et d'écart type 4, 7.

On pourra noter A l'évènement : « le dossier est un dossier de type A », B l'évènement : « le dossier est un dossier de type B », et R l'évènement : « le dossier est celui d'un candidat reçu à l'examen ».

Les probabilités seront arrondies au centième.

1. Le dossier choisi est de type A. Quelle est la probabilité que ce dossier soit celui d'un candidat reçu à l'examen ? On admet que la probabilité que le dossier choisi, sachant qu'il est de type B, soit celui d'un candidat reçu est égale à 0, 70.
2. Montrer que la probabilité, arrondie au centième, que le dossier choisi soit celui d'un candidat reçu à l'examen est égale à 0, 68.
3. Le jury examine 500 dossiers choisis aléatoirement parmi les dossiers de type B. Parmi ces dossiers, 368 sont ceux de candidats reçus à l'examen.

   Un membre du jury affirme que cet échantillon n'est pas représentatif. Il justifie son affirmation en expliquant que dans cet échantillon, la proportion de candidats reçus est trop grande.

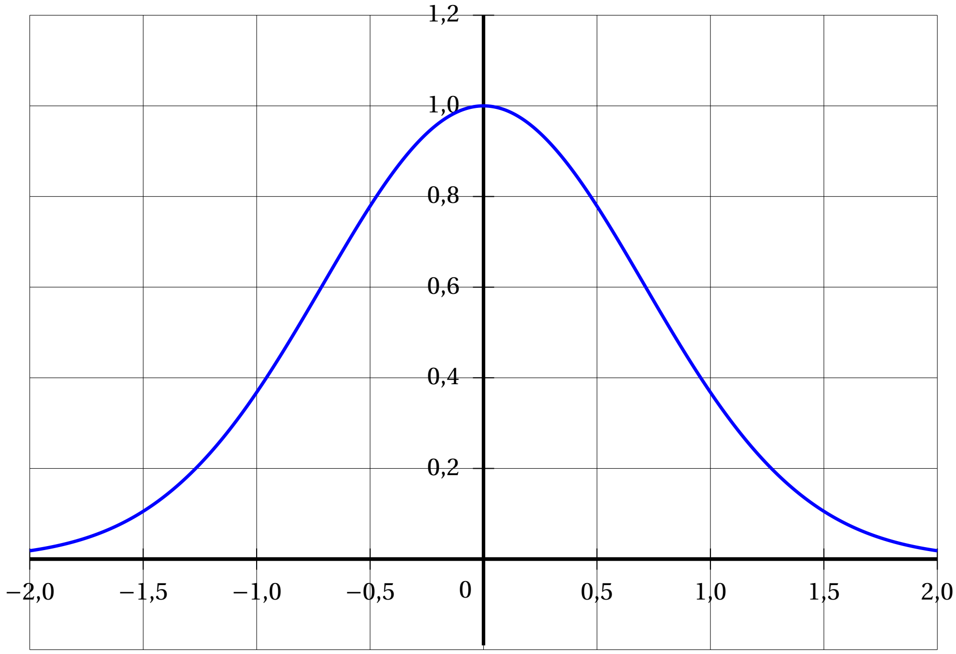
   Quel argument peut-on avancer pour confirmer ou contester ses propos ?
4. Le jury décerne un « prix du jury » aux dossiers ayant obtenu une note supérieure ou égale à N, où N est un nombre entier. La probabilité qu'un dossier choisi au hasard obtienne le « prix du jury » est comprise entre 0, 10 et 0, 15.

   Déterminer le nombre entier N.

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthogonal d'une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$. La courbe $\mathscr{C}_g$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et se situe dans le demi-plan $y > 0$.



Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose :

$$G(t) = \int_0^t g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Partie A

Les justifications des réponses aux questions suivantes pourront s'appuyer sur des considérations graphiques.

1. La fonction G est-elle croissante sur $[0~;~+\infty[$? Justifier.
2. Justifier graphiquement l'inégalité $G(1) \leqslant 0,9$.
3. La fonction G est-elle positive sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Dans la suite du problème, la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(u) = \mathrm{e}^{-u^2}$.

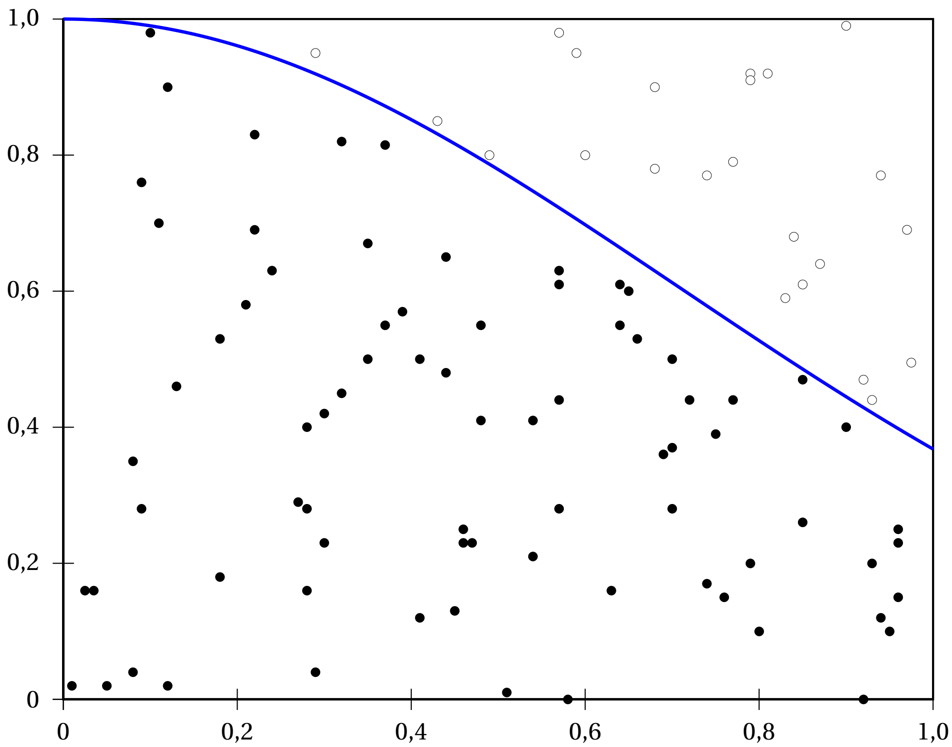
Partie B

1. Étude de g
   a. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
   b. Calculer la fonction dérivée de g et en déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
   c. Préciser le maximum de g sur $\mathbb{R}$. En déduire que $g(1) \leqslant 1$.
2. On note E l'ensemble des points M situés entre la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On appelle I l'aire de cet ensemble.
   On rappelle que :

$$I = G(1) = \int_0^1 g(u)\,\mathrm{d}u.$$

   On souhaite estimer l'aire I par la méthode dite « de Monte-Carlo » décrite ci-dessous.
   - On choisit un point $M(x~;~y)$ en tirant au hasard de façon indépendante ses coordonnées x et y selon la loi uniforme sur l'intervalle $[0~;~1]$. On admet que la probabilité que le point M appartienne à l'ensemble E est égale à I.
   - On répète n fois l'expérience du choix d'un point M au hasard. On compte le nombre c de points appartenant à l'ensemble E parmi les n points obtenus.
   - La fréquence $f = \dfrac{c}{n}$ est une estimation de la valeur de I.

   a. La figure ci-dessous illustre la méthode présentée pour $n = 100$. Déterminer la valeur de f correspondant à ce graphique.



b. L'exécution de l'algorithme ci-dessous utilise la méthode de Monte-Carlo décrite précédemment pour déterminer une valeur du nombre f.

Recopier et compléter cet algorithme.

f, x et y sont des nombres réels, n, c et i sont des entiers naturels.

ALEA est une fonction qui génère aléatoirement un nombre compris entre 0 et 1.

```
c ← 0
Pour i variant de 1 à n faire :
        x ← ALEA
        y ← ALEA
    Si y ⩽ ... alors
        c ← ...
    fin Si
fin Pour
          f ← ...
```

c. Une exécution de l'algorithme pour $n = 1\,000$ donne $f = 0,757$.

En déduire un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la valeur exacte de I.

Partie C

On rappelle que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(u) = \mathrm{e}^{-u^2}$ et que la fonction G est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(t) = \int_0^t g(u)\,\mathrm{d}u.$$

On se propose de déterminer une majoration de $G(t)$ pour $t \geqslant 1$.

1. *Un résultat préliminaire.*

On admet que, pour tout réel $u \geqslant 1$, on a $g(u) \leqslant \dfrac{1}{u^2}$.

En déduire que, pour tout réel $t \geqslant 1$, on a :

$$\int_1^t g(u)\,\mathrm{d}u \leqslant 1 - \frac{1}{t}.$$

2. Montrer que, pour tout réel $t \geqslant 1$,

$$G(t) \leqslant 2 - \frac{1}{t}.$$

Que peut-on dire de la limite éventuelle de $G(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Préciser si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. Soit m un nombre réel et soit l'équation (E) : $2z^2 + (m-5)z + m = 0$.

a. Affirmation 1 :

« Pour $m = 4$, l'équation (E) admet deux solutions réelles. »

b. Affirmation 2 :

« Il n'existe qu'une seule valeur de m telle que (E) admette deux solutions complexes qui soient des imaginaires purs. »

2. Dans le plan complexe, on considère l'ensemble S des points M d'affixe z vérifiant :

$$|z-6| = |z+5\mathrm{i}|.$$

Affirmation 3 :

« L'ensemble S est un cercle. »

3. On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On note d la droite dont une représentation paramétrique est :

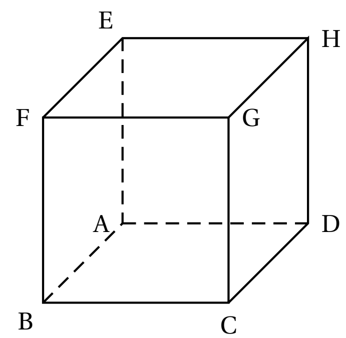
$$d : \left\{\begin{array}{lll} x & = & -1+t \\ y & = & 2-t \\ z & = & 3+t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

On note d' la droite passant par le point B(4 ; 4 ; −6) et de vecteur directeur $\vec{v}\,(5\,;\,2\,;\,-9)$.

Affirmation 4 :

« Les droites d et d' sont coplanaires. »

4. On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.



Affirmation 5 :

« Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est un vecteur normal au plan (ABG). »

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;4]$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$

4. **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.

   b. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

   c. Déterminer la valeur de la limite ℓ.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = f\left(v_n\right).$$

1. On donne en **Annexe, à rendre avec la copie**, la courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.
Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3 sur l'**annexe, à rendre avec la copie**.
Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4 + v_n}\right)(1 - v_n).$$

b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un laboratoire étudie l'évolution d'une population d'insectes parasites de plantes.
Cette évolution comporte deux stades : un stade larvaire et un stade adulte qui est le seul au cours duquel les insectes peuvent se reproduire.
L'observation de l'évolution de cette population conduit à proposer le modèle suivant.
Chaque semaine :

- Chaque adulte donne naissance à 2 larves puis 75 % des adultes meurent.
- 25 % des larves meurent et 50 % des larves deviennent adultes.

Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n le nombre de larves et a_n le nombre d'adultes au bout de n semaines.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la matrice colonne définie par : $X_n = \begin{pmatrix} \ell_n \\ a_n \end{pmatrix}$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$ où A est la matrice : (0,25 2)

$$A = \begin{pmatrix} 0,25 & 2 \\ 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

2. On note U et V les matrices colonnes : $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$, où a est un nombre réel.

a. Montrer que $AU = 1,25U$.

b. Déterminer le réel a tel que $AV = -0,75V$.

Dans les questions 3 et 4, le réel a est fixé de sorte qu'il est la solution de $AV = -0,75V$.

[resume]On admet qu'il existe deux nombres réels α et β tels que : $X_0 = \alpha U + \beta V$ et $\alpha > 0$.

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_n = \alpha(1,25)^n U + \beta(-0,75)^n V$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n : $\begin{cases} \ell_n &= 2(1,25)^n \left(\alpha - \beta(-0,6)^n\right) \\ a_n &= (1,25)^n \left(\alpha + \beta(-0,6)^n\right). \end{cases}$

2. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ell_n}{a_n} = 2$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

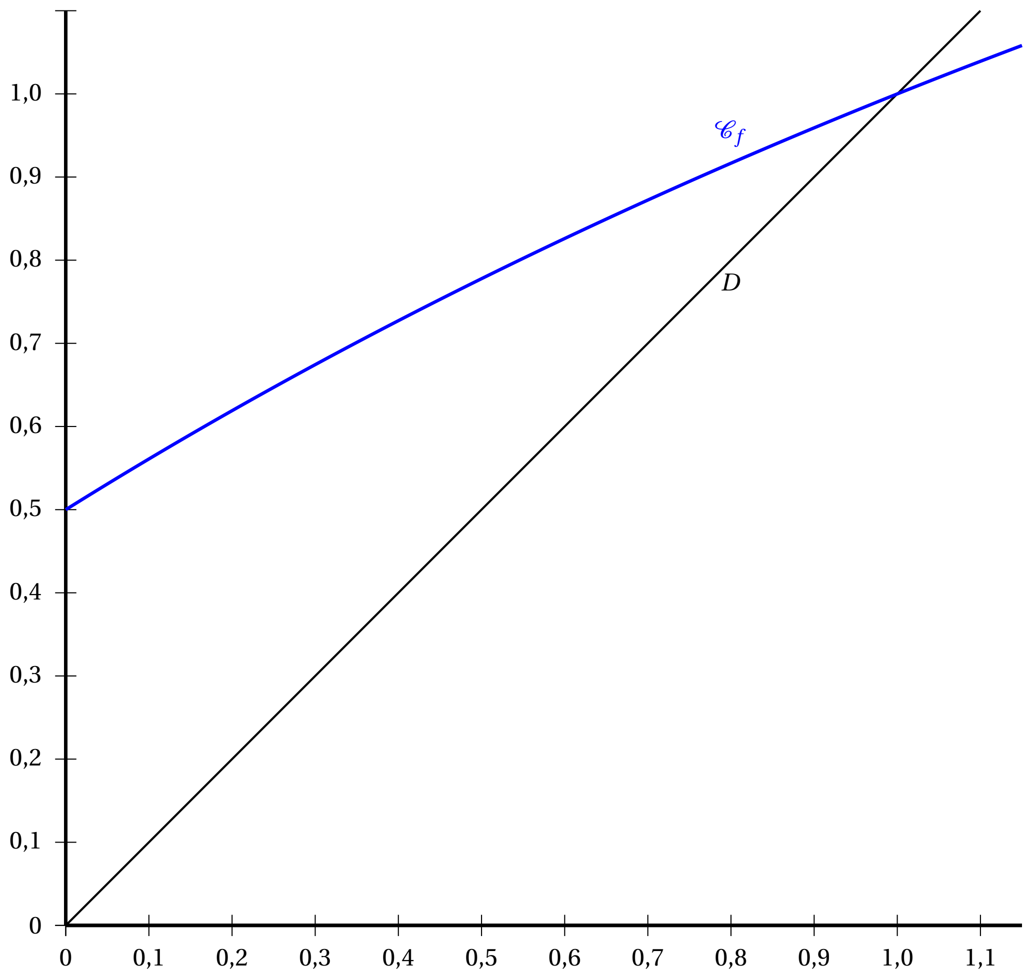
Partie B

1. On considère l'équation (E) : $19x - 6y = 1$. Déterminer le nombre de couples d'entiers $(x\ ;\ y)$ solutions de l'équation (E) et vérifiant $2\,000 \leqslant x \leqslant 2\,100$.

2. Soit n un entier naturel. Montrer que les entiers $(2n+3)$ et $(n+3)$ sont premiers entre eux si et seulement si n n'est pas un multiple de 3.

Annexe

À rendre avec la copie



Sommaire Index

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Amérique du Sud 8 novembre 2019 ∾

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A, B *et* C *peuvent être traitées de façon indépendante.*
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Le roller de vitesse est un sport qui consiste à parcourir une certaine distance le plus rapidement possible en rollers. Dans le but de faire des économies, un club de roller de vitesse s'intéresse à la gestion de ses chronomètres et des roulements de ses rollers.

Partie A :

On note T la variable aléatoire égale à la durée de vie, en mois, d'un chronomètre et on admet qu'elle suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0555$.

1. Calculer la durée de vie moyenne d'un chronomètre (arrondie à l'unité).
2. Calculer la probabilité qu'un chronomètre ait une durée de vie comprise entre un et deux ans.
3. Un entraîneur n'a pas changé son chronomètre depuis deux ans. Quelle est la probabilité qu'il soit encore en état de fonctionner au moins un an de plus ?

Partie B :

Ce club fait des commandes groupées de roulements pour ses adhérents auprès de deux fournisseurs A et B.

- Le fournisseur A propose des tarifs plus élevés mais les roulements qu'il vend sont sans défaut avec une probabilité de 0,97.
- Le fournisseur B propose des tarifs plus avantageux mais ses roulements sont défectueux avec une probabilité de 0,05.

On choisit au hasard un roulement dans le stock du club et on considère les évènements :
A : « le roulement provient du fournisseur A »,
B : « le roulement provient du fournisseur B »,
D : « le roulement est défectueux ».

1. Le club achète 40 % de ses roulements chez le fournisseur A et le reste chez le fournisseur B.
   a. Calculer la probabilité que le roulement provienne du fournisseur A et soit défectueux.
   b. Le roulement est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne du fournisseur B.
2. Si le club souhaite que moins de 3,5 % des roulements soient défectueux, quelle proportion minimale de roulements doit-il commander au fournisseur A ?

Partie C :

Le diamètre intérieur standard d'un roulement sur une roue de roller est de 8 mm.
On note X la variable aléatoire donnant en mm le diamètre d'un roulement et on admet que X suit une loi normale d'espérance 8 et d'écart type $0,1$.
Un roulement est dit conforme si son diamètre est compris entre $7,8$ mm et $8,2$ mm.

1. Calculer la probabilité qu'un roulement soit conforme.
2. Le fournisseur B vend ses roulements par lots de 16 et affirme que seulement 5 % de ses roulements sont non conformes.
   Le président du club, qui lui a acheté 30 lots, constate que 38 roulements sont non conformes. Ce contrôle remet-il en cause l'affirmation du fournisseur B ?
   On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.
3. Le fabricant de roulements de ce fournisseur décide d'améliorer la production de ses roulements. Le réglage de la machine qui les fabrique est modifié de sorte que 96 % des roulements soient conformes. On suppose qu'après réglage la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 8 et d'écart-type σ.
   a. Quelle est la loi suivie par $\dfrac{X-8}{\sigma}$?
   b. Déterminer σ pour que le roulement fabriqué soit conforme avec une probabilité égale à $0,96$.

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à $2,5\ \mu$g/mL.
Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geqslant 0,$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en μg/mL) dans le sang en fonction du temps t (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

1. **a.** Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?
   b. Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.
   c. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0~;~+\infty[$.
   Vérifier que pour tout nombre réel t positif,
   $$f'(t) = \frac{3}{4}(4-t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}.$$
3. **a.** Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f (en incluant la limite en $+\infty$).
   b. À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ?
   Quel est alors ce taux ? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. **a.** Démontrer qu'il existe une unique valeur t_0 appartenant à $[0~;4]$ telle que $f(t_0) = 2,5$.
   En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

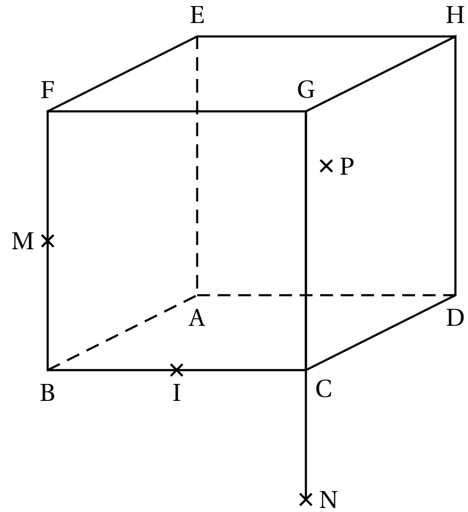
   On admet qu'il existe une unique valeur t_1 *appartenant à* $[4~;~+\infty[$ *vérifiant* $f(t_1) = 2,5$.
   On donne une valeur approchée de t_1 *à* 10^{-3} *près :* $t_1 \approx 18,930$.

   [resume]Déterminer pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à 2,5 μg/mL dans le sang.

5. Soit F la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $F(t) = -12(t+4)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2t$.
   a. Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f et en déduire une valeur approchée de $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'unité près.
   b. En déduire une valeur approchée à $0,1$ près du taux moyen de vasopressine, lors d'un accident hémorragique durant la période où ce taux est supérieur à $2,5\ \mu$g/mL.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH.
Le point M est le milieu de [BF], I est le milieu de [BC], le point N est défini par la relation
$\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{GC}}$ et le point P est le centre de la face ADHE.



Partie A :

1. Justifier que la droite (MN) coupe le segment [BC] en son milieu I.
2. Construire, sur la figure fournie en annexe, la section du cube par le plan (MNP).

Partie B :

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MNP).

   En déduire une équation cartésienne du plan (MNP).
2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (d) passant par G et orthogonale au plan (MNP).
3. Montrer que la droite (d) coupe le plan (MNP) au point K de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

   En déduire la distance GK.
4. On admet que les quatre points M, E, D et I sont coplanaires et que l'aire du quadrilatère MEDI est $\frac{9}{8}$ unités d'aire.

   Calculer le volume de la pyramide GMEDI.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par : $\begin{cases} u_{n+1} &= 3 - \dfrac{10}{u_n + 4} \\ u_0 &= 5 \end{cases}$

Partie A :

1. Déterminer la valeur exacte de u_1 et de u_2.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
3. Démontrer que, pour tout entier nature n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.
4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
5. Justifier que la suite (u_n) converge.

Partie B :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. **a.** Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.

b. Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 1$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}$.

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Partie C :

On considère l'algorithme ci-contre.

1. Après exécution de l'algorithme, quelle valeur est contenue dans la variable n ?

2. À l'aide des parties A et B, interpréter cette valeur.

```
u ← 5
n ← 0
Tant que u ⩾ 1,01
    n ← n + 1
    u ← 3 − 10/(u + 4)
Fin du Tant que
```

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A :

Soient a et b deux entiers naturels tels que $a > b$.

1. Démontrer que $\text{PGCD}(a,\ b) = \text{PGCD}(a - b,\ b)$.

2. En utilisant l'égalité précédente, calculer $\text{PGCD}\left(4^3 - 1,\ 4^2 - 1\right)$.

3. Compléter l'algorithme fourni en annexe de telle sorte qu'après exécution, la variable A contienne $\text{PGCD}\left(4^3 - 1,\ 4^2 - 1\right)$.

Partie B :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n.$$

On admettra que pour tout entier naturel n non nul, u_n est un entier naturel non nul.
On note $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$ où A est une matrice carrée d'ordre 2 dont on précisera les coefficients.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que P est inversible et donner P^{-1}.

b. Vérifier que $P^{-1}AP$ est la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Soit un entier naturel n non nul. Calculer les coefficients de la matrice A^n.

5. On admettra que pour tout entier naturel n non nul, $V_n = A^nV_0$.
Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times 4^n$.

6. **a.** Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

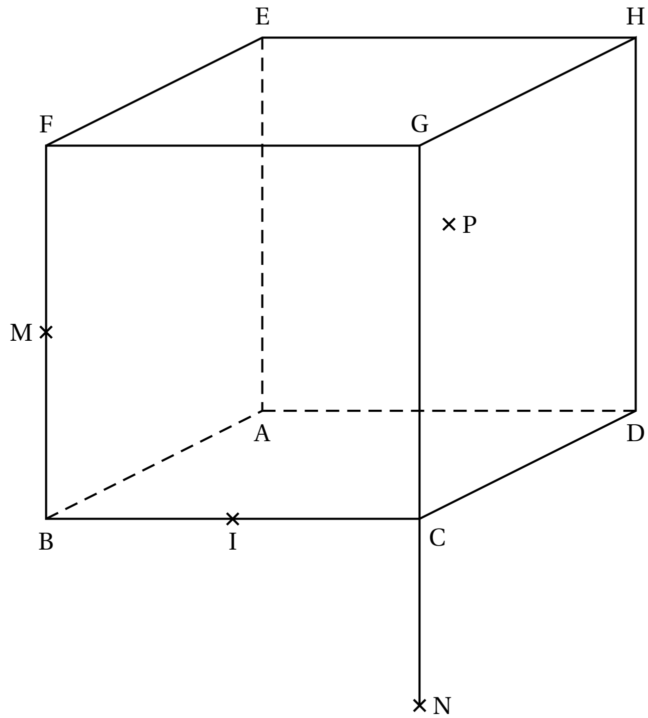
b. En déduire $\text{PGCD}(u_{n+1},\ u_n)$ pour tout entier naturel n.

c. Déterminer pour tout entier naturel n, $\text{PGCD}\left(4^{n+1} - 1,\ 4^n - 1\right)$.

ANNEXE

À compléter et à remettre avec la copie

EXERCICE 3



EXERCICE 4

$A \leftarrow 4^3 - 1$
$B \leftarrow 4^2 - 1$
Tant que . . . . . . :
    Si $A > B$, alors :
        $A \leftarrow \dots$
    Sinon :
        $B \leftarrow \dots$
    Fin Si
Fin Tant que

Sommaire   Index

Baccalauréat S – Nouvelle Calédonie 26 novembre 2019

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise est spécialisée dans la vente de carrelage.

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Partie A

On suppose dans cette partie que l'entreprise vend des lots de carrelage contenant 25 % de carreaux avec motif et 75 % de carreaux blancs.
Lors d'un contrôle qualité on observe que :

[label=•]2,25 % des carreaux sont fissurés ; 6 % des carreaux avec motif sont fissurés.

On prélève au hasard un carreau.
On note M l'évènement « le carreau a un motif » et F l'évènement « le carreau est fissuré ».

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. On sait que le carreau prélevé est fissuré.
   Démontrer que la probabilité qu'il s'agisse d'un carreau avec motif est $\dfrac{2}{3}$
3. Calculer $P_{\overline{M}}(F)$, probabilité de F sachant $\overline{M}$.

Partie B

On modélise l'épaisseur en millimètre d'un carreau pris au hasard par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart type σ.
Un carreau est commercialisable si son épaisseur mesure entre 10,1 mm et 11,9 mm.
On sait que 99 % des carreaux sont commercialisables.

1. Démontrer que $P(X < 10,1) = 0,005$.
2. On introduit la variable aléatoire Z telle que

$$Z = \frac{X - 11}{\sigma}.$$

   a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire Z.

   b. Démontrer que $P\left(Z \leqslant -\frac{0,9}{\sigma}\right) = 0,005$.

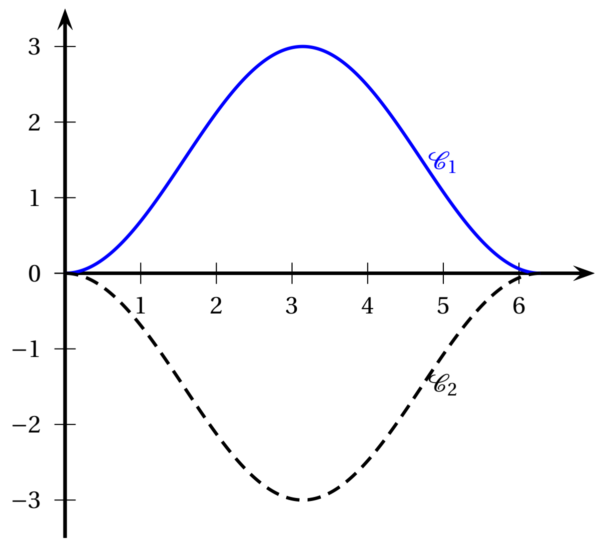
   c. En déduire la valeur de σ arrondie au centième.

Partie C

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ 2\pi]$ par

$$f(x) = -1,5\cos(x) + 1,5$$

On admet que la fonction f est continue sur $[0\ ;\ 2\pi]$.
On note $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.



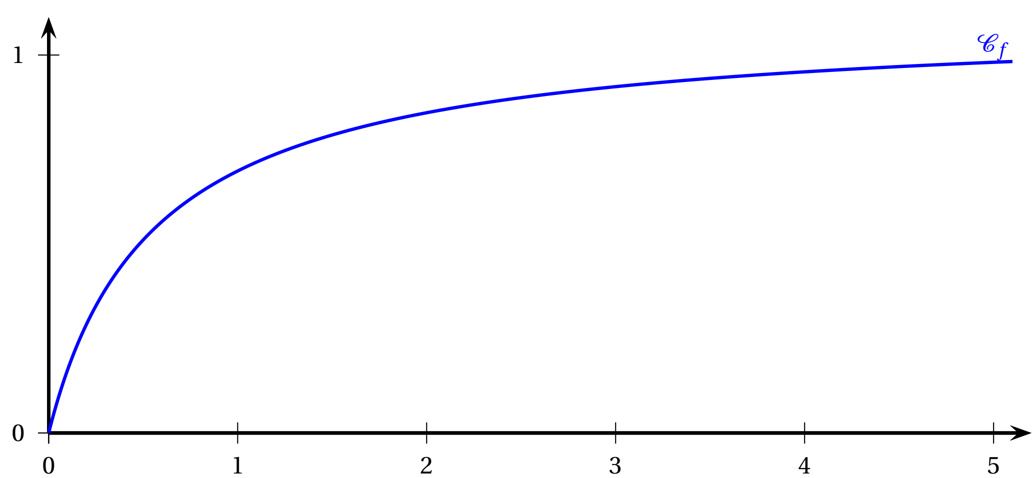
1. Démontrer que la fonction f est positive sur $[0\ ;\ 2\pi]$.
2. Sur la figure ci-dessus, la courbe tracée en tiretés, notée $\mathcal{C}_2$, est la courbe symétrique de $\mathcal{C}_1$ par rapport à l'axe des abscisses.
   La forme d'un carreau est celle de la zone délimitée par les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
   On note $\mathcal{A}$ son aire, exprimée en unité d'aire.
   Calculer $\mathcal{A}$.

Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



Partie A

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.
2. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul,

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$$

   b. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Partie C

On note ℓ la limite de la suite (u_n). On admet que $f(\ell) = \ell$.

L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ.
On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0~;~+\infty[$ où
$x_0 = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0,215$ et $g\left(x_0\right) \approx 0,088$, en arrondissant à 10^{-3}.

x	0	x_0	$+\infty$
Variations de la fonction g	0 $\nearrow$	$g(x_0)$	$\searrow$ $-\infty$

1. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α.
2.
   a. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à $0,01$ près.

   b. Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

```
x ← 0,22
Tant que ......... faire
        x ← x + 0,01
Fin de Tant que
```

3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n).

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Soit ABCDEFGH un cube et I le centre du carré ADHE, c'est-à-dire, le milieu du segment [AH] et du segment [ED]. Soit J un point du segment [CG].
La section du cube ABCDEFGH par le plan (FIJ) est le quadrilatère FKLJ.

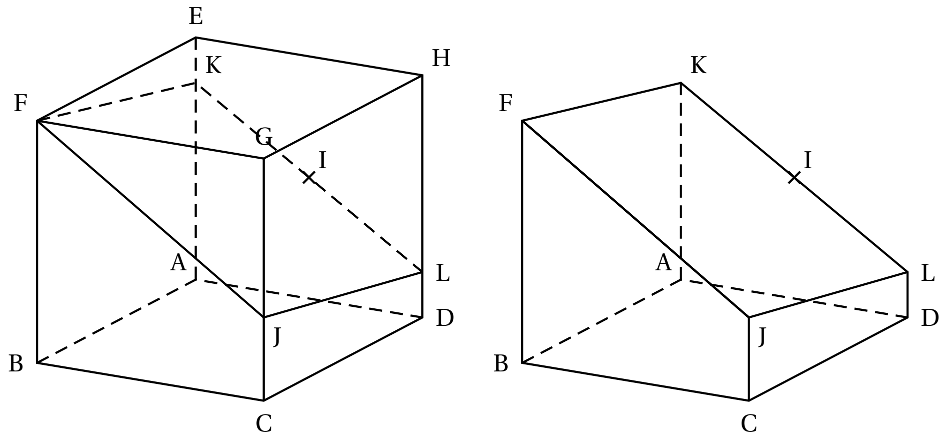


Figure 1 Figure 2

On se place dans le repère orthonormé $\left(A~;~\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
On a donc A$(0~;~0~;~0)$, B$(1~;~0~;~0)$, D$(0~;~1~;~0)$ et E$(0~;~0~;~1)$.
Les parties A *et* B *peuvent être traitées de manière indépendante.*

Partie A

Dans cette partie, le point J a pour coordonnées $\left(1~;~1~;~\dfrac{2}{5}\right)$

1. Démontrer que les coordonnées du point I sont $\left(0~;~\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{1}{2}\right)$.

a. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FIJ).

b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est

$$-x+3y+5z-4=0.$$

2. Soit d la droite orthogonale au plan (FIJ) et passant par B.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b. On note M le point d'intersection de la droite d et du plan (FIJ).

Démontrer que M $\left(\dfrac{6}{7}~;~\dfrac{3}{7}~;~\dfrac{5}{7}\right)$.

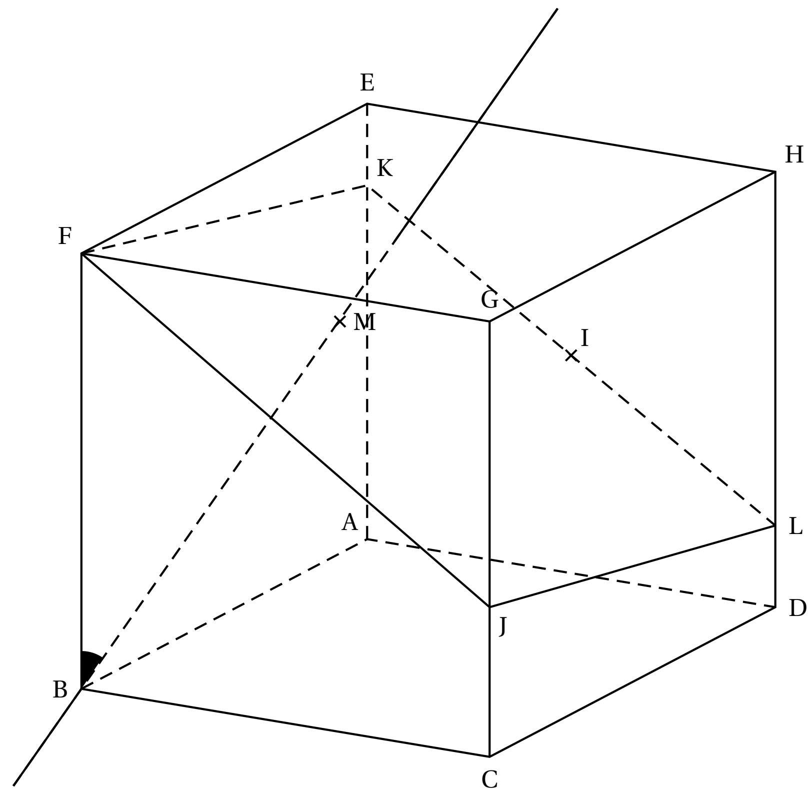


Figure 1

3. **a.** Calculer $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BF}$.

   b. En déduire une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{MBF}$.

Partie B

Dans cette partie, J est un point quelconque du segment [CG].
Ses coordonnées sont donc $(1\ ;\ 1\ ;\ a)$, où a est un réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. Montrer que la section du cube par le plan (FIJ) est un parallélogramme.
2. On admet alors que L a pour coordonnées $\left(0\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{a}{2}\right)$.
   Pour quelle(s) valeur(s) de a le quadrilatère FKLJ est-il un losange ?

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

On considère l'équation (E) :

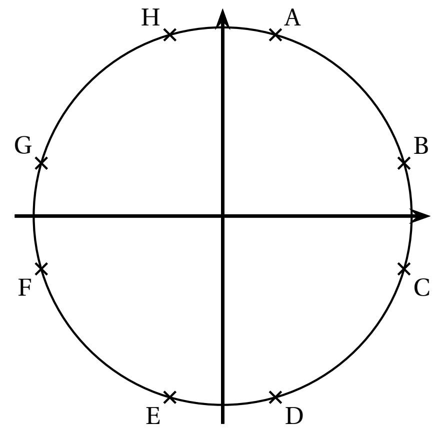
$$25z^2 - 14z + 25 = 0.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On écrira les solutions sous forme algébrique.

2. Démontrer que les solutions de (E) sont de module 1.
3. On note α le réel de l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$\cos\alpha = \frac{7}{25} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \frac{24}{25}.$$

   Écrire les solutions de (E) sous forme exponentielle en fonction de α.
4. La figure ci-contre fait apparaître huit points du cercle unité. Deux de ces huit points ont une affixe solution de l'équation (E). Lesquels ?



Partie B

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Affirmation A** :

$$\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2019} = 1.$$

2. Soit z le nombre complexe $\frac{1}{6}(2+5\mathrm{i})$.
   Affirmation B :

$$\lim_{n\to+\infty} |z|^n = 0.$$

3. On rappelle que, pour tout nombre réel x,

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

   Affirmation C :
   Pour tout nombre réel a de $[-\pi\,;\,0]$ tel que $\cos(2a) = \frac{7}{25}$, on a $\sin(a) = -\frac{3}{5}$.

Exercice 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par

$$a_n = \frac{4^{2n+1}+1}{5}.$$

1. Calculer a_2 et a_3.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 16a_n - 3$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, a_n est un nombre entier naturel.
4. Dans cette question on utilise l'égalité de la question **2.** afin de démontrer plusieurs propriétés des termes de la suite (a_n).
   a. Pour tout entier naturel n, on note d_n le plus grand diviseur commun de a_n et a_{n+1}.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n, d_n est égal à 1 ou à 3.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} \equiv a_n\ [3]$.
   c. Vérifier que $a_0 \equiv 1\ [3]$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, le nombre a_n n'est pas divisible par 3.
   d. Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

5. L'objectif de cette question est de démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le nombre a_n n'est pas premier.
On pose, pour tout entier naturel n,

$$b_n = 2^{n+1}\left(2^n - 1\right) + 1 \quad \text{et} \quad c_n = 2^{n+1}\left(2^n + 1\right) + 1.$$

On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$5a_n = b_n c_n.$$

a. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$5 \text{ divise } b_n \quad \text{ou} \quad 5 \text{ divise } c_n.$$

b. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que $b_n > 5$ et $c_n > 5$.

c. En déduire que a_n n'est pas un nombre premier.

Baccalauréat S Pondichéry 4 mai 2018

EXERCICE 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A *et* B *peuvent être traitées de façon indépendante.*

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.

On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.

La température du four est exprimée en degré Celsius (° C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70° C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

Partie A

Pour un nombre entier naturel n, on note T_n la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc $T_0 = 1\,000$.
La température T_n est calculée par l'algorithme suivant :

```
T ← 1000
Pour i allant de 1 à n
        T ← 0,82 × T + 3,6
Fin Pour
```

1. Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement.
2. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$.
3. Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

Partie B

Dans cette partie, on note t le temps (en heure) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.
La température du four (en degré Celsius) à l'instant t est donnée par la fonction f définie, pour tout nombre réel t positif, par :

$$f(t) = a\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + b,$$

où a et b sont deux nombres réels.
On admet que f vérifie la relation suivante : $f'(t) + \dfrac{1}{5}f(t) = 4$.

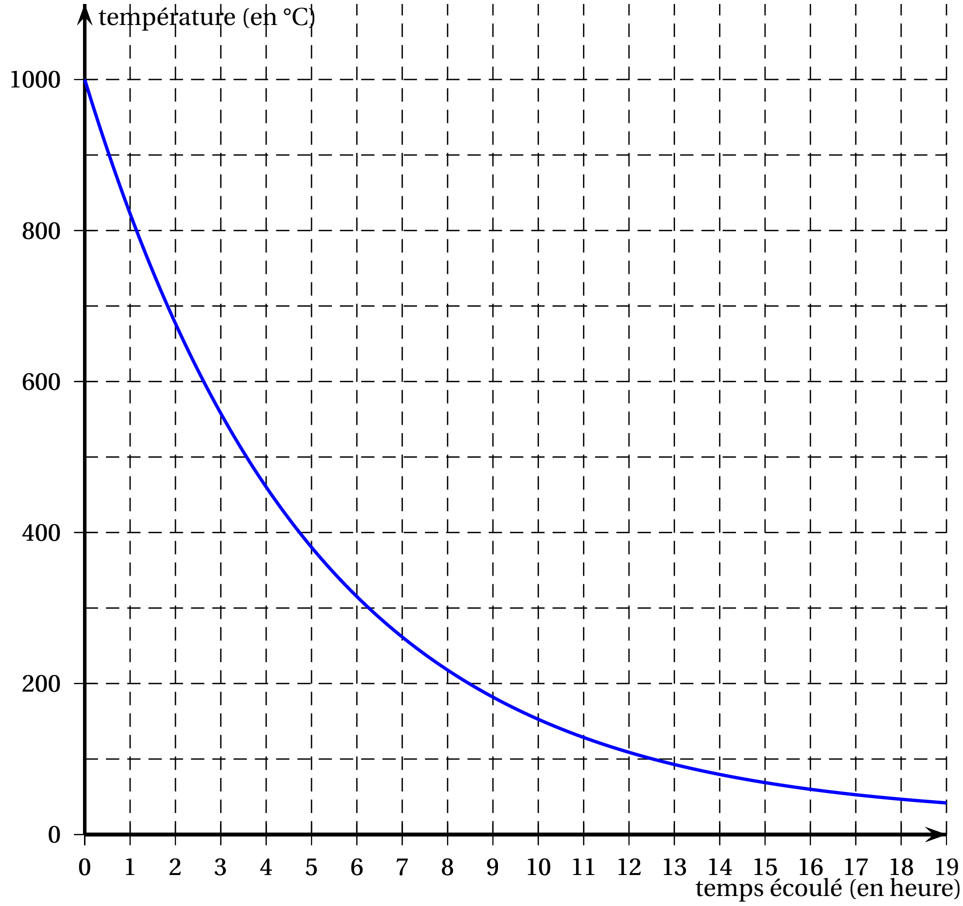
1. Déterminer les valeurs de a et b sachant qu'initialement, la température du four est de 1 000 °C, c'est-à-dire que $f(0) = 1\,000$.
2. Pour la suite, on admet que, pour tout nombre réel positif t :

$$f(t) = 980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20.$$

   a. Déterminer la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f sur $[0~;~+\infty[$.
   En déduire son tableau de variations complet.
   c. Avec ce modèle, après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

3. La température moyenne (en degré Celsius) du four entre deux instants t_1 et t_2 est donnée par : $\dfrac{1}{t_2 - t_1}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   a. À l'aide de la représentation graphique de f ci-dessous, donner une estimation de la température moyenne θ du four sur les 15 premières heures de refroidissement.
   Expliquer votre démarche.



b. Calculer la valeur exacte de cette température moyenne θ et en donner la valeur arrondie au degré Celsius.

4. Dans cette question, on s'intéresse à l'abaissement de température (en degré Celsius) du four au cours d'une heure, soit entre deux instants t et $(t+1)$. Cet abaissement est donné par la fonction d définie, pour tout nombre réel t positif, par : $d(t) = f(t) - f(t+1)$.

a. Vérifier que. pour tout nombre réel t positif : $d(t) = 980\left(1 - \text{e}^{-\frac{1}{5}}\right)\text{e}^{-\frac{t}{5}}$.

b. Déterminer la limite de $d(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
Quelle interprétation peut-on en donner ?

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a = -4$, $b = 2$ et $c = 4$.

1. On considère les trois points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = \text{j}a$, $b' = \text{j}b$ et $c' = \text{j}c$ où j est le nombre complexe $-\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

a. Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle de j.
En déduire les formes algébriques et exponentielles de a', b' et c'.

b. Les points A, B et C ainsi que les cercles de centre O et de rayon 2, 3 et 4 sont représentés sur le graphique fourni en **Annexe**.
Placer les points A′, B′ et C′ sur ce graphique.

2. Montrer que les points A′, B′ et C′ sont alignés.

3. On note M le milieu du segment [A′C], N le milieu du segment [C′C] et P le milieu du segment [C′A].
Démontrer que le triangle MNP est isocèle.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise conditionne du sucre blanc provenant de deux exploitations U et V en paquets de 1 kg et de différentes qualités.

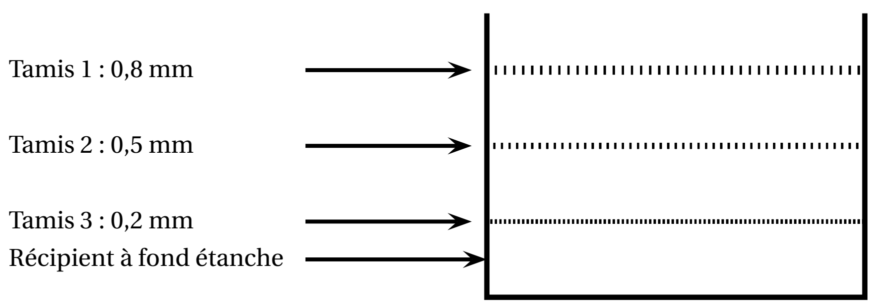
Le sucre extra fin est conditionné séparément dans des paquets portant le label « extra fin ».

Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

Partie A

Pour calibrer le sucre en fonction de la taille de ses cristaux, on le fait passer au travers d'une série de trois tamis positionnés les uns au-dessus des autres et posés sur un récipient à fond étanche. Les ouvertures des mailles sont les suivantes :



Les cristaux de sucre dont la taille est inférieure à 0,2 mm se trouvent dans le récipient à fond étanche à la fin du calibrage. Ils seront conditionnés dans des paquets portant le label « sucre extra fin ».

1. On prélève au hasard un cristal de sucre de l'exploitation U. La taille de ce cristal, exprimée en millimètre, est modélisée par la variable aléatoire X_{U} qui suit la loi normale de moyenne $\mu_{\text{U}} = 0,58$ mm et d'écart type $\sigma_{\text{U}} = 0,21$ mm.

a. Calculer les probabilités des évènements suivants : $X_{\text{U}} < 0,2$ et $0,5 \leqslant X_{\text{U}} < 0,8$.

b. On fait passer 1 800 grammes de sucre provenant de l'exploitation U au travers de la série de tamis.
Déduire de la question précédente une estimation de la masse de sucre récupérée dans le récipient à fond étanche et une estimation de la masse de sucre récupérée dans le tamis 2.

2. On prélève au hasard un cristal de sucre de l'exploitation V. La taille de ce cristal, exprimée en millimètre, est modélisée par la variable aléatoire X_{V} qui suit la loi normale de moyenne $\mu_{\text{V}} = 0,65$ mm et d'écart type σ_{V} à déterminer.
Lors du calibrage d'une grande quantité de cristaux de sucre provenant de l'exploitation V, on constate que 40 % de ces cristaux se retrouvent dans le tamis 2.
Quelle est la valeur de l'écart type σ_{V} de la variable aléatoire X_{V} ?

Partie B

Dans cette partie, on admet que 3 % du sucre provenant de l'exploitation U est extra fin et que 5 % du sucre provenant de l'exploitation V est extra fin.
On prélève au hasard un paquet de sucre dans la production de l'entreprise et, dans un souci de traçabilité, on s'intéresse à la provenance de ce paquet.
On considère les évènements suivants :

- U : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation U » ;
- V : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation V » ;
- E : « Le paquet porte le label "extra fin" ».

1. Dans cette question, on admet que l'entreprise fabrique 30 % de ses paquets avec du sucre provenant de l'exploitation U et les autres avec du sucre provenant de l'exploitation V, sans mélanger les sucres des deux exploitations.

a. Quelle est la probabilité que le paquet prélevé porte le label « extra fin » ?

b. Sachant qu'un paquet porte le label « extra fin », quelle est la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U ?

2. L'entreprise souhaite modifier son approvisionnement auprès des deux exploitations afin que parmi les paquets portant le label « extra fin », 30 % d'entre eux contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

Comment doit-elle s'approvisionner auprès des exploitations U et V ?

Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.

Partie C

1. L'entreprise annonce que 30 % des paquets de sucre portant le label «extra fin» qu'elle conditionne contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

Avant de valider une commande, un acheteur veut vérifier cette proportion annoncée. Il prélève 150 paquets pris au hasard dans la production de paquets labellisés « extra fin » de l'entreprise. Parmi ces paquets, 30 contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

A-t-il des raisons de remettre en question l'annonce de l'entreprise ?

2. L'année suivante, l'entreprise déclare avoir modifié sa production. L'acheteur souhaite estimer la nouvelle proportion de paquets de sucre provenant de l'exploitation U parmi les paquets portant le label « extra fin ».

Il prélève 150 paquets pris au hasard dans la production de paquets labellisés « extra fin » de l'entreprise. Parmi ces paquets 42 % contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, de la nouvelle proportion de paquets labellisés « extra fin » contenant du sucre provenant de l'exploitation U.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(2 ; 1 ; 4)$, $(4 ; -1 ; 0)$, $(0 ; 3 ; 2)$ et $(4 ; 3 ; -2)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

2. Soit M un point de la droite (CD).

a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

b. On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées $(3 ; 3 ; -1)$. Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

c. Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2.

3. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).

d. Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{8}{3}\right)$.

4. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

À toute lettre de l'alphabet on associe un nombre entier x compris entre 0 et 25 comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
x	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Le « chiffre de RABIN » est un dispositif de cryptage asymétrique inventé en 1979 par l'informaticien Michael Rabin.

Alice veut communiquer de manière sécurisée en utilisant ce cryptosystème. Elle choisit deux nombres premiers distincts p et q. Ce couple de nombres est sa clé privée qu'elle garde secrète.
Elle calcule ensuite $n = p \times q$ et elle choisit un nombre entier naturel B tel que $0 \leqslant B \leqslant n-1$.
Si Bob veut envoyer un message secret à Alice, il le code lettre par lettre.
Le codage d'une lettre représentée par le nombre entier x est le nombre y tel que :

$$y \equiv x(x+B)\ [n] \text{ avec } 0 \leqslant y \leqslant n.$$

Dans tout l'exercice on prend $p = 3$, $q = 11$ donc $n = p \times q = 33$ et $B = 13$.

Partie A : Cryptage

Bob veut envoyer le mot « NO » à Alice.

1. Montrer que Bob code la lettre « N » avec le nombre 8.

2. Déterminer le nombre qui code la lettre « O ».

Partie B : Décryptage

Alice a reçu un message crypté qui commence par le nombre 3.
Pour décoder ce premier nombre, elle doit déterminer le nombre entier x tel que :

$$x(x+13) \equiv 3\ [33] \text{ avec } 0 \leqslant x < 26.$$

1. Montrer que $x(x+13) \equiv 3\ [33]$ équivaut à $(x+23)^2 \equiv 4\ [33]$.

2. a. Montrer que si $(x+23)^2 \equiv 4\ [33]$ alors le système d'équations $\left\{\begin{array}{lcl}(x+23)^2 & \equiv & 4\ [3]\\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right.$ est vérifié.

b. Réciproquement, montrer que si $\left\{\begin{array}{lcl}(x+23)^2 & \equiv & 4\ [3]\\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right.$ alors $(x+23)^2 \equiv 4\ [33]$.

c. En déduire que $x(x+13) \equiv 3\ [33] \iff \left\{\begin{array}{lcl}(x+23)^2 & \equiv & 1\ [3]\\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right.$

3. a. Déterminer les nombres entiers naturels a tels que $0 \leqslant a < 3$ et $a^2 \equiv 1\ [3]$.

b. Déterminer les nombres entiers naturels b tels que $0 \leqslant b < 11$ et $b^2 \equiv 4\ [11]$.

4. a. En déduire que $x(x+13) \equiv 3 \quad [33]$ équivaut aux quatre systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{lcll}x & \equiv & 2 & [3]\\ x & \equiv & 8 & [11]\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcll}x & \equiv & 0 & [3]\\ x & \equiv & 1 & [11]\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcll}x & \equiv & 2 & [3]\\ x & \equiv & 1 & [11]\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcll}x & \equiv & 0 & [3]\\ x & \equiv & 8 & [11]\end{array}\right.$$

b. On admet que chacun de ces systèmes admet une unique solution entière x telle que $0 \leqslant x < 33$.
Déterminer, sans justification, chacune de ces solutions.

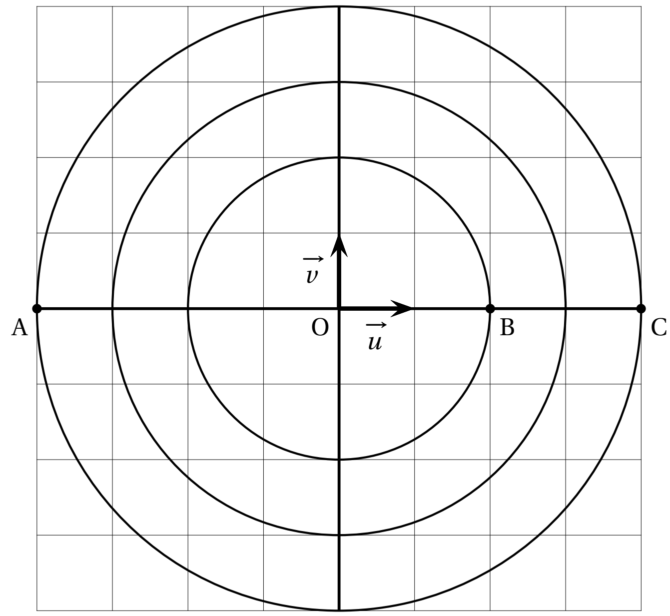
5. Compléter l'algorithme en **Annexe** pour qu'il affiche les quatre solutions trouvées dans la question précédente.

6. Alice peut-elle connaître la première lettre du message envoyé par Bob ?
Le « chiffre de RABIN » est-il utilisable pour décoder un message lettre par lettre ?

ANNEXE

À COMPLÉTER ET À REMETTRE AVEC LA COPIE

EXERCICE 2



EXERCICE 4 (spécialité)

```
Pour ...... allant de ......à .......
   Si le reste de la division de ....... par ....... est égal à ....... alors
      Afficher .......
   Fin Si
Fin Pour
```

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Liban 29 mai 2018

Exercice 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Les quinze jours précédant la rentrée universitaire, le standard téléphonique d'une mutuelle étudiante enregistre un nombre record d'appels.
Les appelants sont d'abord mis en attente et entendent une musique d'ambiance et un message préenregistré.
Lors de cette première phase, le temps d'attente, exprimé en secondes, est modélisé par la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,02\ \text{s}^{-1}$.
Les appelants sont ensuite mis en relation avec un chargé de clientèle qui répond à leurs questions.
Le temps d'échange, exprimé en secondes, lors de cette deuxième phase est modélisé par la variable aléatoire Y, exprimée en secondes, qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 96$ s et d'écart-type $\sigma = 26$ s.

1. Quelle est la durée totale moyenne d'un appel au standard téléphonique (temps d'attente et temps d'échange avec le chargé de clientèle) ?
2. Un étudiant est choisi au hasard parmi les appelants du standard téléphonique.
   a. Calculer la probabilité que l'étudiant soit mis en attente plus de 2 minutes.
   b. Calculer la probabilité pour que le temps d'échange avec le conseiller soit inférieur à 90 secondes.
3. Une étudiante, choisie au hasard parmi les appelants, attend depuis plus d'une minute d'être mise en relation avec le service clientèle. Lasse, elle raccroche et recompose le numéro. Elle espère attendre moins de trente secondes cette fois-ci.
   Le fait de raccrocher puis de rappeler augmente-t-il ses chances de limiter à 30 secondes l'attente supplémentaire ou bien aurait-elle mieux fait de rester en ligne ?

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. Donner les formes exponentielle et trigonométrique des nombres complexes $1 + \text{i}$ et $1 - \text{i}$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose
$$S_n = (1 + \text{i})^n + (1 - \text{i})^n.$$
   a. Déterminer la forme trigonométrique de S_n.
   b. *Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.*
   Affirmation A : Pour tout entier naturel n, le nombre complexe S_n est un nombre réel.
   Affirmation B : Il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n = 0$.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'objectif de cet exercice est d'étudier les trajectoires de deux sous-marins en phase de plongée.
On considère que ces sous-marins se déplacent en ligne droite, chacun à vitesse constante.
À chaque instant t, exprimé en minutes, le premier sous-marin est repéré par le point $S_1(t)$ et le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$ dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ dont l'unité est le mètre.
Le plan défini par $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ représente la surface de la mer. La cote z est nulle au niveau de la mer, négative sous l'eau.

1. On admet que, pour tout réel $t \geqslant 0$, le point $S_1(t)$ a pour coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x(t) & = & 140 - 60t \\ y(t) & = & 105 - 90t \\ z(t) & = & -170 - 30t \end{array}\right.$$

a. Donner les coordonnées du sous- marin au début de l'observation.

b. Quelle est la vitesse du sous-marin ?

c. On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin.
Déterminer l'angle α que forme la trajectoire du sous-marin avec le plan horizontal.
On donnera l'arrondi de α à 0, 1 degré près.

2. Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées $(68\ ;\ 135\ ;\ -68)$ et atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées $(-202\ ;\ -405\ ;\ -248)$ avec une vitesse constante.
À quel instant t, exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?

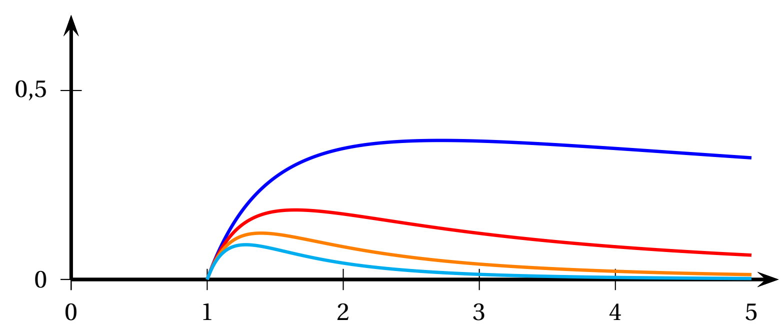
EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[1 ; 5]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}.$$

. Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathcal{C}_n$ pour n appartenant à $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1 ; 5]$:

$$f_n'(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}.$$

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1 ; 5]$.
On note A_n le point de la courbe $\mathcal{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.
Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}\ln(x).$$

3. **a.** Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;5]$:

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

b. Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$$

c. Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface sous la courbe f_n, c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe $\mathscr{C}_n$.
Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 5 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'évènement « la n^{e} partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet évènement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.
3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	0,25	0,437 5	0,390 6	0,402 3	0,399 4	0,400 1	0,399 9

Quelle conjecture peut-on émettre ?

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
   c. La suite $\left(p_n\right)$ converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.

EXERCICE 5 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit la suite de réels (a_n) par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & 1 \\ a_{n+1} & = & a_n + a_{n-1} \text{ pour } n \geqslant 1. \end{array}\right.$$

On appelle cette suite la suite de Fibonacci.

1. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution la variable A contienne le terme a_n.

```
A ← 0
B ← 1
Pour i allant de 2 à n :
    C ← A + B
    A ← …
    B ← …
Fin Pour
```

On obtient ainsi les premières valeurs de la suite a_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$.

Calculer A^2, A^3 et A^4.

Vérifier que $A^5 = \begin{pmatrix}8 & 5\\5 & 3\end{pmatrix}$.

3. On peut démontrer, et nous admettrons, que pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix}a_{n+1} & a_n\\a_n & a_{n-1}\end{pmatrix}.$$

a. Soit p et q deux entiers naturels non nuls. Calculer le produit $A^p \times A^q$ et en déduire que

$$a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q.$$

b. En déduire que si un entier r divise les entiers a_p et a_q, alors r divise également a_{p+q}.

c. Soit p un entier naturel non nul.
Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n non nul, a_p divise a_{np}.

4. a. Soit n un entier supérieur ou égal à 5. Montrer que si n est un entier naturel qui n'est pas premier, alors a_n n'est pas un nombre premier.

b. On peut calculer $a_{19} = 4\,181 = 37 \times 113$.
Que penser de la réciproque de la propriété obtenue dans la question 4. a. ?

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Nord 29 mai 2018

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

On étudie certaines caractéristiques d'un supermarché d'une petite ville.

Partie A - Démonstration préliminaire

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,2$.
On rappelle que l'espérance de la variable aléatoire X, notée $E(X)$, est égale à :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x 0,2t\mathrm{e}^{-0,2t}\,\mathrm{d}t.$$

Le but de cette partie est de démontrer que $E(X) = 5$.

1. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $g(t) = 0,2t\mathrm{e}^{-0,2t}$.
On définit la fonction G sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $G(t) = (-t-5)\mathrm{e}^{-0,2t}$.
Vérifier que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
2. En déduire que la valeur exacte de $E(X)$ est 5.
Indication : on pourra utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant :

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-0,2x} = 0.$$

Partie B - Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

Une étude commandée par le gérant du supermarché permet de modéliser la durée, exprimée en minutes, passée dans le supermarché par un client choisi au hasard par une variable aléatoire T.
Cette variable T suit une loi normale d'espérance 40 minutes et d'écart type un réel positif noté σ.
Grâce à cette étude, on estime que $P(T < 10) = 0,067$.

1. Déterminer une valeur arrondie du réel σ à la seconde près.
2. Dans cette question, on prend $\sigma = 20$ minutes. Quelle est alors la proportion de clients qui passent plus d'une heure dans le supermarché ?

Partie C - Durée d'attente pour le paiement

Ce supermarché laisse le choix au client d'utiliser seul des bornes automatiques de paiement ou bien de passer par une caisse gérée par un opérateur.

1. La durée d'attente à une borne automatique, exprimée en minutes, est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,2~\text{min}^{-1}$.
   a. Donner la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement.
   b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes.
2. L'étude commandée par le gérant conduit à la modélisation suivante :
   - parmi les clients ayant choisi de passer à une borne automatique, 86 % attendent moins de 10 minutes ;
   - parmi les clients passant en caisse, 63 % attendent moins de 10 minutes.

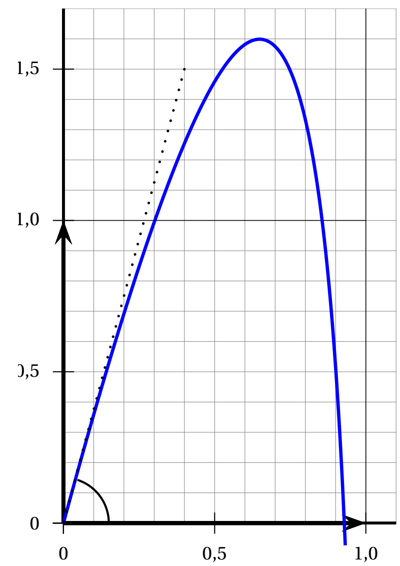
   On choisit un client du magasin au hasard et on définit les évènements suivants :
   B : « le client paye à une borne automatique » ;
   $\overline{B}$: « le client paye à une caisse avec opérateur » ;
   S : « la durée d'attente du client lors du paiement est inférieure à 10 minutes ».
   Une attente supérieure à dix minutes à une caisse avec opérateur ou à une borne automatique engendre chez le client une perception négative du magasin. Le gérant souhaite que plus de 75 % des clients attendent moins de 10 minutes.
   Quelle est la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint ?

Partie D - Bons d'achat

Lors du paiement, des cartes à gratter, gagnantes ou perdantes, sont distribuées aux clients. Le nombre de cartes distribuées dépend du montant des achats. Chaque client a droit à une carte à gratter par tranche de 10 € d'achats.
Par exemple, si le montant des achats est 58,64 €, alors le client obtient 5 cartes ; si le montant est 124,31 €, le client obtient 12 cartes.
Les cartes gagnantes représentent 0,5 % de l'ensemble du stock de cartes. De plus, ce stock est suffisamment grand pour assimiler la distribution d'une carte à un tirage avec remise.

1. Un client effectue des achats pour un montant de 158,02 €.
   Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il obtienne au moins une carte gagnante ?
2. À partir de quel montant d'achats, arrondi à 10 €, la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante est-elle supérieure à 50 % ?

Exercice 2 **4 points**
Commun à tous les candidats



Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.
Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.
On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1-x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1[$. On note f' sa fonction dérivée.
   On admet que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ et que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1[$:
   $$f'(x) = \frac{-bx+b-2}{1-x}.$$
   Montrer que le maximum de la fonction f est égal à $b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.
2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.
3. Dans cette question, on choisit $b = 5,69$.
   L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.
   Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

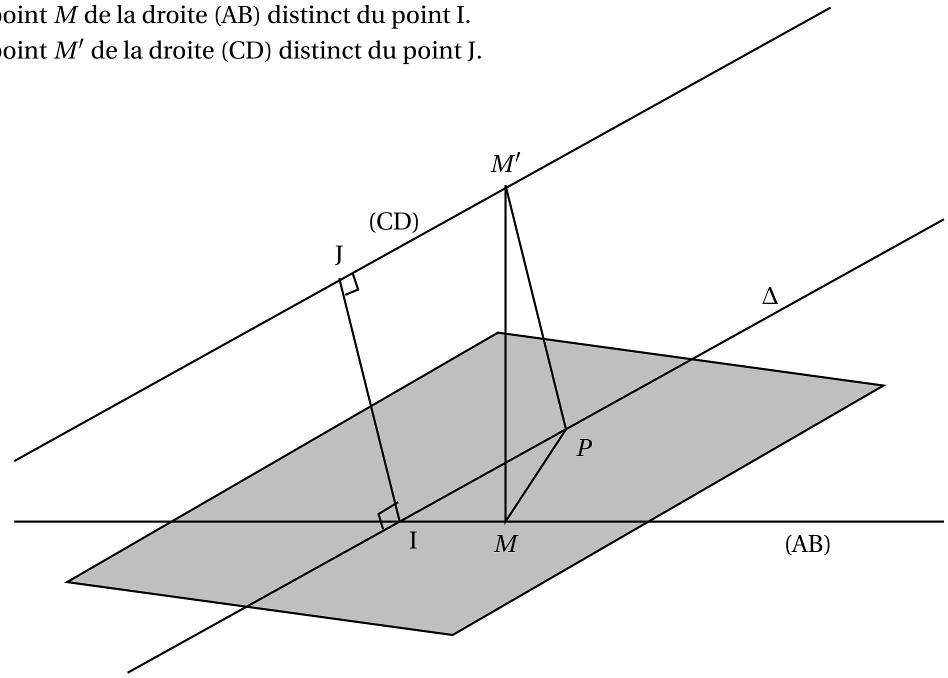
Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point A.
On considère les points B(10 ; −8 ; 2), C(−1 ; −8 ; 5) et D(14 ; 4 ; 8).

1. **a.** Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD).
   b. Vérifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.
2. On considère le point I de la droite (AB) d'abscisse 5 et le point J de la droite (CD) d'abscisse 4.
   a. Déterminer les coordonnées des points I et J et en déduire la distance IJ.

b. Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).
La droite (IJ) est appelée perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).

3. Cette question a pour but de vérifier que la distance IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD).
Sur le schéma ci -dessous on a représenté les droites (AB) et (CD), les points I et J, et la droite Δ parallèle à la droite (CD) passant par I.
On considère un point M de la droite (AB) distinct du point I.
On considère un point M' de la droite (CD) distinct du point J.



a. Justifier que la parallèle à la droite (IJ) passant par le point M' coupe la droite Δ en un point que l'on notera P.

b. Démontrer que le triangle MPM' est rectangle en P.

c. Justifier que $MM' > IJ$ et conclure.

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les deux graphiques donnés en annexe seront à compléter et à rendre avec la copie

Un scooter radio commandé se déplace en ligne droite à la vitesse constante de 1 m.s^{-1}. Il est poursuivi par un chien qui se déplace à la même vitesse.
On représente la situation vue de dessus dans un repère orthonormé du plan d'unité 1 mètre. L'origine de ce repère est la position initiale du chien. Le scooter est représenté par un point appartenant à la droite d'équation $x = 5$. Il se déplace sur cette droite dans le sens des ordonnées croissantes.

Dans la suite de l'exercice, on étudie deux modélisations différentes de la trajectoire du chien.

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

La situation est représentée par le graphique n° 1 donné en annexe.
À l'instant initial, le scooter est représenté par le point S_0. Le chien qui le poursuit est représenté par le point M_0. On considère qu'à chaque seconde, le chien s'oriente instantanément en direction du scooter et se déplace en ligne droite sur une distance de 1 mètre.
Ainsi, à l'instant initial, le chien s'oriente en direction du point S_0, et une seconde plus tard il se trouve un mètre plus loin au point M_1. À cet instant, le scooter est au point S_1. Le chien s'oriente en direction de S_1 et se déplace en ligne droite en parcourant 1 mètre, et ainsi de suite.
On modélise alors les trajectoires du chien et du scooter par deux suites de points notées (M_n) et (S_n).
Au bout de n secondes, les coordonnées du point S_n sont $(5~;~n)$. On note $\left(x_n~;~y_n\right)$ les coordonnées du point M_n.

1. Construire sur le graphique n° 1 donné en annexe les points M_2 et M_3.

2. On note d_n la distance entre le chien et le scooter n secondes après le début de la poursuite.
On a donc $d_n = M_nS_n$.
Calculer d_0 et d_1.

3. Justifier que le point M_2 a pour coordonnées $\left(1+\dfrac{4}{\sqrt{17}}\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

4. On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x_{n+1} & = & x_n + \dfrac{5-x_n}{d_n} \\ y_{n+1} & = & y_n + \dfrac{n-y_n}{d_n} \end{array}\right.$$

a. Le tableau ci-dessous, obtenu à l'aide d'un tableur, donne les coordonnées des points M_n et S_n ainsi que la distance d_n en fonction de n. Quelles formules doit-on écrire dans les cellules C5 et F5 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes C et F ?

	A	B	C	D	E	F
1	n	M_n		S_n		d_n
2		x_n	y_n	5	n	
3	0	0	0	5	0	5
4	1	1	0	5	1	4,123 105 63
5	2	1,970 142 5	0,242 535 63	5	2	3,502 672 91
6	3	2,835 155 47	0,744 285 12	5	3	3,126 467 89
7	4	3,527 580 47	1,465 774 98	5	4	2,930 924 04
...	...	...	...	...	...	...
28	24	4,999 797 51	21,226 834 2	5	24	2,773 165 8
29	25	4,999 870 53	22,226 834 2	5	25	2,773 165 8

b. On admet que la suite (d_n) est strictement décroissante.
Justifier que cette suite est convergente et conjecturer sa limite à l'aide du tableau.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

On modélise maintenant la trajectoire du chien à l'aide de la courbe $\mathscr{F}$ de la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;5[$ par :

$$f(x) = -2,5\ln(1-0,2x) - 0,5x + 0,05x^2.$$

Cela signifie que le chien se déplace sur la courbe $\mathscr{F}$ de la fonction f.

1. Lorsque le chien se trouve au point M de coordonnées $(x\,;\,f(x))$ de la courbe $\mathscr{F}$, où x appartient à l'intervalle $[0\,;5[$, le scooter se trouve au point S, d'ordonnée notée y_S. Ainsi le point S a pour coordonnées $(5\,;\,y_S)$. La tangente à la courbe $\mathscr{F}$ au point M passe par le point S. Cela traduit le fait que le chien s'oriente toujours en direction du scooter. On note $d(x)$ la distance MS entre le chien et le scooter lorsque M a pour abscisse x.

a. Sur le graphique nº 2 donné en annexe, construire, sans calcul, le point S donnant la position du scooter lorsque le chien se trouve au point d'abscisse 3 de la courbe $\mathscr{F}$ et lire les coordonnées du point S.

b. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;5[$ et on admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;5[$:

$$f'(x) = \frac{x(1-0,1x)}{5-x}.$$

Déterminer par le calcul une valeur approchée au centième de l'ordonnée du point S lorsque le chien se trouve au point d'abscisse 3 de la courbe $\mathscr{F}$.

2. On admet que $d(x) = 0,1x^2 - x + 5$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;5[$.
Justifier qu'au cours du temps la distance MS se rapproche d'une valeur limite que l'on déterminera.

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans une région, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols.
Au 1er juillet 2012, on estime qu'il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent-vingt renards.
On note u_n le nombre de campagnols et v_n le nombre de renards au 1er juillet de l'année $2012+n$.

Partie A - Un modèle simple

On modélise l'évolution des populations par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} &=& 1,1u_n - 2000v_n \\ v_{n+1} &=& 2\times 10^{-5}u_n + 0,6v_n \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0, \text{ avec } u_0 = 2\,000\,000 \text{ et } v_0 = 120.$$

1. **a.** On considère la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

   Déterminer la matrice A telle que $U_{n+1} = A \times U_n$ pour tout entier n et donner la matrice U_0.

   b. Calculer le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1[er] juillet 2018.

2. Soit les matrices $P = \begin{pmatrix} 20\,000 & 5\,000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{15\,000}\begin{pmatrix} 1 & -5\,000 \\ -1 & 20\,000 \end{pmatrix}$.

   On admet que P^{-1} est la matrice inverse de la matrice P et que $A = P \times D \times P^{-1}$.

   a. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$.

   b. Donner sans justification l'expression de la matrice D^n en fonction de n.

   c. On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_n &=& \dfrac{2,8\times 10^7 + 2\times 10^6 \times 0,7^n}{15} \\ v_n &=& \dfrac{1\,400 + 400 \times 0,7^n}{15} \end{array}\right.$$

   Décrire l'évolution des deux populations.

Partie B - Un modèle plus conforme à la réalité

Dans la réalité, on observe que si le nombre de renards a suffisamment baissé, alors le nombre de campagnols augmente à nouveau, ce qui n'est pas le cas avec le modèle précédent.
On construit donc un autre modèle, plus précis, qui tient compte de ce type d'observations à l'aide des relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} &=& 1,1u_n - 0,001u_n \times v_n \\ v_{n+1} &=& 2\times 10^{-7}u_n \times v_n + 0,6v_n \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0, \text{ avec } u_0 = 2\,000\,000 \text{ et } v_0 = 120.$$

Le tableau ci-dessous présente ce nouveau modèle sur les 25 premières années en donnant les effectifs des populations arrondis à l'unité :

	A	B	C
1	Modèle de la **partie B**		
2	n	u_n	v_n
3	0	2 000 000	120
4	1	1 960 000	120
5	2	1 920 800	119
6	3	1 884 228	117
7	4	1 851 905	114
8	5	1 825 160	111
9	6	1 804 988	107
10	7	1 792 049	103
11	8	1 786 692	99
12	9	1 789 005	94
13	10	1 798 854	91
14	11	1 815 930	87
15	12	1 839 780	84
16	13	1 869 827	81
17	14	1 905 378	79
18	15	1 945 622	77
19	16	1 989 620	77
20	17	2 036 288	76
21	18	2 084 374	77
22	19	2 132 440	78
23	20	2 178 846	80
24	21	2 221 746	83
25	22	2 259 109	87
26	23	2 288 766	91
27	24	2 308 508	97

1. Quelles formules faut-il écrire dans les cellules B4 et C4 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes B et C ?
2. Avec le deuxième modèle, à partir de quelle année observe-t-on le phénomène décrit (baisse des renards et hausse des campagnols) ?

Partie C

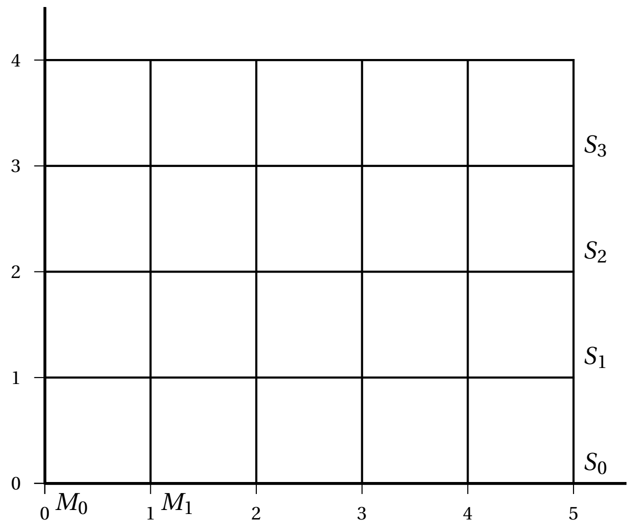
Dans cette partie on utilise le modèle de la partie B.
Est - il possible de donner à u_0 et v_0 des valeurs afin que les deux populations restent stables d'une année sur l'autre, c'est-à-dire telles que pour tout entier naturel n on ait $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = v_n$? (On parle alors d'état stable.)

Annexe

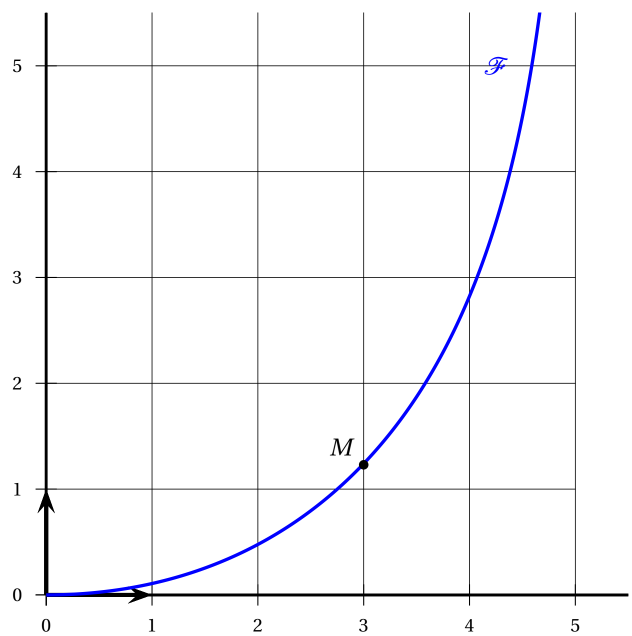
À rendre avec la copie EXERCICE 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A, question 1
Graphique n° 1



Partie B, question 1
Graphique n° 2



Baccalauréat S Centres étrangers 11 juin 2018

Exercice 1 **4 points**

Pour tous les candidats

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel.
Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.
Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.
À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,20]$ par :

$$f(t) = (0,8t + 0,2)\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,03.$$

On donne ci-contre le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,20]$.
Ainsi, la valeur $f(0) = 0,23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

t	0		1,75		20
$f'(t)$		+	0	−	
f	0,23	$\nearrow$		$\searrow$	

1. Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.
   a. Calculer $f(20)$.
   b. Déterminer le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience.
2. On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.
   a. Justifier qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition.
   b. On considère l'algorithme suivant :

   $t \leftarrow 1,75$
   $p \leftarrow 0,1$
   $V \leftarrow 0,7$
   Tant que $V > 0,035$
   $\quad t \leftarrow t + p$
   $\quad V \leftarrow (0,8t + 0,2)\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,03$
   Fin Tant que

   Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme ?
   Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?
3. On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.
   a. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,11]$ par :

   $$F(t) = (-1,6t - 3,6)\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,03t.$$

   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,11]$.
   b. En déduire le taux moyen V_m, valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,11]$. Arrondir le résultat au millième, soit à 0,1 %.

Exercice 2 **4 points**

Pour tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse inexacte ou non justifiée ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Un type d'oscilloscope a une durée de vie, exprimée en année, qui peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On sait que la durée de vie moyenne de ce type d'oscilloscope est de 8 ans.

Affirmation 1 : pour un oscilloscope de ce type choisi au hasard et ayant déjà fonctionné 3 ans, la probabilité que la durée de vie soit supérieure ou égale à 10 ans, arrondie au centième, est égale à 0,42.

On rappelle que si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, on a pour tout réel t positif : $P(X \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

2. En 2016, en France, les forces de l'ordre ont réalisé 9,8 millions de dépistages d'alcoolémie auprès des automobilistes, et 3,1 % de ces dépistages étaient positifs.

Source : *OFDT (Observatoire Français des Drogues et des Toxicomanies)*

Dans une région donnée, le 15 juin 2016, une brigade de gendarmerie a effectué un dépistage sur 200 automobilistes.

Affirmation 2 : en arrondissant au centième, la probabilité que, sur les 200 dépistages, il y ait eu strictement plus de 5 dépistages positifs, est égale à 0,59.

3. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\ln(6x-2) + \ln(2x-1) = \ln(x).$$

Affirmation 3 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

4. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(4z^2 - 20z + 37\right)(2z - 7 + 2\mathrm{i}) = 0.$$

Affirmation 4 : les solutions de l'équation sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

Exercice 3 **7 points**

Pour tous les candidats

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Partie A

Le détaillant constate que ses melons se vendent bien lorsque leur masse est comprise entre 900 g et 1 200 g. Dans la suite, de tels melons sont qualifiés « conformes ».

Le détaillant achète ses melons auprès de trois maraîchers, notés respectivement A, B et C.

Pour les melons du maraîcher A, on modélise la masse en gramme par une variable aléatoire M_{A} qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[850\ ;\ x]$, où x est un nombre réel supérieur à 1 200.

La masse en gramme des melons du maraîcher B est modélisée par une variable aléatoire M_{B} qui suit une loi normale de moyenne 1 050 et d'écart-type inconnu σ.

Le maraîcher C affirme, quant à lui, que 80 % des melons de sa production sont conformes.

1. Le détaillant constate que 75 % des melons du maraîcher A sont conformes. Déterminer x.

2. Il constate que 85 % des melons fournis par le maraîcher B sont conformes.

Déterminer l'écart-type σ de la variable aléatoire M_{B}. En donner la valeur arrondie à l'unité.

3. Le détaillant doute de l'affirmation du maraîcher C. Il constate que sur 400 melons livrés par ce maraîcher au cours d'une semaine, seulement 294 sont conformes.

Le détaillant a-t-il raison de douter de l'affirmation du maraîcher C ?

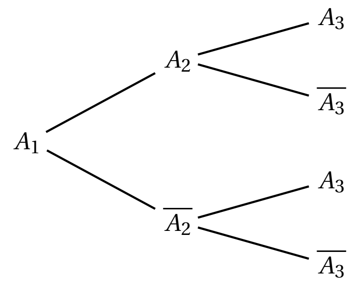
Partie B

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
- parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».
On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1. a. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.



b. Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.

c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ?
Arrondir au centième.

Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

[resume,start=2]Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0,8$.

b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

c. La suite (p_n) est-elle convergente ?

3. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.

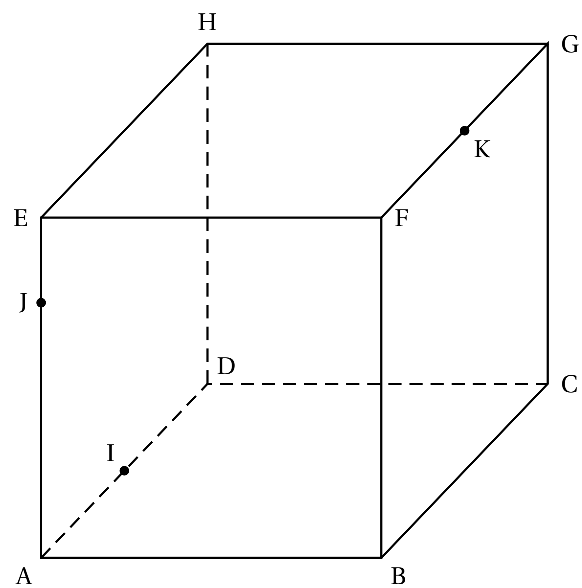
b. Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

c. Déterminer la limite de la suite (p_n).

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi la spécialité mathématique

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.
Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment [AD] ;
- J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$;
- K est le milieu du segment [FG].



Partie A

1. Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.

2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG).

Partie B

On se place désormais dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. a. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.

b. Déterminer les réels a et b tels que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(4\,;\,a\,;\,b)$ soit orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$ et $\overrightarrow{\text{IK}}$.

c. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $4x-6y-4z+3=0$.

2. **a.** Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).

   b. Calculer les coordonnées du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG).

   c. Placer le point N sur la figure et construire en couleur la section du cube par le plan (IJK).

Partie C

On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK). Le point R est donc l'unique point du plan (IJK) tel que la droite (FR) est orthogonale au plan (IJK).

On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\left\{\begin{array}{l}0<x<1\\0<y<1\\0<z<1\end{array}\right.$

Le point R est-il à l'intérieur du cube?

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi la spécialité mathématique

Le but de cet exercice est d'envisager une méthode de cryptage à clé publique d'une information numérique, appelée système RSA, en l'honneur des mathématiciens Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman, qui ont inventé cette méthode de cryptage en 1977 et l'ont publiée en 1978.

Les questions 1 et 2 sont des questions préparatoires, la question 3 aborde le cryptage, la question 4 le décryptage.

1. Cette question envisage de calculer le reste dans la division euclidienne par 55 de certaines puissances de l'entier 8.

   a. Vérifier que $8^7 \equiv 2 \mod 55$.

   En déduire le reste dans la division euclidienne par 55 du nombre 8^{21}.

   b. Vérifier que $8^2 \equiv 9 \mod 55$, puis déduire de la question a. le reste dans la division euclidienne par 55 de 8^{23}.

2. Dans cette question, on considère l'équation $(E)\ \ 23x-40y=1$, dont les solutions sont des couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs.

   a. Justifier le fait que l'équation (E) admet au moins un couple solution.

   b. Donner un couple, solution particulière de l'équation (E).

   c. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

   d. En déduire qu'il existe un unique entier d vérifiant les conditions $0 \leqslant d < 40$ et $23d \equiv 1 \mod 40$.

3. Cryptage dans le système RSA

   Une personne A choisit deux nombres premiers p et q, puis calcule les produits $N=pq$ et $n=(p-1)(q-1)$. Elle choisit également un entier naturel c premier avec n.

   La personne A publie le couple $(N\,;\,c)$, qui est une clé publique permettant à quiconque de lui envoyer un nombre crypté.

   Les messages sont numérisés et transformés en une suite d'entiers compris entre 0 et $N-1$.

   Pour crypter un entier a de cette suite, on procède ainsi : on calcule le reste b dans la division euclidienne par N du nombre a^c, et le nombre crypté est l'entier b.

   Dans la pratique, cette méthode est sûre si la personne A choisit des nombres premiers p et q très grands, s'écrivant avec plusieurs dizaines de chiffres.

   On va l'envisager ici avec des nombres plus simples : $p=5$ et $q=11$.

   La personne A choisit également $c=23$.

   a. Calculer les nombres N et n, puis justifier que la valeur de c vérifie la condition voulue.

   b. Un émetteur souhaite envoyer à la personne A le nombre $a=8$.

   Déterminer la valeur du nombre crypté b.

4. Décryptage dans le système RSA

   La personne A calcule dans un premier temps l'unique entier naturel d vérifiant les conditions $0 \leqslant d < n$ et $cd \equiv 1 \mod n$.

   Elle garde secret ce nombre d qui lui permet, et à elle seule, de décrypter les nombres qui lui ont été envoyés cryptés avec sa clé publique.

   Pour décrypter un nombre crypté b, la personne A calcule le reste a dans la division euclidienne par N du nombre b^d, et le nombre en clair – c'est-à-dire le nombre avant cryptage – est le nombre a.

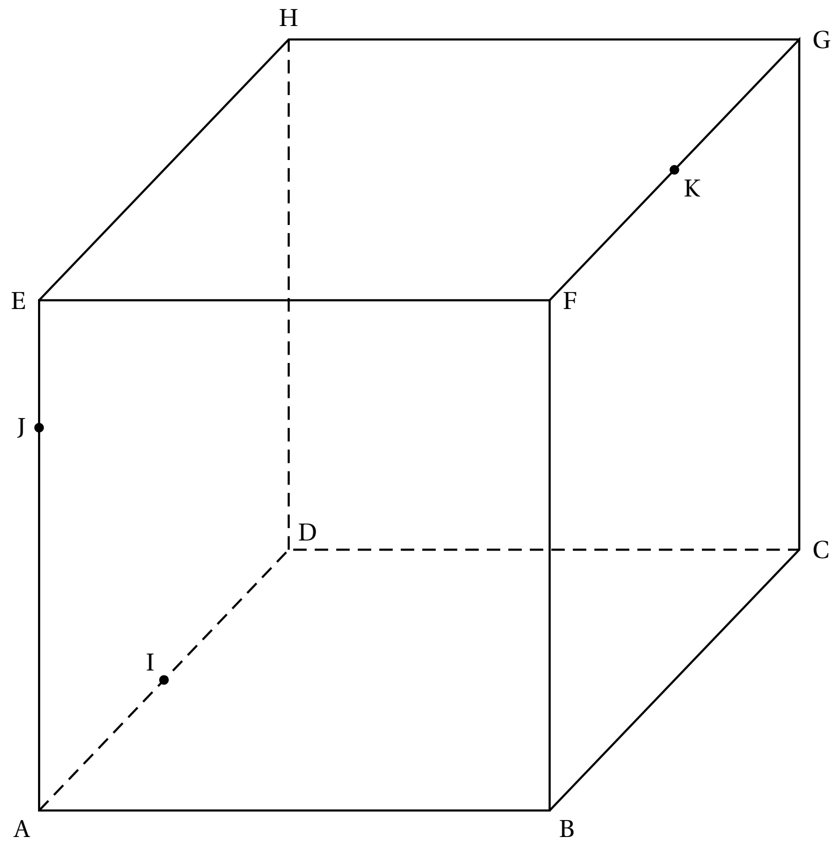
   On admet l'existence et l'unicité de l'entier d, et le fait que le décryptage fonctionne.

   Les nombres choisis par A sont encore $p=5$, $q=11$ et $c=23$.

   a. Quelle est la valeur de d?

   b. En appliquant la règle de décryptage, retrouver le nombre en clair lorsque le nombre crypté est $b=17$.

Annexe (à rendre avec la copie)



∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane 19 juin 2018 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

L'exploitant d'une forêt communale décide d'abattre des arbres afin de les vendre, soit aux habitants, soit à des entreprises. On admet que :

- parmi les arbres abattus, 30 % sont des chênes, 50 % sont des sapins et les autres sont des arbres d'essence secondaire (ce qui signifie qu'ils sont de moindre valeur) ;
- 45,9 % des chênes et 80 % des sapins abattus sont vendus aux habitants de la commune ;
- les trois quarts des arbres d'essence secondaire abattus sont vendus à des entreprises.

Partie A

Parmi les arbres abattus, on en choisit un au hasard.
On considère les évènements suivants :

- C : « l'arbre abattu est un chêne » ;
- S : « l'arbre abattu est un sapin » ;
- E : « l'arbre abattu est un arbre d'essence secondaire » ;
- H : « l'arbre abattu est vendu à un habitant de la commune ».

1. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune.
3. Justifier que la probabilité que l'arbre abattu soit vendu à un habitant de la commune est égale à 0,587 7.
4. Quelle est la probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin ?
   On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.

Partie B

Le nombre d'arbres sur un hectare de cette forêt peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance $\mu = 4\,000$ et d'écart-type $\sigma = 300$.

1. Déterminer la probabilité qu'il y ait entre 3 400 et 4 600 arbres sur un hectare donné de cette forêt. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait plus de 4 500 arbres sur un hectare donné de cette forêt. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.

Partie C

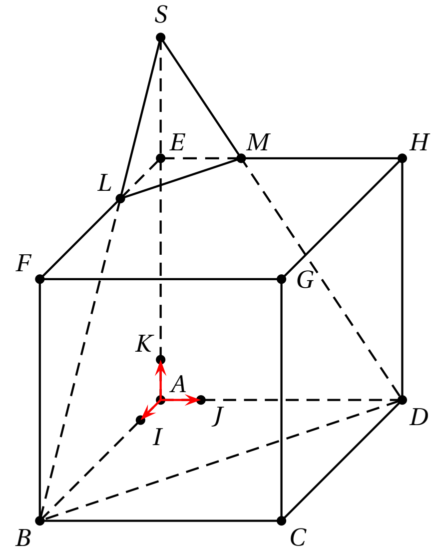
L'exploitant affirme que la densité de sapins dans cette forêt communale est de 1 sapin pour 2 arbres.

Sur une parcelle, on a compté 106 sapins dans un échantillon de 200 arbres. Ce résultat remet-il en cause l'affirmation de l'exploitant ?

EXERCICE 2 **5 points**

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.
Ces deux solides sont représentés par le cube $ABCDEFGH$ et par le tétraèdre $SELM$ ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AK}\right)$ tel que : $I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.

Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1. Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.

2. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2\,;\,0\,;\,6)$.

3. **a.** Donner une représentation paramétrique de la droite (BL).

b. Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0\,;\,0\,;\,9)$.

4. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;\,3\,;\,2)$.

a. Vérifier que $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (BDL).

b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est :

$$3x + 3y + 2z - 18 = 0.$$

c. On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0\\ y &=& s \quad (s \in \mathbb{R})\\ z &=& 6 \end{array}\right.$$

Calculer les coordonnées du point M.

5. Calculer le volume du tétraèdre $SELM$. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

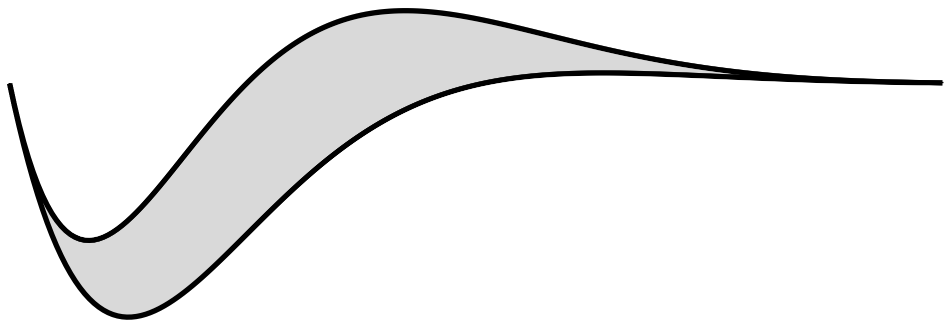
$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}.$$

6. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55° et 60°.
Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?

EXERCICE 3 — 5 POINTS

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A — Étude de la fonction f

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}.$$

2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f.

4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi~;~\pi]$.

   a. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi~;~\pi]$.

   b. En déduire les variations de f sur $[-\pi~;~\pi]$.

Partie B — Aire du logo

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées en ANNEXE.

1. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbre $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que H est une primitive de la fonction $x \longmapsto (\sin x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_g$ est les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

   a. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.

   b. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm².

EXERCICE 4 **5 POINTS**

CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$.
3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1520$.

   b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

   c. Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1520$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que ...
    n ← ...
    u ← ...
Fin de Tant que
```

La notation « ← » correspond à une affectation de valeur, ainsi « $n \leftarrow 0$ » signifie « Affecter à n la valeur 0 ».

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

EXERCICE 4 **5 POINTS**

CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le droit de pêche dans une réserve marine est réglementé : chaque pêcheur doit posséder une carte d'accréditation annuelle. Il existe deux types de cartes :

- une carte de pêche dite « libre » (le pêcheur n'est pas limité en nombre de poissons pêchés) ;
- une carte de pêche dite « avec quota » (le pêcheur ne doit pas dépasser une certaine quantité hebdomadaire de poisson).

On suppose que le nombre total de pêcheurs reste constant d'année en année.

On note, pour l'année $2017 + n$:

- ℓ_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche libre ;
- q_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche avec quota.

On observe que :

- chaque année, 65 % des possesseurs de la carte de pêche libres achète de nouveaux une carte de pêche libre l'année suivante ;
- Chaque année, 45 % des possesseurs de la carte de pêche avec quota acheté une carte de pêche libre l'année suivante ;
- En 2017, 40 % des pêcheurs ont acheté une carte de pêche libre. On a donc $\ell_0 = 0,4$ et $q_0 = 0,6$.

On note, pour tout entier naturel n, $P_n = \begin{pmatrix} \ell_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = MP_n$, où M est la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}45 \\ 0{,}35 & 0{,}55 \end{pmatrix}$.

2. Calculer la proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019.

3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1 ○	$M := \{\{0{,}65, 0{,}45\}, \{0{,}35, 0{,}55\}\}$ ✓ $M := \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}$
2 ○	$P_0 := \{\{0,4\}, \{0,6\}\}$ ✓ $P_0 := \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$
3 ○	$Q := \{\{9, 1\}, \{7,\text{-}\ 1\}\}$ ✓ $Q := \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$
4 ○	$T := \{\{1/16, 1/16\}, \{7/16, -9/16\}\}$ ✓ $T := \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix}$

5 ○	TQ $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
6 ○	QT $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
7 ○	$D := TMQ$ $\rightarrow D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

En vous appuyant sur les résultats précédents, répondre aux deux questions suivantes :

a. Justifier que Q est une matrice inversible et préciser sa matrice inverse.
On notera Q^{-1} la matrice inverse de Q.

b. Justifier que $M = QDQ^{-1}$ et démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$M^n = QD^nQ^{-1}.$$

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul,

$$M^n = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9+7\times 0{,}2^n & 9-9\times 0{,}2^n \\ 7-7\times 0{,}2^n & 7+9\times 0{,}2^n \end{pmatrix}.$$

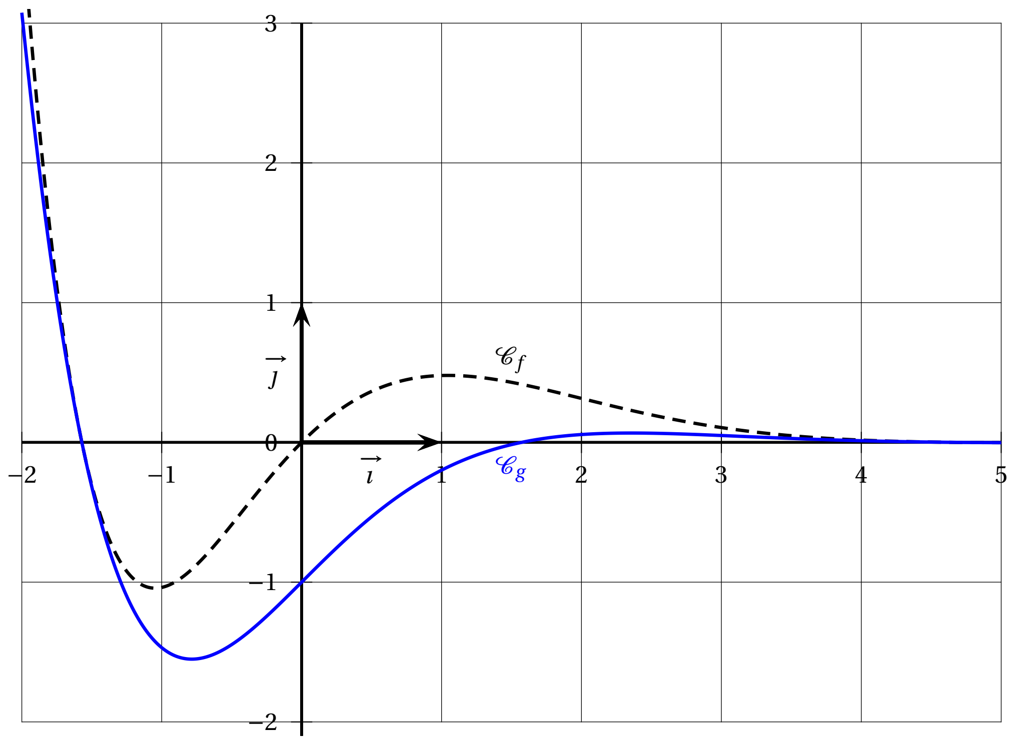
a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $P_n = M^nP_0$.

b. Justifier que, pour tout entier naturel n :

$$\ell_n = \frac{9}{16} - \frac{13}{80} \times 0{,}2^n.$$

5. La proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre dépassera-t-elle 60 % ?

Exercice 3



∾ Baccalauréat S Polynésie 20 juin 2018 ∾

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Rappel de connaissances :

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est donné par la formule

$$\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p+1,96\frac{\sqrt{p(1+p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

où n désigne la taille de l'échantillon et p la proportion des individus possédant le caractère étudié dans cette population. Les conditions de validité de cet intervalle sont les suivantes :

$$n \geqslant 30,\ np \geqslant 5,\ n(1-p) \geqslant 5.$$

La municipalité d'une grande ville dispose d'un stock de DVD qu'elle propose en location aux usagers des différentes médiathèques de cette ville.
Afin de renouveler son offre de location, la municipalité décide de retirer des DVD de son stock.
Parmi les DVD retirés, certains sont défectueux, d'autres non.
Parmi les 6 % de DVD défectueux sur l'ensemble du stock, 98 % sont retirés.
On admet par ailleurs que parmi les DVD non défectueux, 92 % sont maintenus dans le stock ; les autres sont retirés.

Les trois parties sont indépendantes.

Partie A

On choisit un DVD au hasard dans le stock de la municipalité.
On considère les évènements suivants :

- D : « le DVD est défectueux » ;
- R : « le DVD est retiré du stock » ».

On note $\overline{D}$ et $\overline{R}$ les évènements contraires respectifs des évènements D et R.

1. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $0,134$.
2. Une association caritative contacte la municipalité dans l'objectif de récupérer l'ensemble des DVD qui sont retirés du stock. Un responsable de la ville affirme alors que parmi ces DVD retirés, plus de la moitié est composée de DVD défectueux.
   Cette affirmation est-elle vraie ?

Partie B

Une des médiathèques de la ville se demande si le nombre de DVD défectueux qu'elle possède n'est pas anormalement élevé. Pour cela, elle effectue des tests sur un échantillon de 150 DVD de son propre stock qui est suffisamment important pour que cet échantillon soit assimilé à un tirage successif avec remise. Sur cet échantillon, on détecte 14 DVD défectueux.
Peut-on rejeter l'hypothèse selon laquelle, dans cette médiathèque, 6 % des DVD sont défectueux ?

Partie C

Une partie du stock de DVD de la ville est constituée de DVD de films d'animation destinés au jeune public. On choisit un film d'animation au hasard et on note X la variable aléatoire qui donne la durée, en minutes, de ce film. X suit une loi normale d'espérance $\mu = 80$ min et d'écart-type σ.
De plus, on estime que $P(X \geqslant 92) = 0,10$.

1. Déterminer le réel σ et en donner une valeur approchée à $0,01$.
2. Un enfant regarde un film d'animation dont il ne connaît pas la durée. Sachant qu'il en a déjà vu une heure et demie, quelle est la probabilité que le film se termine dans les cinq minutes qui suivent ?

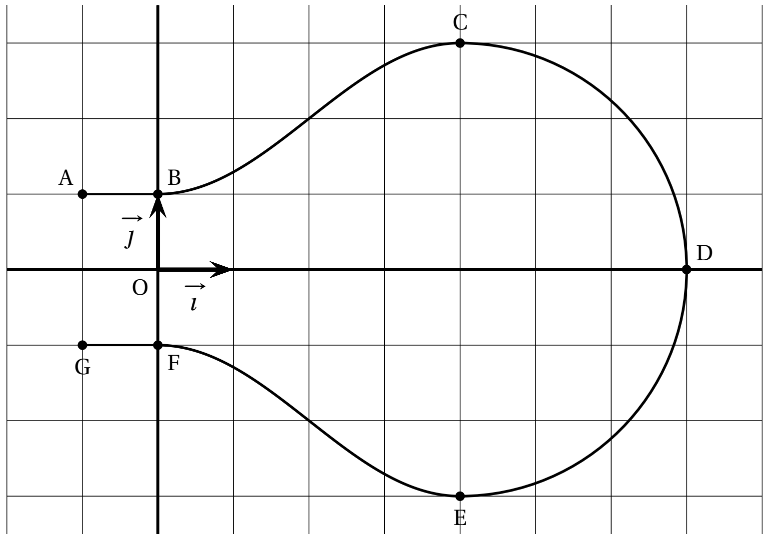
EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on s'intéresse au volume d'une ampoule basse consommation.

Partie A - Modélisation de la forme de l'ampoule

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère les points A$(-1\ ;\ 1)$, B$(0\,;\,1)$, C$(4\,;\,3)$, D$(7\,;\,0)$, E$(4\ ;\ -3)$, F$(O\ ;\ -1)$ et G$(-1\ ;\ -1)$.
On modélise la section de l'ampoule par un plan passant par son axe de révolution à l'aide de la figure ci-dessous :



La partie de la courbe située au-dessus de l'axe des abscisses se décompose de la manière suivante :

- la portion située entre les points A et B est la représentation graphique de la fonction constante h définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$ par $h(x) = 1$;
- la portion située entre les points B et C est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $f(x) = a + b\sin\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$, où a, b et c sont des réels non nuls fixés et où le réel c appartient à l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$;
- la portion située entre les points C et D est un quart de cercle de diamètre [CE].

La partie de la courbe située en-dessous de l'axe des abscisses est obtenue par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

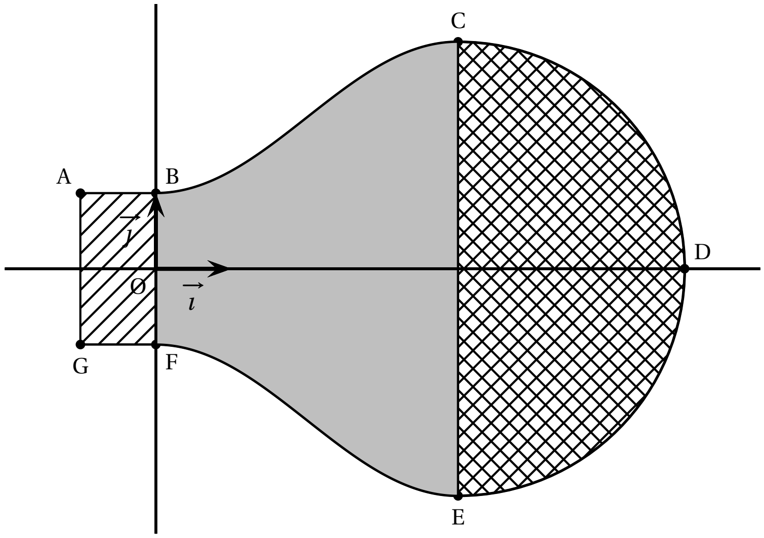
1. **a.** On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,4]$, déterminer $f'(x)$.

   b. On impose que les tangentes aux points B et C à la représentation graphique de la fonction f soient parallèles à l'axe des abscisses. Déterminer la valeur du réel c.

2. Déterminer les réels a et b.

Partie B - Approximation du volume de l'ampoule

Par rotation de la figure précédente autour de l'axe des abscisses, on obtient un modèle de l'ampoule.
Afin d'en calculer le volume, on la décompose en trois parties comme illustré ci-dessous :



Vue dans le plan (BCE)

On rappelle que :

- le volume d'un cylindre est donné par la formule $\pi r^2 h$ où r est le rayon du disque de base et h est la hauteur ;
- le volume d'une boule de rayon r est donné par la formule $\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

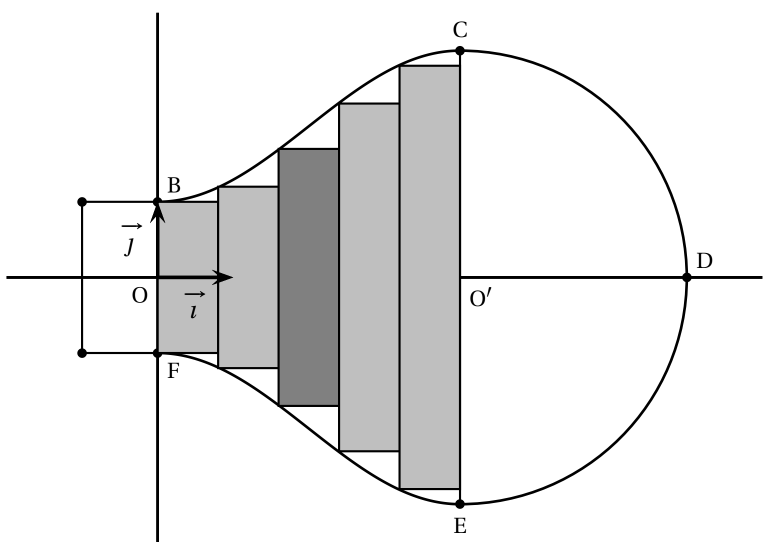
On admet également que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,4]$, $f(x) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

1. Calculer le volume du cylindre de section le rectangle ABFG.

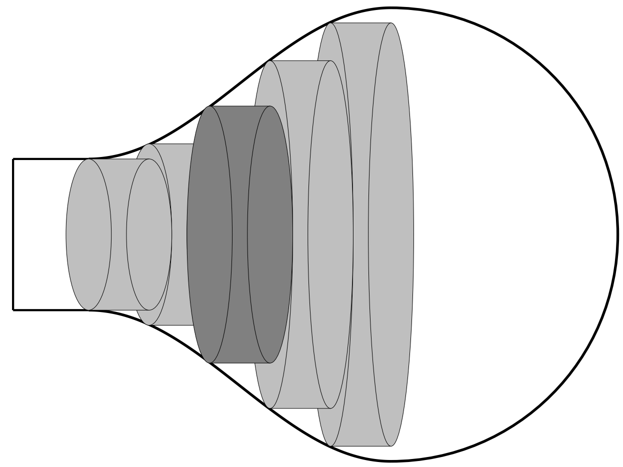
2. Calculer le volume de la demi-sphère de section le demi -disque de diamètre [CE].

3. Pour approcher le volume du solide de section la zone grisée BCEF, on partage le segment [OO$'$] en n segments de même longueur $\dfrac{4}{n}$ puis on construit n cylindres de même hauteur $\dfrac{4}{n}$.

a. Cas particulier : dans cette question uniquement on choisit $n = 5$.
Calculer le volume du troisième cylindre, grisé dans les figures ci-dessous, puis en donner la valeur arrondie à 10^{-2}.



Vue dans le plan (BCE)



Vue dans l'espace

b. Cas général : dans cette question, n désigne un entier naturel quelconque non nul.

On approche le volume du solide de section BCEF par la somme des volumes des n cylindres ainsi créés en choisissant une valeur de n suffisamment grande.

Recopier et compléter l'algorithme suivant de sorte qu'à la fin de son exécution, la variable V contienne la somme des volumes des n cylindres créés lorsque l'on saisit n.

```
V ← 0
Pour k allant de ... à ... :
    | V ← ...
Fin Pour
```

EXERCICE 3 **4 points**

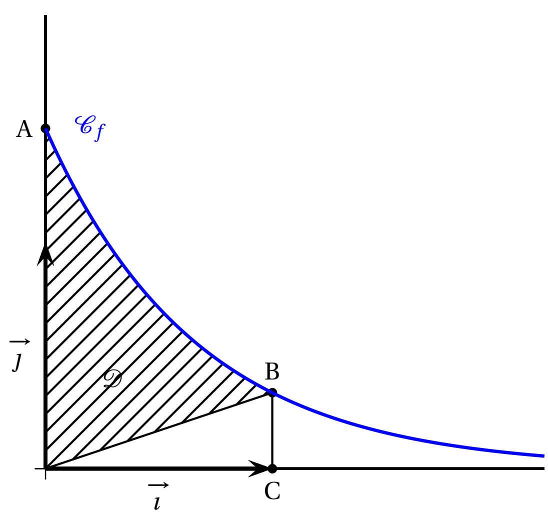
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{-kx}$ où k est un nombre réel strictement positif.

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On considère le point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0 et le point B de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1.

Le point C a pour coordonnées $(1\,;\,0)$.



1. Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Exprimer, en fonction de k, l'aire du triangle OCB et celle du domaine $\mathscr{D}$ délimité par l'axe des ordonnées, la courbe $\mathscr{C}_f$ et le segment [OB].
3. Montrer qu'il existe une unique valeur du réel k strictement positive telle que l'aire du domaine $\mathscr{D}$ vaut le double de celle du triangle OCB.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un lapin se déplace dans un terrier composé de trois galeries, notées A, B et C, dans chacune desquelles il est confronté à un stimulus particulier.

À chaque fois qu'il est soumis à un stimulus, le lapin reste dans la galerie où il se trouve ou change de galerie. Cela constitue une étape.

Soit n un entier naturel.

On note a_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie A à l'étape n ». On note b_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie B à l'étape n ». On note c_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie C à l'étape n ».

À l'étape $n = 0$, le lapin est dans la galerie A.

Une étude antérieure des réactions du lapin face aux différents stimuli permet de modéliser ses déplacements par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} & = & \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} & = & \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{array}\right.$$

L'objectif de cet exercice est d'estimer dans quelle galerie le lapin a la plus grande probabilité de se trouver à long terme.

Partie A

À l'aide d'un tableur, on obtient le tableau de valeurs suivant :

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0	1	0	0
3	1	0,333	0,667	0
4	2	0,278	0,556	0,167
5	3	0,231	0,574	0,194
6	4	0,221	0,571	0,208
7	5	0,216	0,572	0,212
8	6	0,215	0,571	0,214
9	7	0,215	0,571	0,214
10	8	0,214	0,571	0,214
11	9	0,214	0,571	0,214
12	10	0,214	0,571	0,214

1. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 et recopier vers le bas pour remplir la colonne C ?
2. Quelle conjecture peut-on émettre ?

Partie B

1. On définit la suite (u_n), pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - c_n$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison.
   b. Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = b_n - \dfrac{4}{7}$ pour tout entier naturel n.
   a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et en déduire que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{6}v_n$.
   b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
$$a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n, \quad b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad \text{et} \quad c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$
4. Que peut-on en déduire sur la position du lapin après un très grand nombre d'étapes ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable et l'état excité. À chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état.

Partie A - Étude d'un premier milieu

Dans cette partie, on se place dans un premier milieu (milieu 1) où, à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,005$, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est $0,6$.
On observe un atome d'hydrogène initialement à l'état stable.
On note a_n la probabilité que l'atome soit dans un état stable et b_n la probabilité qu'il se trouve dans un état excité, n nanosecondes après le début de l'observation.
On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.
On appelle X_n la matrice ligne $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$.
L'objectif est de savoir dans quel état se trouvera l'atome d'hydrogène à long terme.

1. Calculer a_1 puis b_1 et montrer que $a_2 = 0{,}993\,025$ et $b_2 = 0{,}006\,975$.
2. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = X_n A$.
   A est appelée matrice de transition dans le milieu 1.
   On admet alors que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0 A^n$.
3. On définit la matrice P par $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}$.
   On admet que P est inversible et que
   $$P^{-1} = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. On admet par la suite que, pour tout entier naturel n,
   $$A^n = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 + 0,395^n & 1 - 0,395^n \\ 120\left(1 - 0,395^n\right) & 1 + 120 \times 0,395^n \end{pmatrix}.$$
   En déduire une expression de a_n en fonction de n.
6. Déterminer la limite de la suite (a_n). Conclure.

Partie B - Étude d'un second milieu

Dans cette partie, on se place dans un second milieu (milieu 2), dans lequel on ne connaît pas la probabilité que l'atome passe de l'état excité à l'état stable. On note a cette probabilité supposée constante. On sait, en revanche, qu'à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,01$.

1. Donner, en fonction de a, la matrice de transition M dans le milieu 2.
2. Après un temps très long, dans le milieu 2, la proportion d'atomes excités se stabilise autour de 2 %.
   On admet qu'il existe un unique vecteur X, appelé état stationnaire, tel que $XM = X$, et que $X = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix}$.
   Déterminer la valeur de a.

Baccalauréat S – Asie 21 juin 2018

EXERCICE 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

Une ferme aquatique exploite une population de crevettes qui évolue en fonction de la reproduction naturelle et des prélèvements effectués.
La masse initiale de celte population de crevettes est estimée à 100 tonnes.
Compte tenu des conditions de reproduction et de prélèvement, on modélise la masse de la population de crevettes, exprimée en tonne, en fonction du temps, exprimé en semaine, par la fonction f_p, définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_p(t) = \frac{100p}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-pt}}$$

où p est un paramètre strictement compris entre 0 et 1 et qui dépend des différentes conditions de vie et d'exploitation des crevettes.

1. Cohérence du modèle

a. Calculer $f_p(0)$.

b. On rappelle que $0 < p < 1$.
Démontrer que pour tout nombre réel $t \geqslant 0,\ 1-(1-p)\mathrm{e}^{-pt} \geqslant p$.

c. En déduire que pour tout nombre réel $t \geqslant 0,\ 0 < f_p(t) \leqslant 100$.

2. Étude de l'évolution lorsque $p = 0,9$
Dans cette question, on prend $p = 0,9$ et on étudie la fonction $f_{0,9}$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_{0,9}(t) = \frac{90}{1-0,1\mathrm{e}^{-0,9t}}.$$

a. Déterminer les variations de la fonction $f_{0,9}$.

b. Démontrer pour tout nombre réel $t \geqslant 0,\ f_{0,9}(t) \geqslant 90$.

c. Interpréter les résultats des questions 2. a. et 2. b. dans le contexte.

3. Retour au cas général
On rappelle que $0 < p < 1$.
Exprimer en fonction de p la limite de f_p lorsque t tend vers $+\infty$.

4. Dans cette question, on prend $p = \dfrac{1}{2}$.

a. Montrer que la fonction H définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$H(t) = 100\ln\left(2-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right) + 50t$$

est une primitive de la fonction $f_{1/2}$ sur cet intervalle.

b. En déduire la masse moyenne de crevettes lors des 5 premières semaines d'exploitation, c'est-à-dire la valeur moyenne de la fonction $f_{1/2}$ sur l'intervalle $[0\,;5]$.
En donner une valeur approchée arrondie à la tonne.

EXERCICE 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Dans les parties A et B de cet exercice, on considère une maladie ; tout individu a une probabilité égale à 0,15 d'être touché par cette maladie.

Partie A

Cette partie est un questionnaire à choix multiples (Q. C. M.). Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Un test de dépistage de cette maladie a été mis au point. Si l'individu est malade, dans 94 % des cas le test est positif. Pour un individu choisi au hasard dans cette population, la probabilité que le test soit positif vaut $0,158$.

1. On teste un individu choisi au hasard dans la population : le test est positif. Une valeur arrondie au centième de la probabilité que la personne soit malade est égale à :

A : 0,94 **B :** 1 **C :** 0,89 **D :** on ne peut pas savoir

2. On prélève un échantillon aléatoire dans la population, et on fait passer le test aux individus de cet échantillon. On souhaite que la probabilité qu'au moins un individu soit testé positivement soit supérieure ou égale à $0,99$. La taille minimum de l'échantillon doit être égale à :

A : 26 personnes **B :** 27 personnes **C :** 3 personnes **D :** 7 personnes

3. Un vaccin pour lutter contre cette maladie a été mis au point. II est fabriqué par une entreprise sous forme de dose injectable par seringue. Le volume V (exprimé en millilitre) d'une dose suit une loi normale d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ. La probabilité que le volume d'une dose, exprimé en millilitre, soit compris entre $1,99$ et $2,01$ millilitres est égale à $0,997$.

La valeur de σ doit vérifier :

A : $\sigma = 0,02$ **B :** $\sigma < 0,003$ **C :** $\sigma > 0,003$ **D :** $\sigma = 0,003$

Partie B

1. Une boîte d'un certain médicament permet de soigner un malade.

La durée d'efficacité (exprimée en mois) de ce médicament est modélisée de la manière suivante :

- durant les 12 premiers mois après fabrication, on est certain qu'il demeure efficace ;
- au-delà, sa durée d'efficacité restante suit une loi exponentielle de paramètre λ.

La probabilité que l'une des boîtes prise au hasard dans un stock ait une durée d'efficacité totale supérieure à 18 mois est égale à $0,887$.

Quelle est la valeur moyenne de la durée d'efficacité totale de ce médicament ?

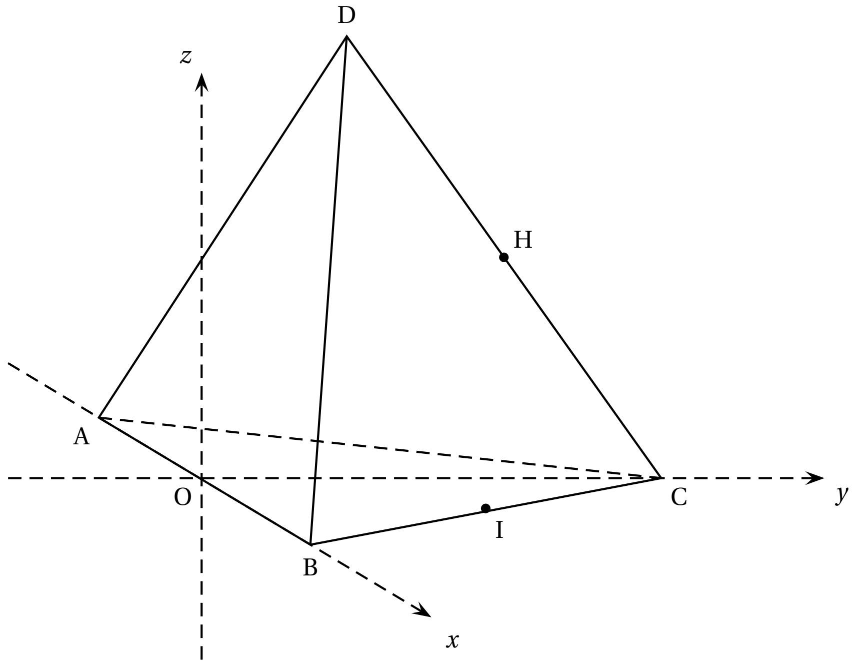
2. Une ville de 100 000 habitants veut constituer un stock de ces boîtes afin de soigner les personnes malades.

Quelle doit être la taille minimale de ce stock pour que la probabilité qu'il suffise à soigner tous les malades de cette ville soit supérieure à 95 % ?

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

On se place dans un repère orthonormé d'origine O et d'axes (Ox), (Oy) et (Oz).
Dans ce repère, on donne les points A$(-3~;~0~;~0)$, B$(3~;~0~;~0)$, C$\left(0~;~3\sqrt{3}~;~0\right)$ et D$\left(0~;~\sqrt{3}~;~2\sqrt{6}\right)$.
On note H le milieu du segment [CD] et I le milieu du segment [BC].



1. Calculer les longueurs AB et AD.

On admet pour la suite que toutes les arêtes du solide ABCD ont la même longueur, c'est-à-dire que le tétraèdre ABCD est un tétraèdre régulier.

On appelle $\mathscr{P}$ le plan de vecteur normal $\overrightarrow{\text{OH}}$ et passant par le point I.

[resume]Étude de la section du tétraèdre ABCD par le plan $\mathscr{P}$

1. **a.** Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $2y\sqrt{3} + z\sqrt{6} - 9 = 0$.
   b. Démontrer que le milieu J de [BD] est le point d'intersection de la droite (BD) et du plan $\mathscr{P}$.
   c. Donner une représentation paramétrique de la droite (AD), puis démontrer que le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AD) sont sécants en un point K dont on déterminera les coordonnées.
   d. Démontrer que les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires.
   e. Déterminer précisément la nature de la section du tétraèdre ABCD par le plan $\mathscr{P}$.
2. Peut-on placer un point M sur l'arête [BD] tel que le triangle OIM soit rectangle en M ?

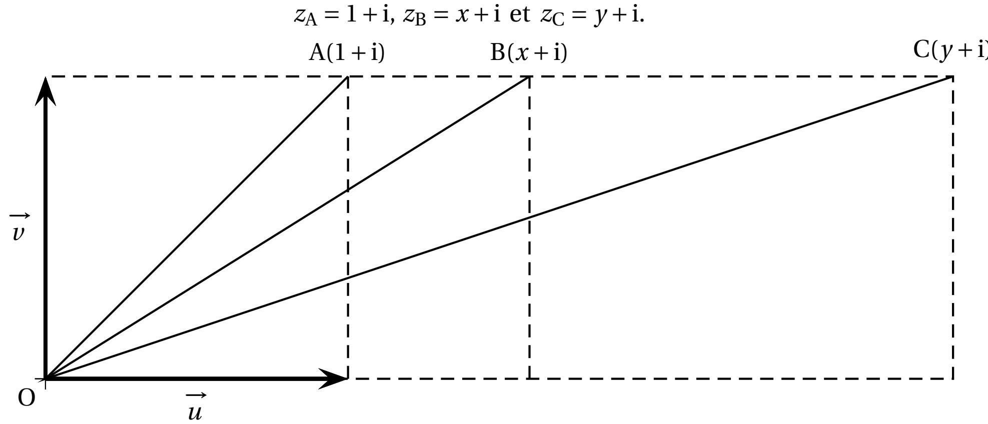
EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, x et y sont des nombres réels supérieurs à 1.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 1 + \text{i},\ z_{\text{B}} = x + \text{i} \text{ et } z_{\text{C}} = y + \text{i}.$$



Problème : on cherche les valeurs éventuelles des réels x et y, supérieures à 1, pour lesquelles :

$$\text{OC} = \text{OA} \times \text{OB} \quad \text{et } \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OB}}\right) + \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OC}}\right) = \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OA}}\right).$$

1. Démontrer que si OC = OA × OB, alors $y^2 = 2x^2 + 1$.

2. Reproduire sur la copie et compléter l'algorithme ci-après pour qu'il affiche tous les couples $(x,\ y)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} y^2 = 2x^2 + 1 \\ x \text{ et } y \text{ sont des nombres entiers} \\ 1 \leqslant x \leqslant 10 \text{ et } 1 \leqslant y \leqslant 10 \end{array}\right.$$

```
Pour x allant de 1 à ... faire
    Pour ...
        Si ...
            Afficher x et y
        Fin Si
    Fin Pour
Fin Pour
```

Lorsque l'on exécute cet algorithme, il affiche la valeur 2 *pour la variable* x *et la valeur* 3 *pour la variable* y.

3. Étude d'un cas particulier : dans cette question seulement, on prend $x = 2$ et $y = 3$.

a. Donner le module et un argument de z_{A}.

b. Montrer que OC = OA × OB.

c. Montrer que $z_{\text{B}}z_{\text{C}} = 5z_{\text{A}}$ et en déduire que $\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OB}}\right) + \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OC}}\right) = \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OA}}\right)$.

4. On revient au cas général, et on cherche s'il existe d'autres valeurs des réels x et y telles que les points A, B et C vérifient les deux conditions :

$\text{OC} = \text{OA} \times \text{OB} \quad \text{et } \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OB}}\right) + \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OC}}\right) = \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OA}}\right)$.

On rappelle que si OC = OA × OB, alors $y^2 = 2x^2 + 1$ (question 1.).

a. Démontrer que si $\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OB}}\right) + \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OC}}\right) = \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OA}}\right)$, alors $\arg\left[\dfrac{(x+\text{i})(y+\text{i})}{1+\text{i}}\right] = 0 \bmod 2\pi$.

En déduire que sous cette condition : $x + y - xy + 1 = 0$.

b. Démontrer que si les deux conditions sont vérifiées et que de plus $x \neq 1$, alors :

$$y = \sqrt{2x^2+1} \quad \text{et } y = \frac{x+1}{x-1}.$$

5. On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{2x^2+1} \quad \text{et } g(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Déterminer le nombre de solutions du problème initial.

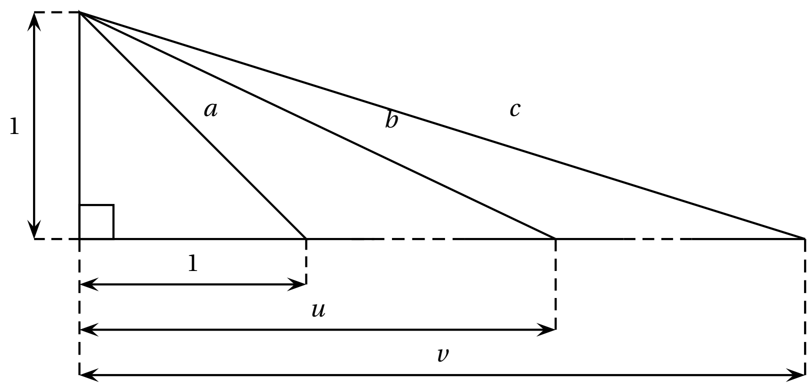
On pourra utiliser la fonction h définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$ et s'appuyer sur la copie d'écran d'un logiciel de calcul formel donnée ci-dessous.

$f(x) := \text{sqrt}(2 * x\hat{\ }2 + 1)$
$x \to \sqrt{2 * x^2 + 1}$
deriver(f)
$x \to \dfrac{2 * x}{\sqrt{2 * x^2 + 1}}$
$g(x) := (x+1)/(x-1)$
$x \to \dfrac{x+1}{x-1}$
deriver(g)
$x \to -\dfrac{2}{(x-1)^2}$

EXERCICE 4 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On s'intéresse à la figure suivante, dans laquelle a, b et c désignent les longueurs des hypoténuses des trois triangles rectangles en O dessinés ci-dessous.



Problème : on cherche les couples de **nombres entiers naturels non nuls** $(u,\ v)$ tels que $ab = c$.

1. Modélisation

Démontrer que les solutions du problème sont des solutions de l'équation :

$$(E) : \quad v^2 - 2u^2 = 1 \quad (v \text{ et } u \text{ étant des entiers naturels non nuls}).$$

2. Recherche systématique de solutions de l'équation (E)

Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche au cours de son exécution tous les couples solutions de l'équation pour lesquels $1 \leqslant u \leqslant 1\,000$ et $1 \leqslant v \leqslant 1\,000$.

Pour u allant de 1 à … faire	Au cours de son exécution,
Pour …	l'algorithme affiche :
Si …	2 3
Afficher u et v	12 17
Fin Si	70 99
Fin Pour	408 577
Fin Pour	

3. Analyse des solutions éventuelles de l'équation (E)

On suppose que le couple $(u,\ v)$ est une solution de l'équation (E).

a. Établir que $u < v$.

b. Démontrer que n et n^2 ont la même parité pour tout entier naturel n.

c. Démontrer que v est un nombre impair.

d. Établir que $2u^2 = (v-1)(v+1)$.

En déduire que u est un nombre pair.

4. Une famille de solutions

On assimile un couple de nombres entiers $(u,\ v)$ à la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

On définit également la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que si une matrice colonne X est une solution de l'équation (E), alors AX est aussi une solution de l'équation (E).

b. Démontrer que si une matrice colonne X est une solution de l'équation (E), alors pour tout entier naturel n, A^nX est aussi une solution de l'équation (E).

c. À l'aide de la calculatrice, donner un couple $(u,\ v)$ solution de l'équation (E) tel que $v > 10\,000$.

∾ Baccalauréat S Métropole–La Réunion 22 juin 2018 ∾

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on munit le plan d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous la courbe d'équation :

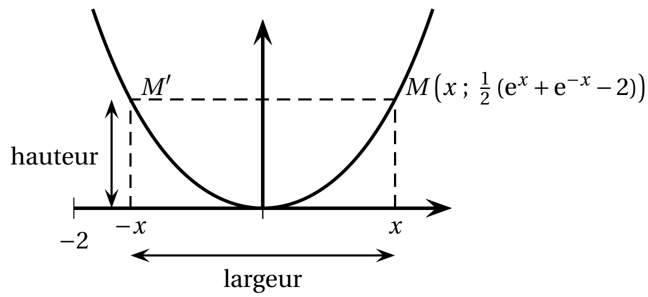
$$y = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2\right).$$

Cette courbe est appelée une « chaînette ».

On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette » délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Un tel arc est représenté sur le graphique ci-dessous en trait plein.

On définit la « largeur » et la « hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points M et M' comme indiqué sur le graphique.



Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

1. Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation

$$(E) : \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2 = 0.$$

2. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2.$$

a. Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} - 4\right) + \mathrm{e}^{-x} - 2$.

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$, où x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à l'équation : $\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2} - 4\mathrm{e}^{x} - 1 = 0$.

c. En posant $X = \mathrm{e}^{x}$, montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution réelle le nombre $\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$.

4. On donne ci-dessous le tableau de signes de la fonction dérivée f' de f :

x	0		$\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive que l'on notera α.

5. On considère l'algorithme suivant où les variables a, b et m sont des nombres réels :

```
Tant que b − a > 0,1 faire :
    m ← (a + b)/2
    Si e^m + e^(−m) − 4m − 2 > 0, alors :
        b ← m
    Sinon :
        a ← m
    Fin Si
Fin Tant que
```

a. Avant l'exécution de cet algorithme, les variables a et b contiennent respectivement les valeurs 2 et 3.

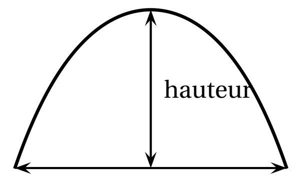
Que contiennent-elles à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau ci-contre avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme.

m	a	b	$b-a$
	2	3	1
2,5			
...	...	...	

b. Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d'algorithme à la question précédente ?

6. La *Gateway Arch*, édifiée dans la ville de Saint-Louis aux États-Unis, a l'allure ci-contre.
Son profil peut être approché par un arc de chaînette renversé dont la largeur est égale à la hauteur.



La largeur de cet arc, exprimée en mètre, est égale au double de la solution strictement positive de l'équation :

$$\left(E'\right) : \mathrm{e}^{\frac{t}{39}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{39}} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0.$$

Donner un encadrement de la hauteur de la *Gateway Arch*.

Exercice 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

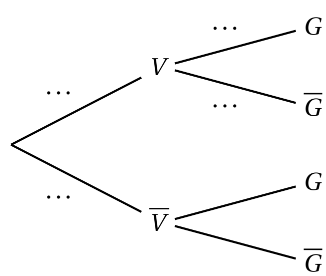
On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :

V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

G : « la personne a contracté la grippe ».

1. a. Donner la probabilité de l'évènement G.

b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à $0,28$.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} *près.*

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à $0,4$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.

a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.

b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

3. On interroge un échantillon de 3 750 habitants de la ville, c'est-à-dire que l'on suppose ici que $n = 3750$.
On note Z la variable aléatoire définie par : $Z = \dfrac{X - 1500}{30}$.
On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire Z peut être approchée par la loi normale centrée réduite.
En utilisant cette approximation, déterminer la probabilité qu'il y ait entre 1 450 et 1 550 individus vaccinés dans l'échantillon interrogé.

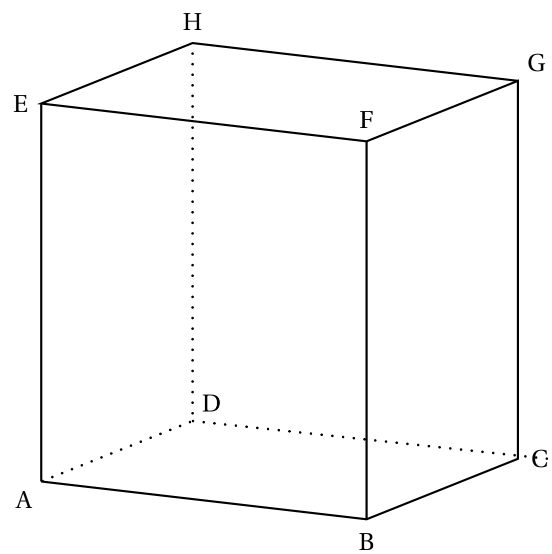
Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est d'examiner, dans différents cas, si les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes, c'est-à-dire d'étudier l'existence d'un point d'intersection de ses quatre hauteurs.
On rappelle que dans un tétraèdre MNPQ, *la hauteur issue de* M *est la droite passant par* M *orthogonale au plan* (NPQ).

Partie A Étude de cas particuliers

On considère un cube ABCDEFGH.



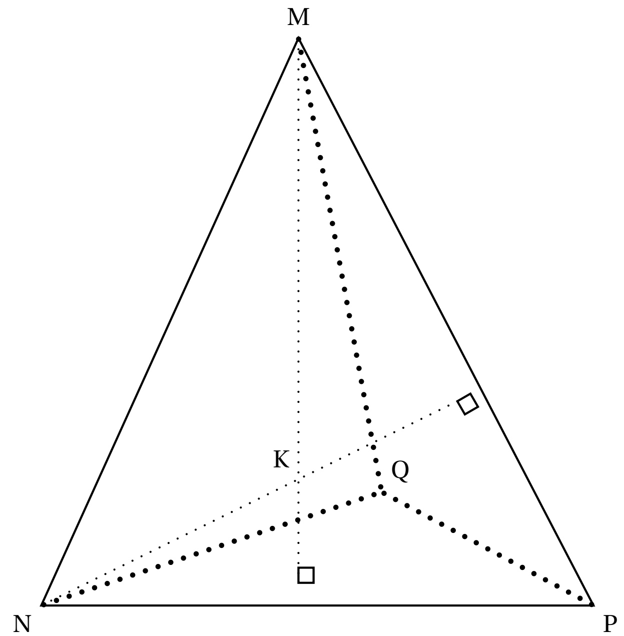
On admet que les droites (AG), (BH), (CE) et (DF), appelées « grandes diagonales » du cube, sont concourantes.

1. On considère le tétraèdre ABCE.
   - **a.** Préciser la hauteur issue de E et la hauteur issue de C dans ce tétraèdre.
   - **b.** Les quatre hauteurs du tétraèdre ABCE sont-elles concourantes ?
2. On considère le tétraèdre ACHF et on travaille dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
   - **a.** Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ACH) est : $x - y + z = 0$.
   - **b.** En déduire que (FD) est la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF.
   - **c.** Par analogie avec le résultat précédent, préciser les hauteurs du tétraèdre ACHF issues respectivement des sommets A, C et H.
     Les quatre hauteurs du tétraèdre ACHF sont-elles concourantes ?

Dans la suite de cet exercice, un tétraèdre dont les quatre hauteurs sont concourantes sera appelé un tétraèdre orthocentrique.

Partie B Une propriété des tétraèdres orthocentriques

Dans cette partie, on considère un tétraèdre MNPQ dont les hauteurs issues des sommets M et N sont sécantes en un point K. Les droites (MK) et (NK) sont donc orthogonales aux plans (NPQ) et (MPQ) respectivement.



1. **a.** Justifier que la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MK) ; on admet de même que les droites (PQ) et (NK) sont orthogonales.

   b. Que peut-on déduire de la question précédente relativement à la droite (PQ) et au plan (MNK) ? Justifier la réponse.

2. Montrer que les arêtes [MN] et [PQ] sont orthogonales.

   Ainsi, on obtient la propriété suivante :

   Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.

   (On dit que deux arêtes d'un tétraèdre sont « opposées » lorsqu'elles n'ont pas de sommet commun.)

Partie C Application

Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$\mathrm{R}(-3\,;\,5\,;\,2), \mathrm{S}(1\,;\,4\,;\,-2), \mathrm{T}(4\,;\,-1\,;\,5) \quad \text{et } \mathrm{U}(4\,;\,7\,;\,3).$$

Le tétraèdre RSTU est-il orthocentrique ? Justifier.

Exercice 4 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On pose $z_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = \frac{3 - \text{i}\sqrt{3}}{4} z_n.$$

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. **a.** Vérifier que :

$$\frac{3 - \text{i}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}.$$

   b. En déduire l'écriture de chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle et vérifier que z_3 est un imaginaire pur dont on précisera la partie imaginaire.
   c. Représenter graphiquement les points A_0 , A_1 , A_2 et A_3 ; on prendra pour unité le centimètre.
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \text{e}^{-\text{i}\frac{n\pi}{6}}.$$

   b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
   Déterminer la nature et la limite de la suite (u_n).
3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel k,

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\text{i}.$$

   En déduire que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $A_kA_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\text{O}A_{k+1}$.
   b. Pour tout entier naturel n, on appelle ℓ_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points $A_0,\ A_1,\ A_2, \ldots, A_n$.
   On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
   Démontrer que la suite (ℓ_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 4 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation suivante dont les inconnues x et y sont des entiers naturels :

$$x^2 - 8y^2 = 1. \quad (E)$$

1. Déterminer un couple solution $(x\ ;\ y)$ où x et y sont deux entiers naturels.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   On définit les suites d'entiers naturels (x_n) et $\left(y_n\right)$ par :

$$x_0 = 1,\ y_0 = 0, \text{ et pour tout entier naturel } n, \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, le couple $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ est solution de l'équation (E).
   b. En admettant que la suite (x_n) est à valeurs strictement positives, démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $x_{n+1} > x_n$.
3. En déduire que l'équation (E) admet une infinité de couples solutions.

Partie B

Un entier naturel n est appelé un nombre puissant lorsque, pour tout diviseur premier p de n, p^2 divise n.

1. Vérifier qu'il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.

L'objectif de cette partie est de démontrer, à l'aide des résultats de la partie A, qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers naturels consécutifs puissants et d'en trouver quelques exemples.

[resume]Soient a et b deux entiers naturels. Montrer que l'entier naturel $n = a^2b^3$ est un nombre puissant. Montrer que si $(x\ ;\ y)$ est un couple solution de l'équation (E) définie dans la partie A, alors $x^2 - 1$ et x^2 sont des entiers consécutifs puissants. Conclure quant à l'objectif fixé pour cette partie, en démontrant qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants. Déterminer deux nombres entiers consécutifs puissants supérieurs à 2018.

∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane 6 septembre 2018 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si besoin, à 10^{-3}.

Partie A

Elsa a préparé un grand saladier de billes de chocolat pour son anniversaire.
On y trouve :

- 40 % de billes au chocolat blanc, les autres étant au chocolat noir ;
- parmi les billes au chocolat blanc, 60 % sont fourrées au café ; les autres sont fourrées au praliné ;
- parmi les billes au chocolat noir, 70 % sont fourrées au café ; les autres sont fourrées au praliné.

Un invité prend une bille de chocolat au hasard dans le saladier. On définit les évènements suivants :

- B : « l'invité prend une bille au chocolat blanc » ;
- C : « l'invité prend une bille fourrée au café ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Montrer que la probabilité que l'invité prenne une bille fourrée au café vaut $0,66$.
3. Sachant que la bille est fourrée au café, quelle est la probabilité que l'invité ait pris une bille au chocolat blanc ?

Partie B

La société Chococéan commercialise des bonbons au chocolat, qui sont conditionnés en paquets d'environ 250 g par une machine.
La réglementation exige qu'un tel paquet de bonbons au chocolat ait une masse supérieure à $247,5$ g.
La dirigeante de l'entreprise constate que, lorsqu'on prélève au hasard un paquet de bonbons au chocolat dans la production, sa masse, en grammes, peut être modélisée par une variable aléatoire X_1 qui suit une loi normale d'espérance $\mu_1 = 251$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

1. Calculer la probabilité qu'un paquet prélevé au hasard dans la production soit conforme à la réglementation.
2. La dirigeante souhaiterait que 98 % des paquets soient conformes à la réglementation.
   Cela nécessite un nouveau réglage de la machine, afin que la masse, en grammes, du paquet prélevé au hasard soit modélisée par une variable aléatoire X_2 qui suit une loi normale d'espérance μ_2 inconnue et d'écart-type $\sigma = 2$.
   Déterminer la valeur de μ_2 répondant au souhait de la dirigeante.

Partie C

La société procède à un réglage de la machine. La dirigeante affirme que désormais 98 % des paquets produits sont conformes à la réglementation.
Une association de consommateurs fait peser 256 paquets de bonbons au chocolat et en dénombre 248 qui sont conformes à la réglementation.
Le résultat de ce contrôle remet-il en question l'affirmation de la dirigeante ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **6 points**

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A

Soit f_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_2(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

La courbe représentative de f_2, notée $\mathcal{C}_2$, est tracée dans un repère orthonormé sur l'ANNEXE à rendre avec la copie.

Aucune justification ni aucun calcul ne sont attendus dans cette partie.

1. Conjecturer les limites de f_2 en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Conjecturer le tableau de variations de f_2 à l'aide du graphique.
3. Soit T_2 la tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$ au point d'abscisse 0. Tracer cette tangente sur l'ANNEXE à rendre avec la copie, puis en conjecturer une équation par lecture graphique.
4. Sur l'ANNEXE à rendre avec la copie, hachurer un domaine dont l'aire est donnée par l'intégrale

$$\int_{-2}^{6} f_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie B

Pour tout réel m, on note f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_m(x) = (x+m)\mathrm{e}^{-x}$$

et $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Calculer les limites de f_m en $-\infty$ et $+\infty$.
2. On admet que f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f_m' sa dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x, $f_m'(x) = (-x-m+1)\mathrm{e}^{-x}$.
3. En déduire les variations de f_m sur $\mathbb{R}$.
4. **a.** Pour tout réel m, on note T_m la tangente à la courbe $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse 0.
   Démontrer que T_m a pour équation réduite $y = (1-m)x + m$.

   b. Démontrer que toutes les droites T_m passent par un même point dont on précisera les coordonnées.
5. Étudier le signe de $f_m(x)$ pour tout réel x.
6. On admet que la fonction F_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $F_2(x) = -(x+3)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f_2 sur $\mathbb{R}$.

   a. Déterminer, en fonction de x, l'expression de

$$\int_{-2}^{x} f_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

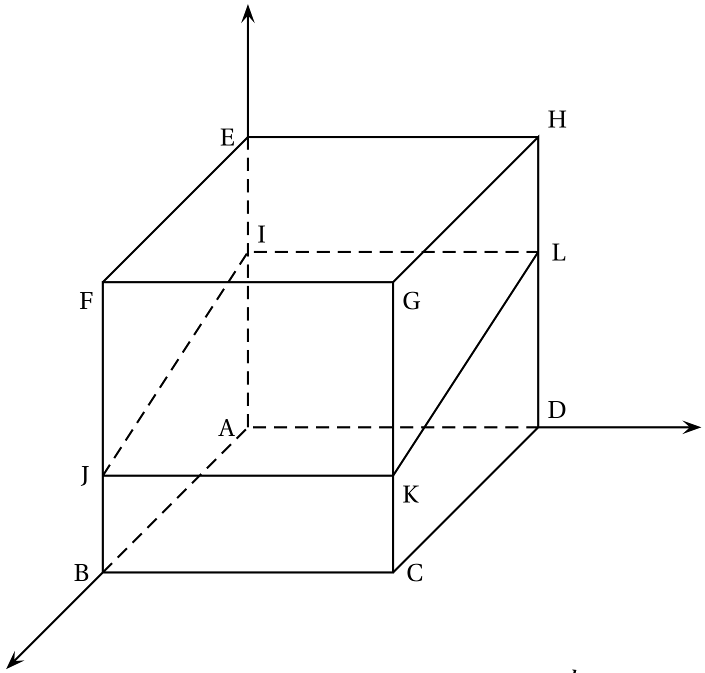
   b. En déduire la valeur de

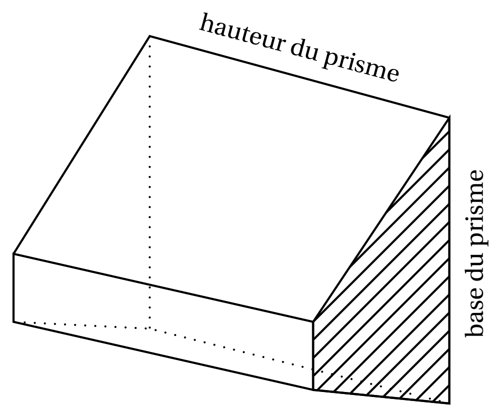
$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-2}^{x} f_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

EXERCICE 3 **4 points**

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

On considère un cube ABCDEFGH. L'espace est rapporté au repère $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
La figure est donnée ci-dessous.





On rappelle les formules suivantes :

Aire d'un trapèze : $\frac{1}{2}$(petite base + grande base) × hauteur Volume d'un prisme : aire de la base × hauteur

On note $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $4x + 15z - 9 = 0$.
La section IJKL du cube ABCDEFGH par le plan $\mathscr{P}_1$ est représentée sur la figure.

1. Déterminer les coordonnées des points I et J.
2. Le plan $\mathscr{P}_1$ partage le cube en deux prismes.
   Calculer le volume de chacun de ces deux prismes.
3. Soit M un point du segment [EI].
   On cherche un plan $\mathscr{P}_2$ parallèle à $\mathscr{P}_1$ et passant par M qui partage le cube en deux prismes de même volume.
   Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}_2$.

EXERCICE 4 **5 points**

CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \mathrm{e} \times \sqrt{u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2.$$

2. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. En déduire la convergence de la suite (u_n).

3. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \ln(u_n) - 2.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}.$$

c. En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

d. Calculer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0.
Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

Affirmation 1 : « Si $u_0 = 2\,018$, alors la suite (u_n) est croissante. »
Affirmation 2 : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$. »
Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »

EXERCICE 4 **5 points**

CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est entier.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

2. Démontrer que les termes de la suite (u_n) sont alternativement pairs et impairs.

3. L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifier.
Affirmation : « Si p est un nombre premier impair, alors u_p est premier. »

4. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 3^n - 1$.

b. Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que 3^n est congru à 1 modulo 7.

c. En déduire que u_{2022} est divisible par 7.

5. **a.** Calculer le reste de la division euclidienne par 5 de chacun des cinq premiers termes de la suite (u_n).

b. Sans justification, recopier et compléter le tableau suivant :

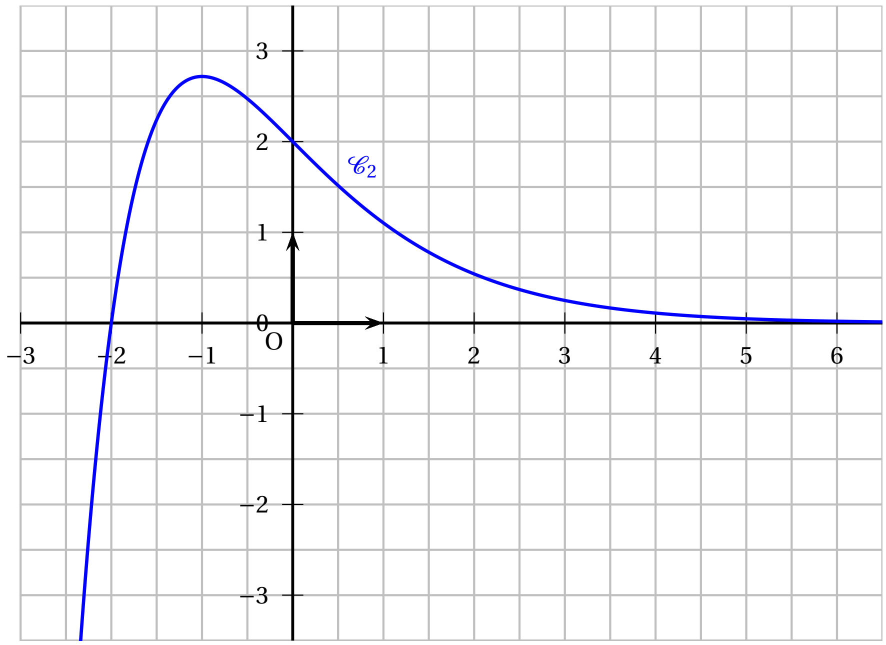
Reste de la division euclidienne de m par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de $3m + 1$ par 5					

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, si u_n est congru à 4 modulo 5, alors u_{n+4} est congru à 4 modulo 5.

d. Existe-t-il un entier naturel n tel que le reste de la division euclidienne de u_n par 5 soit égal à 2 ?

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 2



∽ Baccalauréat S Métropole–La Réunion 13 septembre 2018 ∾

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une étude statistique a été menée dans une grande ville de France entre le 1er janvier 2000 et le 1er janvier 2010 afin d'évaluer la proportion des ménages possédant une connexion internet fixe.

Au 1er janvier 2000, un ménage sur huit était équipé d'une connexion internet fixe et, au 1er janvier 2010, 64 % des ménages l'étaient.

Suite à cette étude, cette proportion a été modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{1}{1 + k\mathrm{e}^{-at}},$$

où k et a sont deux constantes réelles positives et la variable t désigne le temps, compté en années, écoulé depuis le 1er janvier 2000.

1. Déterminer les valeurs exactes de k et de a pour que $g(0) = \frac{1}{8}$ et $g(10) = \frac{64}{100}$.
2. Dans la suite, on prendra $k = 7$ et $a = 0,25$. La fonction g est donc définie par :

$$g(t) = \frac{1}{1 + 7\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{4}\right)}}.$$

   a. Montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   b. Selon cette modélisation, peut-on affirmer qu'un jour, au moins 99 % des ménages de cette ville seront équipés d'une connexion internet fixe ? Justifier la réponse.

3. **a.** Donner, au centième près, la proportion de foyers, prévue par le modèle, équipés d'une connexion internet fixe au 1er janvier 2018.

   b. Compte tenu du développement de la téléphonie mobile, certains statisticiens pensent que la modélisation par la fonction g de l'évolution de la proportion de ménages possédant une connexion internet fixe doit être remise en cause.
   Au début de l'année 2018 un sondage a été effectué. Sur 1 000 foyers, 880 étaient équipés d'une connexion fixe.
   Ce sondage donne-t-il raison à ces statisticiens sceptiques ?
   (On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.)

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique le centimètre.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(z^2 - 2z + 4\right)\left(z^2 + 4\right) = 0$.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_{\mathrm{B}} = 2\mathrm{i}$.

   a. Écrire z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle et justifier que les points A et B sont sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

   b. Faire une figure et placer les points A et B.

   c. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.

3. On note F le point d'affixe $z_{\mathrm{F}} = z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}}$.

   a. Placer le point F sur la figure précédente. Montrer que OAFB est un losange.

   b. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)$ puis de l'angle $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)$.

   c. Calculer le module de z_{F} et en déduire l'écriture de z_{F} sous forme trigonométrique.

   d. En déduire la valeur exacte de :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

4. Deux modèles de calculatrice de marques différentes donnent pour l'une :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

et pour l'autre :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ces résultats sont-ils contradictoires ? Justifier la réponse.

Exercice 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiple). Pour chaque question, quatre réponses sont proposées et une seule d'entre elles est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Il est attribué 1,5 *point par réponse correcte.*
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse incorrecte.

Question 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère la droite (D) de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 2+ \ t \\ y & = & 1-3t \\ z & = & \ \ 2t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$, et le plan (P) d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$.

On peut affirmer que :

Réponse A : la droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.
Réponse B : la droite (D) est incluse dans le plan (P).
Réponse C : la droite (D) et le plan (P) se coupent au point de coordonnées $(4~;~-5~;~4)$.
Réponse D : la droite (D) et le plan (P) sont orthogonaux.

Question 2

Dans le rayon informatique d'une grande surface, un seul vendeur est présent et les clients sont nombreux.
On admet que la variable aléatoire T, qui, à chaque client, associe le temps d'attente en minutes pour que le vendeur soit disponible, suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Le temps d'attente moyen est de 20 minutes.
Sachant qu'un client a déjà attendu 20 minutes, la probabilité que son attente totale dépasse une demi-heure est :

Réponse A : $\text{e}^{-\frac{1}{2}}$ **Réponse B :** $\text{e}^{-\frac{3}{2}}$
Réponse C : $1-\text{e}^{-\frac{1}{2}}$ **Réponse D :** $1-\text{e}^{-10\lambda}$

Question 3

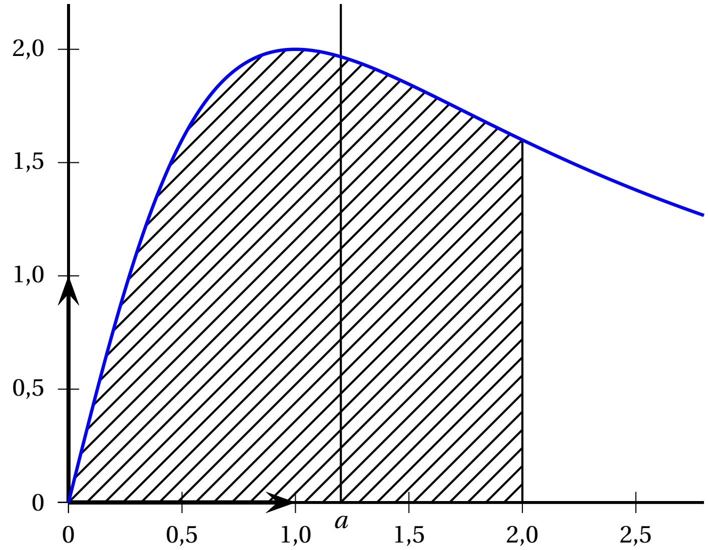
Une usine fabrique des balles de tennis en grande quantité. Pour être conforme au règlement des compétitions internationales, le diamètre d'une balle doit être compris entre 63,5 mm et 66,7 mm.
On note D la variable aléatoire qui, à chaque balle produite, associe son diamètre mesuré en millimètres.
On admet que D suit une loi normale de moyenne 65,1 et d'écart type σ.
On appelle P la probabilité qu'une balle choisie au hasard dans la production totale soit conforme.
L'usine décide de régler les machines de sorte que P soit égale à 0,99. La valeur de σ, arrondie au centième, permettant d'atteindre cet objectif est :

Réponse A : 0,69 **Réponse B :** 2,58 **Réponse C :** 0,62 **Réponse D :** 0,80

Question 4

La courbe ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{4x}{x^2+1}.$$



La valeur exacte du réel positif a tel que la droite d'équation $x = a$ partage le domaine hachuré en deux domaines d'aires égales est :

Réponse A : $\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}}$ **Réponse B :** $\sqrt{\sqrt{5}-1}$ **Réponse C :** $\ln 5 - 0,5$ **Réponse D :** **s** $\frac{10}{9}$

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}.$$

Soit a un réel positif.

On définit la suite (u_n) par $u_0=a$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, suivant différentes valeurs de son premier terme $u_0=a$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, pour $a=2,9$ puis pour $a=3,1$.
2. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
   a. En remarquant que $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n^2-u_n+\frac{3}{2}$, montrer que $\ell=\frac{1}{2}\ell^2-\ell+\frac{3}{2}$.
   b. Montrer que les valeurs possibles de ℓ sont 1 et 3.
3. Dans cette question, on prend $a=2,9$.
   a. Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
   b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$.
   c. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Dans cette question, on prend $a=3,1$ et on admet que la suite (u_n) est croissante.
   a. À l'aide des questions précédentes montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
   b. En déduire le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
   c. L'algorithme suivant calcule le plus petit rang p pour lequel $u_p>10^6$.
   Recopier et compléter cet algorithme.
   P est un nombre entier et U est un nombre réel.

```
P ← 0
U ......

Tant que ...
    P ← ......
    U ← ......
Fin Tant que
```

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=1$, $u_1=6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2}=6u_{n+1}-8u_n.$$

1. Calculer u_2 et u_3.
2. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0&1\\-8&6\end{pmatrix}$ et la matrice colonne $U_n=\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\end{pmatrix}$.
   Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1}=AU_n$.
3. On considère de plus les matrices $B=\begin{pmatrix}2&-0,5\\4&-1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}-1&0,5\\-4&2\end{pmatrix}$.
   a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $A^n=2^nB+4^nC$.

b. On admet que, pour tout entier naturel n, on a : $U_n = A^n U_0$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 2 \times 4^n - 2^n$.

Partie B

On dit qu'un entier naturel N est parfait lorsque la somme de ses diviseurs (positifs) est égale à $2N$.
Par exemple, 6 est un nombre parfait car ses diviseurs sont 1, 2, 3 et 6 et on a : $1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \times 6$.
Dans cette partie, on cherche des nombres parfaits parmi les termes de la suite (u_n) étudiée dans la partie A.

1. Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 2^n p_n$ avec $p_n = 2^{n+1} - 1$.

2. On considère l'algorithme suivant où N, S, U, P et K sont des entiers naturels.

```
S ← 0

Demander à l'utilisateur la valeur de N
P ← 2^(N+1) − 1
U ← 2^N P

Pour K variant de 1 à U
    Si U/K est un nombre entier
        S ← S + K
    Fin Si
Fin Pour

Si S = 2U
    Afficher « oui »
Sinon
    Afficher « non »
Fin Si
```

a. À quelle question permet de répondre cet algorithme ?
Compléter, sans justification, les cases vides du tableau donné en annexe. Il n'est pas demandé au candidat de programmer l'algorithme.

b. Faire une conjecture donnant une condition suffisante sur P pour que l'algorithme affiche « oui ».

3. Dans cette question, on suppose que p_n est un nombre premier. On note S_n la somme des diviseurs de u_n.

a. Montrer que $S_n = \left(1 + p_n\right) p_n$.

b. En déduire que u_n est un nombre parfait.

Annexe à remettre avec la copie

Exercice 4

Affichage de l'algorithme pour les premières valeurs de N

N	P	U	S	Affichage final
0	1	1	1	non
1	3	6	12	oui
2	7			
3	15		360	
4	31		992	oui
5	63		6 552	non
6	127	8 128	16 256	

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Sud 12 novembre 2018

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A, B *et* C *peuvent être traitées de façon indépendante.*
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

Partie A

Un commerçant reçoit les résultats d'une étude de marché sur les habitudes des consommateurs en France.
Selon cette étude :

- 54 % des consommateurs privilégient les produits de fabrication française ;
- 65 % des consommateurs achètent régulièrement des produits issus de l'agriculture biologique, et parmi eux 72 % privilégient les produits de fabrication française.

On choisit un consommateur au hasard. On considère les évènements suivants :

- B : « un consommateur achète régulièrement des produits issus de l'agriculture biologique » ;
- F : « un consommateur privilégie les produits de fabrication française ».

On note $P(A)$ la probabilité de l'évènement A et $P_C(A)$ la probabilité de A sachant C.

1. Justifier que $P\left(\overline{B} \cap F\right) = 0,072$.

2. Calculer $P_F\left(\overline{B}\right)$.

3. On choisit un consommateur n'achetant pas régulièrement des produits issus de l'agriculture biologique.
Quelle est la probabilité qu'il privilégie les produits de fabrication française ?

Partie B

Le commerçant s'intéresse à la quantité en kilogramme de farine biologique vendue chaque mois au détail dans son magasin. Cette quantité est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 90$ et d'écart type $\sigma = 2$.

1. Au début de chaque mois, le commerçant s'assure d'avoir 95 kg dans son stock.
Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas répondre à la demande des clients durant le mois ?

2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel a tel que $P(X < a) = 0,02$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Dans cette étude de marché, il est précisé que 46,8 % des consommateurs en France privilégient des produits locaux. Le commerçant constate que parmi ses 2 500 clients, 1 025 achètent régulièrement des produits locaux.
Sa clientèle est-elle représentative des consommateurs en France ?

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.
Lors de la repousse, on modélise la longueur en centimètre de la queue du lézard en fonction du nombre de jours.
Cette longueur est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 10\mathrm{e}^{u(x)}$$

où u est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$u(x) = -\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Vérifier que pour tout x positif on a $f'(x) = -u(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
En déduire le sens de variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Calculer $f(20)$.
En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.

b. Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?

3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale.
On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$.
On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, on note f'' la fonction dérivée de f' et on admet que :

$$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)\mathrm{e}^{u(x)}(1+u(x)).$$

a. Déterminer les variations de f' sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Deux espèces de tortues endémiques d'une petite île de l'océan pacifique, les tortues vertes et les tortues imbriquées, se retrouvent lors de différents épisodes reproducteurs sur deux des plages de l'île pour pondre. Cette île, étant le point de convergence de nombreuses tortues, des spécialistes ont décidé d'en profiter pour recueillir différentes données sur celles-ci.

Ils ont dans un premier temps constaté que les couloirs empruntés dans l'océan par chacune des deux espèces pour arriver sur l'île pouvaient être assimilés à des trajectoires rectilignes.
Dans la suite, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ d'unité 100 mètres.
Le plan $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ représente le niveau de l'eau et on admet qu'un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ avec $z < 0$ se situe dans l'océan.
La modélisation des spécialistes établit que :

- la trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues vertes a pour support la droite $\mathcal{D}_1$ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{l c r}x &=& 3+t\\ y &=& 6t\\ z &=& -3t\end{array}\right. \quad \text{avec } t \text{ réel};$$

- la trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues imbriquées a pour support la droite $\mathcal{D}_2$ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{l c r}x &=& 10k\\ y &=& 2+6k\\ z &=& -4k\end{array}\right. \quad \text{avec } k \text{ réel};$$

1. Démontrer que les deux espèces ne sont jamais amenées à se croiser avant d'arriver sur l'île.

2. L'objectif de cette question est d'estimer la distance minimale séparant ces deux trajectoires.

a. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\13\\27\end{pmatrix}$ est normal aux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

b. On admet que la distance minimale entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est la distance HH′ où $\overrightarrow{HH'}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{n}$ avec H appartenant à la droite $\mathcal{D}_1$ et H′ appartenant à la droite $\mathcal{D}_2$.
Déterminer une valeur arrondie en mètre de cette distance minimale.
On pourra utiliser les résultats ci-après fournis par un logiciel de calcul formel

⊳ Calcul formel	
1	Résoudre($\{10*k-3-t=3*l, 2+6*k-6*t=13*l, -4*k+3*t=27*l\}, \{k,\ l,\ t\}$) $\to \left\{\left\{k=\dfrac{675}{1814},\ \ell=\dfrac{17}{907},\ t=\dfrac{603}{907}\right\}\right\}$

3. Les scientifiques décident d'installer une balise en mer.
Elle est repérée par le point B de coordonnées $(2\,;4\,;0)$.

a. Soit M un point de la droite $\mathcal{D}_1$.
Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

b. En déduire la distance minimale, arrondie au mètre, entre la balise et les tortues vertes.

EXERCICE 4 — 3 points

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère les points A, B, C et D distincts d'affixes respectives z_{A}, z_{B}, z_{C} et z_{D} tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_{\text{A}}+\ z_{\text{C}} &=& z_{\text{B}}+\ z_{\text{D}}\\ z_{\text{A}}+\text{i}z_{\text{B}} &=& z_{\text{C}}+\text{i}z_{\text{D}}\end{array}\right.$$

Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

EXERCICE 5 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit k un réel strictement positif.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$, $u_1=k$ et, pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+2}=\frac{u_{n+1}^2}{ku_n}.$$

On admet que tous les termes de la suite (u_n) existent et sont strictement positifs.

1. Exprimer u_2, u_3 et u_4 en fonction de k.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes de la suite (u_n) pour deux valeurs de k.
La valeur du réel k est entrée dans la cellule E2.

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	n	$u(n)$				1	n	$u(n)$			
2	0	1		$k=$	2,718 281 8	2	0	1		$k=$	0,9
3	1	2,718 281 8				3	1	0,9			
4	2	2,718 281 8				4	2	0,9			
5	3	1				5	3	1			
6	4	0,135 335 3				6	4	1,234 567 9			
7	5	0,006 731 9				7	5	1,693 508 8			
8	6	0,000 123 4				8	6	2,581 174 8			
9	7	8,315E−07				9	7	4,371 242 2			
10	8	2,061E−09				10	8	8,225 263 3			
11	9	1,88E−12				11	9	17,196 982			
12	10	6,305E−16				12	10	39,949 576			
13	11	7,781E−20				13	11	103,116 84			
14	12	3,533E−24				14	12	295,736 2			
15	13	5,9E−29				15	13	942,403 49			
16	14	3,625E−34				16	14	3 336,773 8			

a. Quelle formule, saisie dans la cellule B4, permet par recopie vers le bas de calculer tous les termes de la suite (u_n) ?

b. Conjecturer, dans chaque cas, la limite de la suite (u_n).

Dans la suite, on suppose que $k = \mathrm{e}$.

On a donc $u_0 = 1$, $u_1 = \mathrm{e}$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{\mathrm{e}u_n}$.

[resume]On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

1. **a.** Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison -1 et de premier terme $v_0 = 1$.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

2. On définit, pour tout entier naturel n non nul la suite (S_n) par $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $S_n = \dfrac{n(3-n)}{2}$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $S_n = \ln(u_n)$.

3. **a.** Exprimer u_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (u_n).

b. Trouver la plus petite valeur de n telle que $u_n < 10^{-50}$ par la méthode de votre choix (écriture d'un algorithme, résolution d'inéquation, etc.)

EXERCICE 5 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout entier naturel n , on note F_n le n-ième nombre de Fermat. Il est défini par

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

Partie A :

Pierre de Fermat, leur inventeur, a conjecturé que :

« Tous les nombres de Fermat sont premiers »,

L'objectif est de tester cette conjecture.

1. **a.** Calculer F_0, F_1, F_2 et F_3.

b. Peut-on en déduire que tous les nombres de Fermat sont premiers ?

2. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
F ← 2^(2^5) + 1
N ← 2
Tant que F%N ≠ 0
    N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

$F\%N$ désigne le reste de la division euclidienne de F par N.

La valeur affichée à la fin de l'exécution est 641.
Que peut-on en déduire ?

Partie B :

L'objectif est de prouver que deux nombres de Fermat distincts sont toujours premiers entre eux.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a $F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1$.

2. Pour tout entier naturel n on note :

$$\prod_{i=0}^{n} F_i = F_0 \times F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_{n-1} \times F_n.$$

On a donc $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} F_i = \left(\prod_{i=0}^{n-1} F_i\right) \times F_n$.

Montrer par récurrence et en utilisant le résultat de la question précédente que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2.$$

3. Justifier que, pour tous entiers naturels n et m tels que $n > m$, il existe un entier naturel q tel que $F_n - qF_m = 2$.
4. En déduire que deux nombres de Fermat sont toujours premiers entre eux.

☙ Baccalauréat S – Nouvelle Calédonie ❧
27 novembre 2018

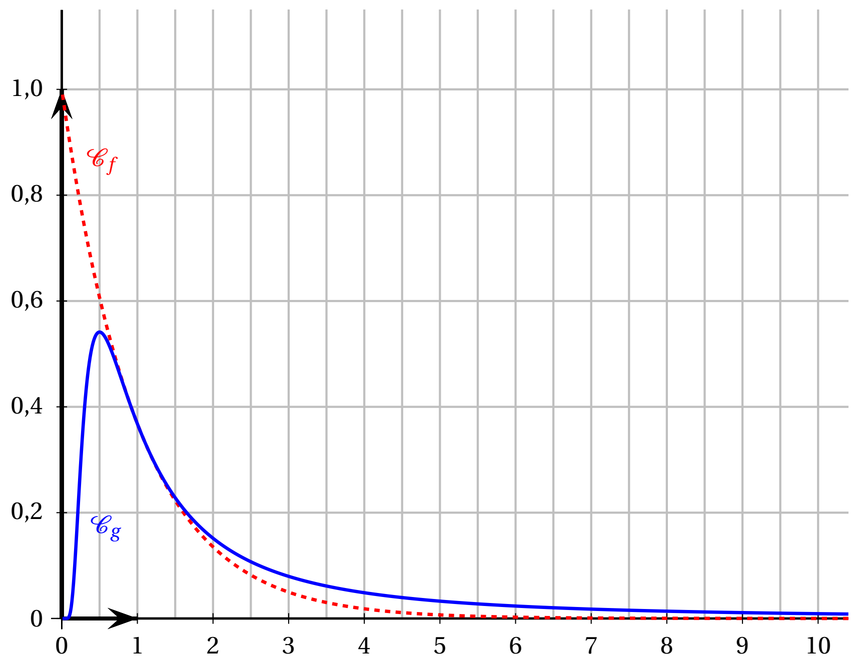
Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

On admet que f et g sont dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$. On note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.
Les représentations graphiques de f et g dans un repère orthogonal, nommées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données ci-dessous :



Partie A – Conjectures graphiques

Dans chacune des questions de cette partie, aucune explication n'est demandée.

1. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $g'(x) = 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B – Étude de la fonction g

1. Calculer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. On admet que la fonction g est strictement positive sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \ln\big(g(x)\big)$.
   a. Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif,
   $$h(x) = \frac{-1 - 2x\ln x}{x}.$$
   b. Calculer la limite de $h(x)$ quand x tend vers 0.
   c. En déduire la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0.

3. Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$g'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\left(1-2x\right)}{x^4}.$$

4. En déduire les variations de la fonction g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie C – Aire des deux domaines compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

1. Démontrer que la point A de coordonnées $\left(1\ ;\ \mathrm{e}^{-1}\right)$ est un point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

On admet que ce point est l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 1[$ et en dessous sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

2. Soient a et b deux réels strictement positifs. Démontrer que

$$\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-a}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}-\mathrm{e}^{-b}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{b}}.$$

3. Démontrer que

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x = 1-2\mathrm{e}^{-1}.$$

4. On admet que

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \left(g(x)-f(x)\right)\mathrm{d}x.$$

Interpréter graphiquement cette égalité.

Exercice 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

Une épreuve de culture générale consiste en un questionnaire à choix multiple (QCM) de vingt questions. Pour chacune d'entre elles, le sujet propose quatre réponses possibles, dont une seule est correcte. À chaque question, le candidat ou la candidate doit nécessairement choisir une seule réponse. Cette personne gagne un point par réponse correcte et ne perd auxun point si sa réponse est fausse.

On considère trois candidats :

- Anselme répond complètement au hasard à chacune des vingt questions.
  Autrement dit, pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est égale à $\dfrac{1}{4}$;
- Barbara est un peu mieux préparée. On considère que pour chacune des vingt questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\dfrac{1}{2}$;
- Camille fait encore mieux : pour chacune des questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\dfrac{2}{3}$.

1. On note X, Y et Z les variables aléatoires égales aux notes respectivement obtenues par Anselme, Barbara et Camille.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

b. À l'aide de la calculatrice, donner l'arrondi au millième de la probabilité $P(X \geqslant 10)$.

Dans la suite, on admettra que $P(Y \geqslant 10) \approx 0,588$ et $P(Z \geqslant 10) \approx 0,962$.

2. On choisit au hasard la copie d'un de ces trois candidats.

On note A, B, C et M les évènements :

- A : « la copie choisie est celle d'Anselme » ;
- B : « la copie choisie est celle de Barbara » ;
- C : « la copie choisie est celle de Camille » ;
- M : « la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 ».

On constate, après l'avoir corrigée, que la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 sur 20.

Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la copie de Barbara ?

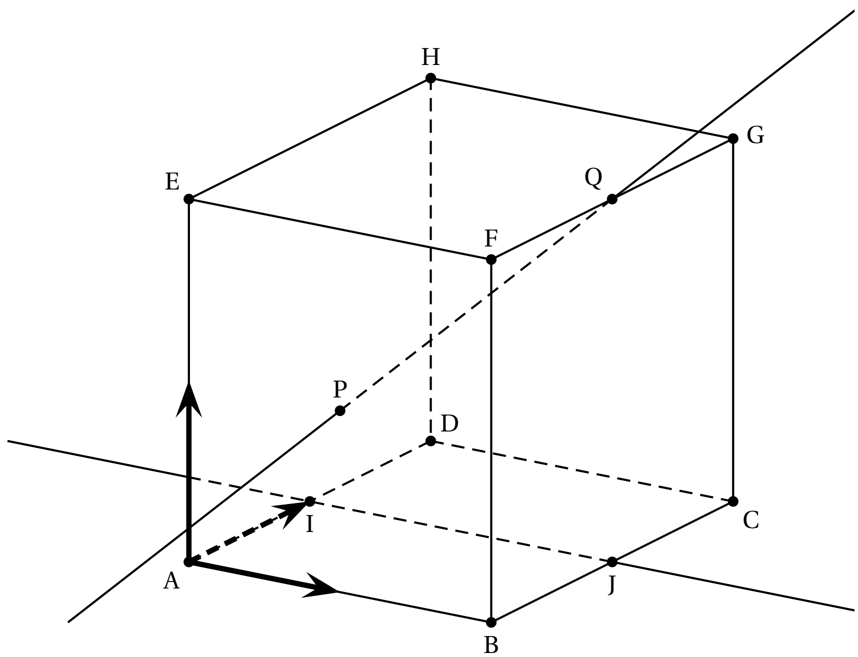
On donnera l'arrondi au millième de cette probabilité.

Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit ABCDEFGH le cube représenté ci-dessous.
On considère :

- I et J les milieux respectifs des segments [AD] et [BC] ;
- P le centre de la face ABFE, c'est-à-dire l'intersection des diagonales (AF) et (BE) ;
- Q le milieu du segment [FG].



On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ,\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\ ,\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.
Dans tout l'exercice, on pourra utiliser les coordonnées des points de la figure sans les justifier.
On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (IJ) est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& r\\ y &=& 1\\ z &=& 0\end{array}\right. \quad ,\quad r \in \mathbb{R}$$

1. Vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& t\\ z &=& 1+t\end{array}\right. \quad ,\quad t \in \mathbb{R}$$

Soient t un nombre réel et M $(1+t\ ;\ t\ ;\ 1+t)$ le point de la droite (PQ) de paramètre t.

2. **a.** On admet qu'il existe un unique point K appartenant à la droite (IJ) tel que (MK) soit orthogonale à (IJ).
Démontrer que les coordonnées de ce point K sont $(1+t\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

b. En déduire que $\text{MK} = \sqrt{2+2t^2}$.

3. **a.** Vérifier que $y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (HGB).

b. On admet qu'il existe un unique point L appartenant au plan (HGB) tel que (ML) soit orthogonale à (HGB).

Vérifier que les coordonnées de ce point L sont $\left(1+t\,;\,\dfrac{1}{2}+t\,;\,\dfrac{1}{2}+t\right)$.

c. En déduire que la distance ML est indépendante de t.

4. Existe-t-il une valeur de t pour laquelle la distance MK est égale à la distance ML ?

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On définit la suite de nombres complexes (z_n) de la manière suivante : $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}\mathrm{i}.$$

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point du plan d'affixe z_n.
Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = z_n - \mathrm{i}$ et on note B_n le point d'affixe u_n.
On note C le point d'affixe i.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout entier naturel n.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (1-\mathrm{i}).$$

3. a. Pour tout entier naturel n, calculer, en fonction de n, le module de u_n.

b. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|z_n - \mathrm{i}\right| = 0.$$

c. Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat ?

4. a. Soit n un entier naturel. déterminer un argument de u_n.

b. Démontrer que, lorsque n décrit l'ensemble des entiers naturels, les points B_n sont alignés.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite d'équation réduite :

$$y = -x + 1.$$

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On appelle suite de Fibonacci la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.
Les parties A *et* B *peuvent être traitées de façon indépendante.*

Partie A

1. a. Calculer les termes de la suite de Fibonacci jusqu'à u_{10}.

b. Que peut-on conjecturer sur le PGCD de u_n et u_{n+1} pour tout entier naturel n ?

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n^2 - u_{n+1} \times u_{n-1}$ pour tout entier naturel n non nul.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $v_{n+1} = -v_n$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n^2 - u_{n+1} \times u_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

c. Démontrer alors la conjecture émise à la question **1. b.**

Partie B

On considère la matrice $F = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

1. Calculer F^2 et F^3. On pourra utiliser la calculatrice.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$F^n = \begin{pmatrix}u_{n+1} & u_n\\ u_n & u_{n-1}\end{pmatrix}$$

3. **a.** Soit n un entier naturel non nul. En remarquant que $F^{2n+2} = F^{n+2} \times F^n$, démontrer que

$$u_{2n+2} = u_{n+2} \times u_{n+1} + u_{n+1} \times u_n.$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{2n+2} = u_{n+2}^2 - u_n^2.$$

4. On donne $u_{12} = 144$.
   Démontrer en utilisant la question **3.** qu'il existe un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont toutes des nombres entiers, l'une étant égale à 12.
   Donner la longueur des deux autres côtés.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Pondichéry 26 avril 2017 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A, B *et* C *peuvent être traitées de façon indépendante.*

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.

Partie A

À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.

La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :

A l' évènement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ;

C l'évènement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».

On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1. Montrer que $P(C) = 0,03x + 0,95$.
2. À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable.

   Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

Partie B

Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocolat. Sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans.

   Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.
2. Calculer $P(Z > 2)$.
3. Sachant que la machine de l'atelier a déjà fonctionné pendant 3 ans, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans ?

Partie C

On note X la variable aléatoire donnant la teneur en cacao, exprimée en pourcentage, d'une tablette de 100 g de chocolat commercialisable. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 85$ et d'écart type $\sigma = 2$.

1. Calculer $P(83 < X < 87)$.

   Quelle est la probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2 % du pourcentage annoncé sur l'emballage ?
2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel a tel que :

$$P(85 - a < X < 85 + a) = 0,9.$$

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
3. La chocolaterie vend un lot de 10 000 tablettes de chocolat à une enseigne de la grande distribution. Elle affirme au responsable achat de l'enseigne que, dans ce lot, 90 % des tablettes ont un pourcentage de cacao appartenant à l'intervalle [81,7 ; 88,3].

   Afin de vérifier si cette affirmation n'est pas mensongère, le responsable achat fait prélever 550 tablettes au hasard dans le lot et constate que, sur cet échantillon, 80 ne répondent pas au critère.

   Au vu de l'échantillon prélevé, que peut-on conclure quant à l'affirmation de la chocolaterie ?*

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

1. On considère l'équation

$$(E): \qquad z^2 - 6z + c = 0$$

où c est un réel strictement supérieur à 9.

a. Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.

b. Justifier que les solutions de (E) sont $z_{\text{A}} = 3 + \text{i}\sqrt{c-9}$ et $z_{\text{B}} = 3 - \text{i}\sqrt{c-9}$.

2. On note A et B les points d'affixes respectives z_{A} et z_{B}.
Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.

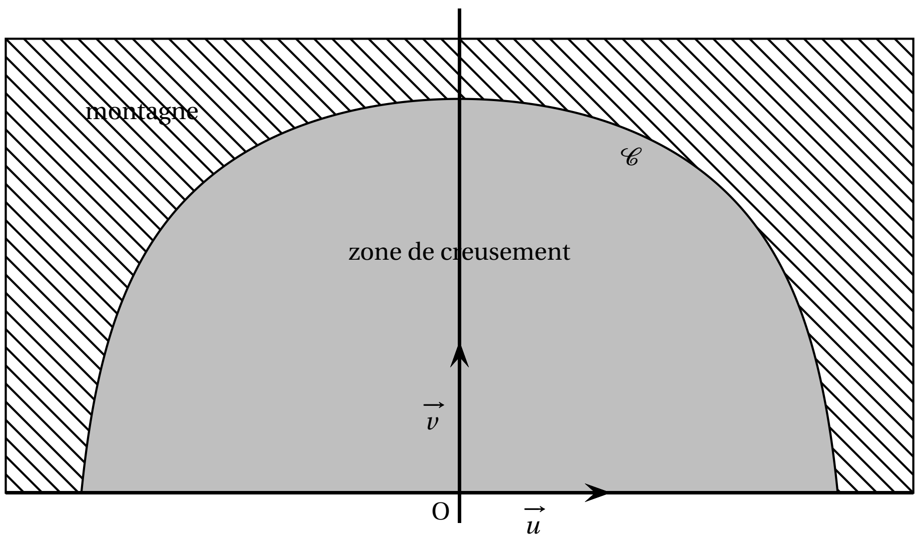
3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

*

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise spécialisée dans les travaux de construction a été mandatée pour percer un tunnel à flanc de montagne.
Après étude géologique, l'entreprise représente dans le plan la situation de la façon suivante : dans un repère orthonormal, d'unité 2 m, la zone de creusement est la surface délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.



On admet que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2,5\ ;\ 2,5]$ par :

$$f(x) = \ln\left(-2x^2 + 13,5\right).$$

L'objectif est de déterminer une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [-2,5\ ;\ 2,5]$.

2. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur $[-2,5\ ;\ 2,5]$.
En déduire le signe de f sur $[-2,5\ ;\ 2,5]$.

Partie B : Aire de la zone de creusement

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

1. La courbe $\mathscr{C}$ est-elle un arc de cercle de centre O ? Justifier la réponse.

2. Justifier que l'aire, en mètre carré, de la zone de creusement est
$\mathscr{A} = 8\int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. L'algorithme, donné en annexe, permet de calculer une valeur approchée par défaut de $I = \int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$, notée a.

   On admet que : $a \leqslant I \leqslant a + \dfrac{f(0) - f(2,5)}{n} \times 2,5$.

   a. Le tableau fourni en annexe, donne différentes valeurs obtenues pour R et S lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.
   Compléter ce tableau en calculant les six valeurs manquantes.

   b. En déduire une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

*

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?
2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	l3	24 587	8 192

   Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a
$u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_0 = v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + v_n.$$

On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels non nuls.

Partie A : Conjectures

Flore a calculé les premiers termes des suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	3
4	2	19	13
5	3	77	51
6	4	307	205

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des suites ?

2. Soit n un entier naturel.
Conjecturer la valeur de PGCD$(u_n\ ;\ v_n)$. Aucune justification n'est demandée.

3. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Flore obtient les résultats suivants :

12	10	1 258 291	838 861
13	Il	5 033 165	3 355 443
14	12	20 132 659	13 421 773
15	13	80 530 637	53 687 091

Elle émet la conjecture : « la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge ».
Qu'en penser ?

Partie B : Étude arithmétique

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
$2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$.

2. Soit n un entier naturel.
Déduire de la question précédente la valeur de PGCD$(u_n\ ;\ v_n)$.

Partie C : Étude matricielle

Pour tout entier naturel n, on définit :

- la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$,
- les matrices carrées $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix}$.

1. a. Montrer que la matrice $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de P.

b. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $X_n = Q_n P^{-1} X_0$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $\left\{\begin{array}{l c l} u_n & = & \dfrac{(-1)^{n+1} + 3\times 2^{2n+1}}{5}\\ v_n & = & \dfrac{(-1)^{n} + 2^{2n+2}}{5}\end{array}\right.$

2. a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\frac{(-1)^{n}}{2^{2n+1}} + 2}$.

b. En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

*

EXERCICE 5 **3 points**

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH fourni en annexe.
L'espace est rapporté au repère $\left(\text{A}~;~\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{3}z - 1 = 0$.
Construire, sur la figure fournie en annexe, la section du cube par le plan $\mathcal{P}$.
La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.*

ANNEXE à compléter et à remettre avec la copie

EXERCICE 3

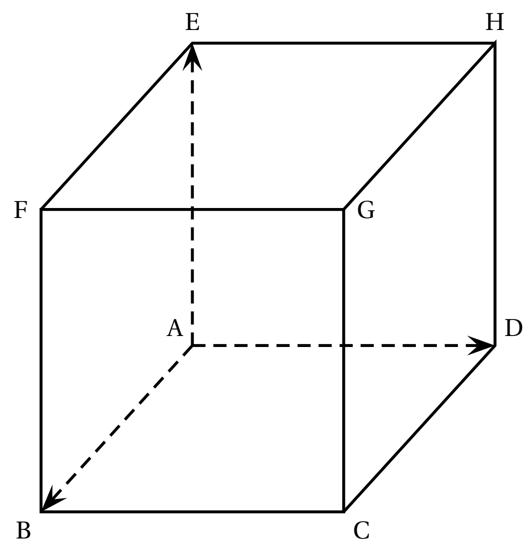
Variables
  R et S sont des réels
  n et k sont des entiers
Traitement
  S prend la valeur 0
  Demander la valeur de n
  Pour k variant de 1 à n faire
    R prend la valeur $\dfrac{2,5}{n} \times f\left(\dfrac{2,5}{n} \times k\right)$
    S prend la valeur $S + R$
  Fin Pour
  Afficher S

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de R et de S, arrondies à 10^{-6}, obtenues lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.

Initialisation	$S = 0,\ n = 50$		
Boucle Pour	Étape k	R	S
	1	…	…
	2	0,130 060	0,260 176
	3	0,129 968	0,390 144
	4	0,129 837	…
	⋮		⋮
	24	0,118 137	3,025 705
	25	0,116 970	3,142 675
	⋮		⋮
	49	0,020 106	5,197 538
	50	…	…
Affichage	$S = \dots$		

ANNEXE à compléter et à remettre avec la copie

EXERCICE 5



Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat S Amérique du Nord ∾ 2 juin 2017

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, les valeurs seront, si nécessaire, approchées au millième.
Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Dans le cadre de son activité, une entreprise reçoit régulièrement des demandes de devis. Les montants de ces devis sont calculés par son secrétariat. Une étude statistique sur l'année écoulée conduit à modéliser le montant des devis par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 2\,900$ euros et d'écart-type $\sigma = 1\,250$ euros.

1. Si on choisit au hasard une demande de devis reçue par l'entreprise, quelle est la probabilité que le montant du devis soit supérieur à 4 000 euros ?
2. Afin d'améliorer la rentabilité de son activité, l'entrepreneur décide de ne pas donner suite à 10 % des demandes. Il écarte celles dont le montant de devis est le moins élevé. Quel doit être le montant minimum d'un devis demandé pour que celui-ci soit pris en compte ?
   Donner ce montant à l'euro près.

Partie B

Ce même entrepreneur décide d'installer un logiciel anti-spam, Ce logiciel détecte les messages indésirables appelés spams (messages malveillants, publicités, etc.) et les déplace dans un fichier appelé « dossier spam ». Le fabricant affirme que 95 % des spams sont déplacés. De son côté, l'entrepreneur sait que 60 % des messages qu'il reçoit sont des spams. Après installation du logiciel, il constate que 58,6 % des messages sont déplacés dans le dossier spam. Pour un message pris au hasard, on considère les évènements suivants :

- D : « le message est déplacé » ;
- S : « le message est un spam ».

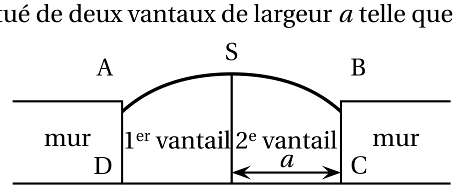
1. Calculer $P(S \cap D)$.
2. On choisit au hasard un message qui n'est pas un spam. Montrer que la probabilité qu'il soit déplacé est égale à 0,04.
3. On choisit au hasard un message non déplacé. Quelle est la probabilité que ce message soit un spam ?
4. Pour le logiciel choisi par l'entreprise, le fabricant estime que 2,7 % des messages déplacés vers le dossier spam sont des messages fiables. Afin de tester l'efficacité du logiciel, le secrétariat prend la peine de compter le nombre de messages fiables parmi les messages déplacés. Il trouve 13 messages fiables parmi les 231 messages déplacés pendant une semaine.
   Ces résultats remettent-ils en cause l'affirmation du fabricant ?

*

Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0 < a \leqslant 2$.

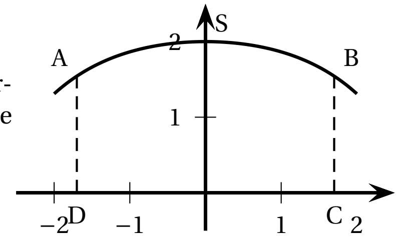
Dans le modèle choisi, le portail fermé a la forme illustrée par la figure ci-contre. Les côtés [AD] et [BC] sont perpendiculaires au seuil [CD] du portail. Entre les points A et B, le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe.



Cette portion de courbe est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par :

$$f(x) = -\frac{b}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right) + \frac{9}{4} \quad \text{où } b > 0.$$

Le repère est choisi de façon que les points A, B, C et D aient pour coordonnées respectives $(-a\,;\, f(-a))$, $(a\,;\, f(a))$, $(a\,;\, 0)$ et $(-a\,;\, 0)$ et on note S le sommet de la courbe de f, comme illustré ci-contre.



Partie A

1. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-2\,;\,2]$, $f(-x) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?
2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\,;\,2]$:

$$f'(x) = -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right).$$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;\,2]$ et en déduire les coordonnées du point S en fonction de b.

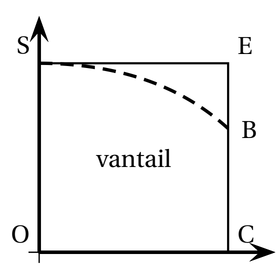
Partie B

La hauteur du mur est de 1,5 m. On souhaite que le point S soit à 2 m du sol. On cherche alors les valeurs de a et b.

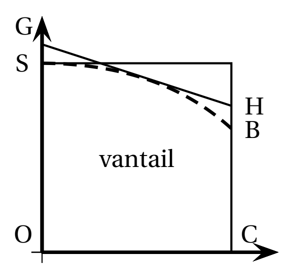
1. Justifier que $b = 1$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ et en déduire une valeur approchée de a au centième.
3. Dans cette question, on choisit $a = 1,8$ et $b = 1$. Le client décide d'automatiser son portail si la masse d'un vantail excède 60 kg. La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à 20 kg.m^{-2}. Que décide le client ?

Partie C

On conserve les valeurs $a = 1,8$ et $b = 1$.
Pour découper les vantaux, le fabricant prédécoupe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un rectangle OCES, soit un trapèze OCHG comme dans les schémas ci-dessous. Dans la deuxième méthode, la droite (GH) est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point F d'abscisse1.



Forme 1 : découpe dans un rectangle



Forme 2 : découpe dans un trapèze

La forme 1 est la plus simple, mais visuellement la forme 2 semble plus économique.
Évaluer l'économie réalisée en termes de surface de bois en choisissant la forme 2 plutôt que la forme 1.

On rappelle la formule donnant l'aire d'un trapèze. En notant b et B respectivement les longueurs de la petite base et de la grande base du trapèze (côtés parallèles) et h la hauteur du trapèze :

$$\text{Aire} = \frac{b+B}{2} \times h.$$

*

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.

On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n). Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$,
- pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$,
- pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.

1. On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2.

2. Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.
On a en particulier $s_1 = u_0$.

a. Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

b. En déduire que pour tout entier $n > 0$,

$$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}.$$

c. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 1$.

3. À l'aide de l'algorithme ci-contre, on veut calculer le terme u_n pour une valeur de n donnée.

a. Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-contre.

b. Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

Entrée :	Saisir n
	Saisir u
Traitement :	s prend la valeur u
	Pour i allant de 1 à n :
	u prend la valeur …
	s prend la valeur …
	Fin Pour
Sortie :	Afficher u

4. **a.** Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.

b. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).

*

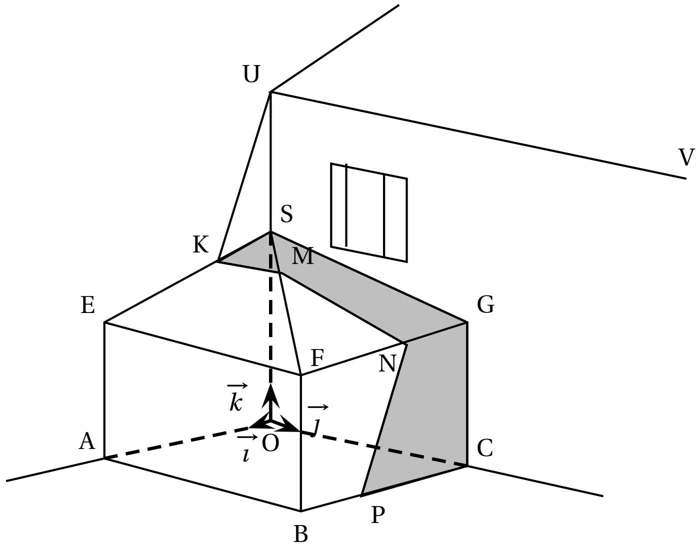
Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un particulier s'intéresse à l'ombre portée sur sa future véranda par le toit de sa maison quand le soleil est au zénith. Cette véranda est schématisée ci-dessous en perspective cavalière dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Le toit de la véranda est constitué de deux faces triangulaires SEF et SFG.

- Les plans (SOA) et (SOC) sont perpendiculaires.
- Les plans (SOC) et (EAB) sont parallèles, de même que les plans (SOA) et (GCB).
- Les arêtes [UV] et [EF] des toits sont parallèles.

Le point K appartient au segment [SE], le plan (UVK) sépare la véranda en deux zones, l'une éclairée et l'autre ombragée. Le plan (UVK) coupe la véranda selon la ligne polygonale KMNP qui est la limite ombre-soleil.



1. Sans calcul, justifier que :
   a. le segment [KM] est parallèle au segment [UV] ;
   b. le segment [NP] est parallèle au segment [UK].
2. Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Les coordonnées des différents points sont les suivantes : A(4 ; 0 ; 0), B(4 ; 5 ; 0), C(0 ; 5 ; 0),
   E(4 ; 0 ; 2, 5), F(4 ; 5 ; 2,5), G(0 ; 5 ; 2,5), S(0 ; 0 ; 3,5), U(0 ; 0 ; 6) et V(0 ; 8 ; 6).
   On souhaite déterminer de façon exacte la section des faces visibles de la véranda par le plan (UVK) qui sépare les zones ombragée et ensoleillée.
   a. Au moment le plus ensoleillé, le point K a pour abscisse 1, 2. Vérifier que les coordonnées du point K sont (1,2 ; 0 ; 3,2).
   b. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (7 ; 0 ; 3) est un vecteur normal au plan (UVK) et en déduire une équation cartésienne du plan (UVK).
   c. Déterminer les coordonnées du point N intersection du plan (UVK) avec la droite (FG).
   d. Expliquer comment construire la ligne polygonale sur le schéma de la véranda.
3. Afin de faciliter l'écoulement des eaux de pluie, l'angle du segment [SG] avec l'horizontale doit être supérieur à 7°. Cette condition est-elle remplie ?

*

Exercice 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Partie A

Une association gère des activités pour des enfants. Elle propose deux programmes d'activités, le programme A : cirque - éveil musical, et le programme B : théâtre - arts plastiques.
À sa création en 2014, l'association compte 150 enfants qui suivent tous le programme A.
Pour chacune des années suivantes, le nombre d'enfants inscrits dans l'association reste égal à 150.
On dispose également des informations suivantes :
Chaque enfant ne peut suivre qu'un seul programme : soit le programme A, soit le programme B.
D'une année à l'autre, 20 % des inscrits au programme A choisissent à nouveau le programme A, alors que 40 % choisissent le programme B. Les autres quittent l'association.
D'une année à l'autre, 60 % des inscrits au programme B choisissent à nouveau le programme B et les autres quittent l'association.
Les nouveaux inscrits, qui compensent les départs, suivent obligatoirement le programme A.

On modélise le nombre d'inscrits au programme A et le nombre d'inscrits au programme B durant l'année $2014+n$ respectivement par deux suites (a_n) et (b_n) et on note U_n la matrice ligne $\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$. On a donc $U_0 = \begin{pmatrix}150 & 0\end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} = U_n M$ où $M = \begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\0,4 & 0,6\end{pmatrix}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix}75+75\times 0,2^n & 75-75\times 0,2^n\end{pmatrix}$.

3. En déduire la répartition des effectifs à long terme entre les deux programmes.

Partie B

L'association affecte à chaque enfant un numéro à 6 chiffres $c_1c_2c_3c_4c_5k$. Les deux premiers chiffres représentent l'année de naissance de l'enfant les trois suivants sont attribués à l'enfant au moment de sa première inscription. Le dernier chiffre, appelé clé de contrôle, est calculé automatiquement de la façon suivante :

- on effectue la somme $S = c_1 + c_3 + c_5 + a \times (c_2 + c_4)$ où a est un entier compris entre 1 et 9 ;
- on effectue la division euclidienne de S par 10, le reste obtenu est la clé k.

Lorsqu'un employé saisit le numéro à 6 chiffres d'un enfant, on peut détecter une erreur de saisie lorsque le sixième chiffre n'est pas égal à la clé de contrôle calculée à partir des cinq premiers chiffres.

1. Dans cette question seulement, on choisit $a = 3$.

a. Le numéro 111383 peut-il être celui d'un enfant inscrit à l'association ?

b. L'employé, confondant un frère et une sœur, échange leurs années de naissance : 2008 et 2011. Ainsi, le numéro $08c_3c_4c_5k$ est transformé en $11c_3c_4c_5k$. Cette erreur est-elle détectée grâce à la clé ?

2. On note $c_1c_2c_3c_4c_5k$ le numéro d'un enfant. On cherche les valeurs de l'entier a pour lesquelles la clé détecte systématiquement la faute de frappe lorsque les chiffres c_3 et c_4 sont intervertis. On suppose donc que les chiffres c_3 et c_4 sont distincts.

a. Montrer que la clé ne détecte pas l'erreur d'interversion des chiffres c_3 et c_4 si et seulement si $(a-1)(c_4-c_3)$ est congru à 0 modulo 10.

b. Déterminer les entiers n compris entre 0 et 9 pour lesquels il existe un entier p compris entre 1 et 9 tel que $np \equiv 0 \quad (10)$.

c. En déduire les valeurs de l'entier a qui permettent, grâce à la clé, de détecter systématiquement l'interversion des chiffres c_3 et c_4.

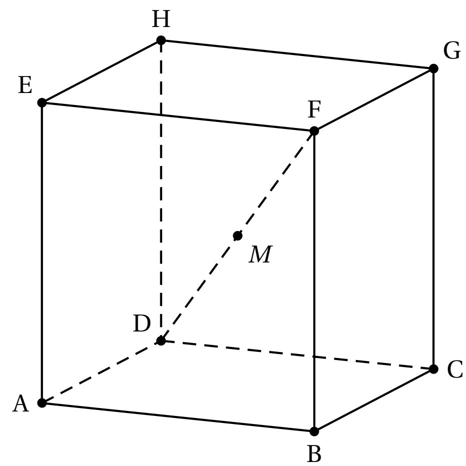
*

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Liban
5 juin 2017

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats



On considère un cube ABCDEFGH dont la représentation graphique en perspective cavalière est donnée ci-contre.
Les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{D}\ ;\ \overrightarrow{\text{DA}},\ \overrightarrow{\text{DC}},\ \overrightarrow{\text{DH}}\right)$.

Partie A

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{DF}}$ est normal au plan (EBG).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).
3. En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).
   On démontrerait de la même manière que le point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$.

Partie B

À tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, on associe le point M du segment [DF] tel que
$\overrightarrow{\text{D}M} = x\overrightarrow{\text{DF}}$.
On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{\text{E}M\text{B}}$ lorsque le point M parcourt le segment [DF]. On a $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? avec le point F ?
2. **a.** Justifier que les coordonnées du point M sont $(x\ ;\ x\ ;\ x)$.

   b. Montrer que $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$. On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{M\text{E}}$ et $\overrightarrow{M\text{B}}$.
3. On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction

$$f\ :\ x \longmapsto \frac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}.$$

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
Variations de f	$\frac{1}{2}$ ↘	0 ↘	$-\frac{1}{2}$ ↗	0

Pour quelles positions du point M sur le segment [DF] :

a. le triangle MEB est-il rectangle en M ?

b. l'angle θ est-il maximal ?

*

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on étudie quelques grandeurs caractéristiques du fonctionnement des parkings d'une ville.
Dans tout l'exercice, les probabilités seront données avec une précision de 10^{-4}.

Les parties A, B, *et* C *sont indépendantes*

Partie A - Durée d'attente pour entrer dans un parking souterrain

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking. Le tableau suivant présente les observations faites sur une journée.

Durée d'attente en minute	$[0\,;2[$	$[2\,;4[$	$[4\,;6[$	$[6\,;8[$
Nombre de voitures	75	19	10	5

1. Proposer une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking.
2. On décide de modéliser cette durée d'attente par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ (exprimé en minute).
   a. Justifier que l'on peut choisir $\lambda = 0,5$ min.
   b. Une voiture se présente à l'entrée du parking. Quelle est la probabilité qu'elle mette moins de deux minutes pour franchir la barrière ?
   c. Une voiture attend à l'entrée du parking depuis une minute. Quelle est la probabilité qu'elle franchisse la barrière dans la minute suivante ?

Partie B - Durée et tarifs de stationnement dans ce parking souterrain

Une fois garée, la durée de stationnement d'une voiture est modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 70$ min et d'écart-type $\sigma = 30$ min.

1. **a.** Quelle est la durée moyenne de stationnement d'une voiture ?
   b. Un automobiliste entre et se gare dans le parking. Quelle est la probabilité que sa durée de stationnement dépasse deux heures ?
   c. À la minute près, quel est le temps maximum de stationnement pour au moins 99 % des voitures ?
2. La durée de stationnement est limitée à trois heures. Le tableau donne le tarif de la première heure et chaque heure supplémentaire est facturée à un tarif unique. Toute heure commencée est due intégralement.

Durée de stationnement	Inférieure à 15 min	Entre 15 min et 1 h	Heure supplémentaire
Tarif en euros	Gratuit	3,5	t

Déterminer le tarif t de l'heure supplémentaire que doit fixer le gestionnaire du parking pour que le prix moyen de stationnement d'une voiture soit de 5 euros.

Partie C - Temps d'attente pour se garer dans un parking de centre-ville

La durée de stationnement d'une voiture dans un parking de centre-ville est modélisée par une variable aléatoire T' qui suit une loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'.
On sait que la moyenne du temps de stationnement dans ce parking est égale à 30 minutes et que 75 % des voitures ont un temps de stationnement inférieur à 37 minutes.
Le gestionnaire du parking vise l'objectif que 95 % des voitures aient un temps de stationnement entre 10 et 50 minutes. Cet objectif est-il atteint ?*

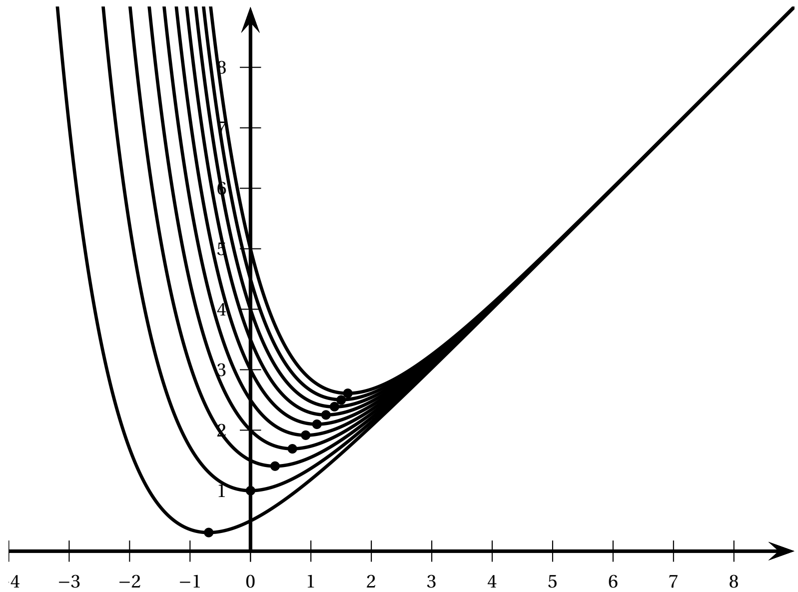
Exercice 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + k\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathcal{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathscr{C}_k$. il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.
Est-ce le cas ?*

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.
L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Partie A - Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à $1,30$ m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1[$ par :

$$f(x) = 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,1[$.
2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

Partie B

On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant, réalisé à l'aide d'un tableur, regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0,22	0,245	0,25								

1. **a.** Interpréter le nombre $0,245$ dans la cellule D3.
   b. Quelle formule doit-on entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite ?
2. Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à $1,30$ m du sol vaut 27 cm.
3. La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.
   a. Déterminer un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure en expliquant la démarche.
   b. Est-il cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un numéro de carte bancaire est de la forme :

$$a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6\,a_7\,a_8\,a_9\,a_{10}\,a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\,a_{14}\,a_{15}\,c$$

où a_1, a_2, …, a_{15} et c sont des chiffres compris entre 0 et 9.
Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.
c est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres.
L'algorithme suivant permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

Initialisation : I prend la valeur 0
  P prend la valeur 0
  R prend la valeur 0
Traitement : Pour k allant de 0 à 7 :
  R prend la valeur du reste de la division euclidienne de $2a_{2k+1}$ par 9
  I prend la valeur $I + R$
  Fin Pour
  Pour k allant de 1 à 7 :
  P prend la valeur $P + a_{2k}$
  Fin Pour
  S prend la valeur $I + P + c$
Sortie : Si S est un multiple de 10 alors :
  Afficher « Le numéro de la carte est correct. »
  Sinon :
  Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct. »
  Fin Si

1. On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.

a. Compléter le tableau en annexe permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I.

b. Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.

c. On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6.

Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu

$6a35$ 4002 9561 3411 reste correct ?

2. On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire.

Montrer qu'il existe une clé c rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.

3. Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct ? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.

4. On effectue le test suivant : on intervertit deux chiffres consécutifs distincts dans un numéro de carte correct et on vérifie si le numéro obtenu reste correct.

On a trouvé une situation où ce n'est pas le cas, l'un des deux chiffres permutés valant 1.

Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté ?*

Annexe

À rendre avec la copie

Exercice 4 – Question 1. a.
Candidats ayant sui l'enseignement de spécialité

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}								
$2a_{2k+1}$								
R								
I								

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers
13 juin 2017

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.).
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapportent aucun point.

On étudie la production d'une usine qui fabrique des bonbons, conditionnés en sachets.

On choisit un sachet au hasard dans la production journalière. La masse de ce sachet, exprimée en gramme, est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 175$. De plus, une observation statistique a montré que 2 % des sachets ont une masse inférieure ou égale à 170 g, ce qui se traduit dans le modèle considéré par : $P(X \leqslant 170) = 0,02$.

Question 1 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de l'évènement « la masse du sachet est comprise entre 170 et 180 grammes » ?

Réponse a : 0,04
Réponse b : 0,96
Réponse c : 0,98
Réponse d : On ne peut pas répondre car il manque des données.

Les différents bonbons présents dans les sachets sont tous enrobés d'une couche de cire comestible.
Ce procédé, qui déforme certains bonbons, est effectué par deux machines A et B.
Lorsqu'il est produit par la machine A, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à $0,05$.

Question 2 : Sur un échantillon aléatoire de 50 bonbons issus de la machine A, quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'au moins 2 bonbons soient déformés ?

Réponse a : 0,72
Réponse b : 0,28
Réponse c : 0,54
Réponse d : On ne peut pas répondre car il manque des données

La machine A produit un tiers des bonbons de l'usine. Le reste de la production est assuré par la machine B. Lorsqu'il est produit par la machine B, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à $0,02$.
Dans un test de contrôle, on prélève au hasard un bonbon dans l'ensemble de la production. Celui-ci est déformé.

Question 3 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit produit par la machine B ?

Réponse a : 0,02
Réponse b : 0,67
Réponse c : 0,44
Réponse d : 0,01

La durée de vie de fonctionnement, exprimée en jour, d'une machine servant à l'enrobage, est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle dont l'espérance est égale à 500 jours.

Question 4 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la durée de fonctionnement de la machine soit inférieure ou égale à 300 jours ?

Réponse a : 0,45
Réponse b : 1
Réponse c : 0,55
Réponse d : On ne peut pas répondre car il manque des données

L'entreprise souhaite estimer la proportion de personnes de plus de 20 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à $0,05$. Elle interroge pour cela un échantillon aléatoire de clients.

Question 5 : Quel est le nombre minimal de clients à interroger ?

Réponse a : 40
Réponse b : 400
Réponse c : 1600
Réponse d : 20

*

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.
On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{l c l} x &=& 2+t\\ y &=& 3-t\\ z &=& t \end{array}\right. , t\in\mathbb{R} \quad \text{e†} \quad \left\{\begin{array}{l c l} x &=& -5+2t'\\ y &=& -1+t'\\ z &=& 5 \end{array}\right. , t'\in\mathbb{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.
Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1. Vérifier que le point A(2 ; 3 ; 0) appartient à la droite d_1.
2. Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite d_2.
   Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?
3. Vérifier que le vecteur $\vec{v}\,(1\,;\,-2\,;\,-3)$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. ‘
4. Soit P le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}$.
   On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan P.
   a. Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $5x+4y-z-22=0$.
   b. Montrer que la droite d_2 coupe le plan P au point B (3 ; 3 ; 5) .
5. On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$, et passant par le point B (3 ; 3 ; 5).
   a. Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.
   b. Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.
   c. Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

*

Exercice 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.
On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.
Le modèle mathématique est : $f(t)=20\mathrm{e}^{-0,1t}$, avec $t\in[0\,;\,+\infty[$.
La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0)=20\,\mu$g.L^{-1}.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.
   Déterminer cette demi-vie, notée $t_{0,5}$.
2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2\mu$g.L^{-1}.
   Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.
3. En pharmacocinétique, on appelle ASC (ou « aire sous la courbe »), en μg.L^{-1}, le nombre $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Vérifier que pour ce modèle, l' ASC est égal à $200\,\mu$g.L^{-1}.

Partie B : administration par voie orale

On note $g(t)$ la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre (µg.L^{-1}), au bout de t heures après ingestion par voie orale.
Le modèle mathématique est : $g(t)=20\left(\mathrm{e}^{-0,1t}-\mathrm{e}^{-t}\right)$, avec $t\in[0\,;\,+\infty[$.
Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à : $g(0)=0\,\mu$g.L^{-1}.

1. Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, on a :
$g'(t) = 20\text{e}^{-t}\left(1 - 0,1\text{e}^{0,9t}\right)$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$. (On ne demande pas la limite en $+\infty$.)
En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale. On donnera le résultat à la minute près.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à-dire au nombre $t_{0,5}$ qui a été calculé en A - 1.
Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de 20μg.L^{-1}.
On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.
Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$.
On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit 20 μg.L^{-1}, est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit $f(0)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 μg.L-$^{-1}$.
Déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

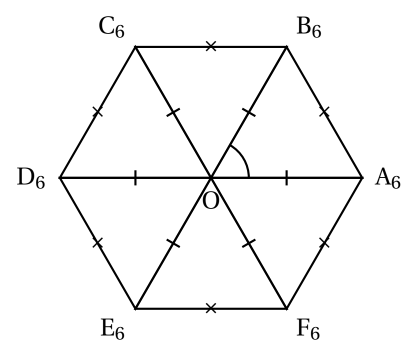
*

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle OA_nB_n donné, isocèle en O.
On note $r_n = \text{OA}_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$

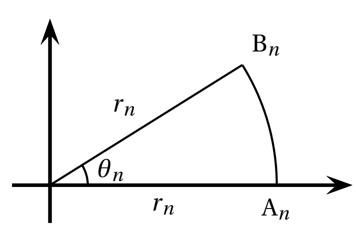
On a représenté ci-contre un polygone P_6.



1. Justifier le fait que le triangle OA_6B_6 est équilatéral, et que son aire est égale à $\dfrac{1}{6}$.
2. Exprimer en fonction de r_6 la hauteur du triangle OA_6B_6 issue du sommet B_6.
3. En déduire que $r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Partie B : cas général avec $n \geqslant 4$

Dans cette partie, on considère le polygone P_n avec $n \geqslant 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n.
On note alors $r_n\text{e}^{\text{i}\theta_n}$ l'affixe de B_n où θ_n est un réel de l'intervalle $\left]0~;~\dfrac{\pi}{2}\right]$.



1. Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B_n dans le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n)$.
2. On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1.
   Donner, en fonction de n, une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{OB}_n}\right)$, puis démontrer que :

$$r_n = \sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}.$$

Partie C : étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,\pi[$ par

$$f(x) = \dfrac{x}{\sin x}.$$

Ainsi, le nombre r_n, défini dans la partie B pour $n \geqslant 4$, s'exprime à l'aide de la fonction f par :

$$r_n = \sqrt{\dfrac{1}{\pi} f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}.$$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,\pi[$.

1. Montrer que la suite (r_n) est décroissante. On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout $n \geqslant 4$, on a : $0 < \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} < \pi$.
2. En déduire que la suite (r_n) converge. On ne demande pas de déterminer sa limite L, et on admet dans la suite de l'exercice que $L = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.
3. On considère l'algorithme suivant.

VARIABLES :	n est un nombre entier
TRAITEMENT :	n prend la valeur 4
	Tant que $\sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}} > 0,58$ faire
	$\quad$ n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher n

   Quelle valeur numérique de n va afficher en sortie cet algorithme ? *

Exercice 4 **5 points**

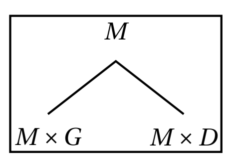
Candidats ayant choisi la spécialité mathématique

L'arbre de Stern-Brocot a été découvert séparément par le mathématicien allemand Moritz Abraham Stern (1858) et par Achille Brocot (1861), horloger français qui l'a utilisé pour concevoir des systèmes d'engrenages avec un rapport entre rouages proche d'une valeur souhaitée.

Cet exercice aborde la méthode avec des matrices carrées.

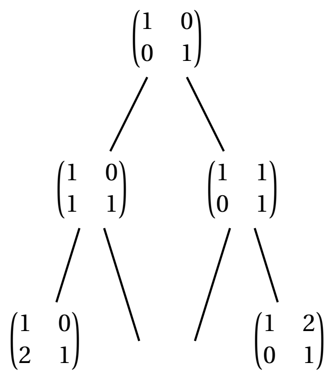
On considère les deux matrices $G = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$.

On construit un arbre descendant à partir d'une matrice initiale, de la façon suivante : de chaque matrice carrée M de l'arbre partent deux nouvelles branches vers les deux autres matrices $M \times G$ (à gauche) et $M \times D$ (à droite). Ces deux nouvelles matrices sont appelées les matrices filles de M.



Dans la méthode considérée, on prend comme matrice initiale la matrice $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les deux matrices manquantes A et B, dans la troisième ligne de l'arbre de Stern-Brocot ci-dessous.



Dans la suite de l'exercice, on admet que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern- Brocot, les nombres a, b, c, d sont des entiers vérifiant :
$b+d \neq 0$.

2. On associe à une matrice $M = \begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$. Montrer que, dans cette association, le trajet « gauche-droite-gauche » à partir de la matrice initiale dans l'arbre, aboutit à une matrice correspondant à la fraction $\dfrac{3}{5}$.

3. Soit $M = \begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ une matrice de l'arbre. On rappelle que a, b, c, d sont des entiers.
On note $\Delta_M = ad - bc$, la différence des produits diagonaux de cette matrice.

a. Montrer que si $ad - bc = 1$, alors $d(a+c) - c(b+d) = 1$.

b. En déduire que si $M = \begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ est une matrice de l'arbre de Stern-Brocot telle que $\Delta_M = ad - bc = 1$, alors $\Delta_{M\times G} = 1$, c'est-à-dire que la différence des produits diagonaux de la matrice $M \times G$ est aussi égale à 1.
On admet de même que $\Delta_{M\times D} = 1$, et que toutes les autres matrices N de l'arbre de Stern-Brocot vérifient l'égalité $\Delta_N = 1$.

4. Déduire de la question précédente que toute fraction associée à une matrice de l'arbre de Stern-Brocot est irréductible.

5. Soit m et n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Ainsi la fraction $\dfrac{m}{n}$ est irréductible. On considère l'algorithme suivant

```
VARIABLES :     m et n sont des entiers naturels non nuls et premiers entre eux
TRAITEMENT :    Tant que m ≠ n, faire
                     Si m < n
                          Afficher « Gauche »
                          n prend la valeur n − m
                     Sinon
                          Afficher « Droite »
                          m prend la valeur m − n
```

a. Recopier et compléter le tableau suivant, indiquer ce qu'affiche l'algorithme lorsqu'on le fait fonctionner avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

Affichage		…	…	…	…
m	4	…	…	…	…
n	7	…	…	…	…

b. Conjecturer le rôle de cet algorithme. Vérifier par un calcul matriciel le résultat fourni avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

*

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Polynésie 14 juin 2017

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

La société Fibration fournit des abonnements Internet et des abonnements de téléphone mobile. Un client de la société Fibration souscrit soit un abonnement Internet, soit un abonnement de téléphone mobile, il ne cumule pas les deux. En cas de difficulté, la société Fibration propose à ses clients une ligne d'assistance téléphonique : le client doit d'abord signaler s'il est client Internet ou s'il est client mobile puis son appel est mis en attente de réponse par un opérateur.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Si nécessaire, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Partie A - Durée d'attente

1. Dans cette question, on s'intéresse à la durée d'attente d'un client Internet lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur.

   Une étude permet de modéliser cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire D_1 qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,6.

   a. Quelle est la durée d'attente moyenne que peut espérer un client Internet qui appelle cette ligne d'assistance ?

   b. Calculer la probabilité que la durée d'attente d'un client Internet choisi au hasard soit inférieure à 5 minutes.

2. Dans cette question, on s'intéresse à la durée d'attente d'un client mobile lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur. On modélise cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire D_2 qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, λ étant un réel strictement positif.

   a. Sachant que $P(D_2 \leqslant 4) = 0,798$, déterminer la valeur de λ.

   b. En prenant $\lambda = 0,4$, peut-on considérer que moins de 10 % des clients mobile choisis au hasard attendent plus de 5 minutes avant de joindre un opérateur ?

Partie B - Obtention d'un opérateur

Si la durée d'attente avant l'obtention d'un opérateur dépasse 5 minutes, l'appel prend automatiquement fin. Sinon, l'appelant obtient un opérateur.

On choisit au hasard un client qui appelle la ligne d'assistance.

On admet que la probabilité que l'appel émane d'un client Internet est $0,7$.

De plus, d'après la partie A, on prend les données suivantes :

- Si l'appel provient d'un client Internet alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à $0,95$.
- Si l'appel provient d'un client mobile alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à $0,87$.

1. Déterminer la probabilité que le client joigne un opérateur.
2. Un client se plaint que son appel a pris fin après 5 minutes d'attente sans avoir obtenu d'opérateur. Est-il plus probable que ce soit un client Internet ou un client mobile ?

Partie C - Enquête de satisfaction

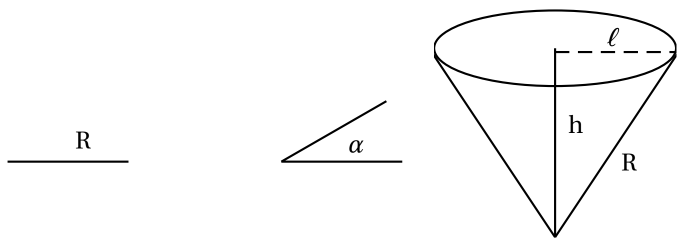
La société annonce un taux de satisfaction de 85 % pour ses clients ayant appelé et obtenu un opérateur.

Une association de consommateurs souhaite vérifier ce taux et interroge 1 303 personnes. Parmi celles-ci, 1 150 se disent satisfaites.

Que pensez-vous du taux de satisfaction annoncé par la société ? *

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats



Dans un disque en carton de rayon R, on découpe un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure α radians. On superpose les bords afin de créer un cône de révolution. On souhaite choisir l'angle α pour obtenir un cône de volume maximal.

On appelle ℓ le rayon de la base circulaire de ce cône et h sa hauteur.
On rappelle que :

- le volume d'un cône de révolution de base un disque d'aire $\mathcal{A}$ et de hauteur h est $\dfrac{1}{3}\mathcal{A}h$.
- la longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle θ, exprimé en radians, est $r\theta$.

1. On choisit $R = 20$ cm.

a. Montrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h, est
$V(h) = \dfrac{1}{3}\pi\left(400 - h^2\right)h$.

b. Justifier qu'il existe une valeur de h qui rend le volume du cône maximum. Donner cette valeur.

c. Comment découper le disque en carton pour avoir un volume maximum ? Donner un arrondi de α au degré près.

2. L'angle α dépend-il du rayon R du disque en carton ?

*

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les interactions électriques conduisent à modéliser la molécule de méthane CH_4 de la façon suivante :

- Les noyaux d'atomes d'hydrogène occupent les positions des quatre sommets d'un tétraèdre régulier.
- Le noyau de carbone au centre de la molécule est à égale distance des quatre atomes d'hydrogène.

L'objectif est de déterminer une mesure de l'angle entre deux liaisons carbone-hydrogène.
Un tétraèdre régulier est un polyèdre dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

1. Justifier qu'on peut inscrire ce tétraèdre dans un cube ABCDEFGH en positionnant deux atomes d'hydrogène sur les sommets A et C du cube et les deux autres atomes d'hydrogène sur deux autres sommets du cube.
Représenter la molécule dans le cube donné en annexe page 161.

Dans la suite de l'exercice, on pourra travailler dans le repère $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\overrightarrow{\text{AD}}\,;\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

[resume]Démontrer que l'atome de carbone est au centre Ω du cube. Déterminer l'arrondi au dixième de degré de la mesure de l'angle que forment entre elles les liaisons carbone-hydrogène, c'est-à-dire l'angle $\widehat{A\Omega C}$.

*

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en m.s^{-1}, de chute de la goutte en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie ainsi :
Pour tout réel positif ou nul t,

$$v(t) = 9,81\frac{m}{k}\left(1 - \text{e}^{-\frac{k}{m}t}\right);$$

la constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

On rappelle que la vitesse instantanée est la dérivée de la position.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Cas général

1. Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.
2. La goutte ralentit-elle au cours de sa chute ?
3. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 9,81\dfrac{m}{k}$. Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.
4. Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $\dfrac{5m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte ?

Partie B
Dans cette partie, on prend $m = 6$ et $k = 3,9$.
À un instant donné, la vitesse instantanée de cette goutte est 15 m.s^{-l}.

1. Depuis combien de temps la goutte s'est-elle détachée de son nuage ? Arrondir la réponse au dixième de seconde.
2. En déduire la vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré sa vitesse. Arrondir la réponse au dixième de m.s^{-1}.

*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

Une personne a mis au point le procédé de cryptage suivant :

- À chaque lettre de l'alphabet, on associe un entier n comme indiqué ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- On choisit deux entiers a et b compris entre 0 et 25.
- Tout nombre entier n compris entre 0 et 25 est codé par le reste de la division euclidienne de $an+b$ par 26.

Le tableau suivant donne les fréquences f en pourcentage des lettres utilisées dans un texte écrit en français.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Fréquence	9,42	1,02	2,64	3,38	15,87	0,94	1,04	0,77	8?41	0,89	0,00	5,33	3,23
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Fréquence	7,14	5,13	2,86	1,06	6,46	7,90	7,26	6,24	2,15	0,00	0,30	0,24	0,32

Partie A

Un texte écrit en français et suffisamment long a été codé selon ce procédé. L'analyse fréquentielle du texte codé a montré qu'il contient 15,9 % de O et 9,4 % de E.

On souhaite déterminer les nombres a et b qui ont permis le codage.

1. Quelles lettres ont été codées par les lettres O et E ?

2. Montrer que les entiers a et b sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcrl} 4a+b & \equiv & 14 & [26] \\ b & \equiv & 4 & [26]. \end{array}\right. .$$

3. Déterminer tous les couples d'entiers $(a\ ,\ b)$ ayant pu permettre le codage de ce texte.

Partie B

1. On choisit $a = 22$ et $b = 4$.

a. Coder les lettres K et X.

b. Ce codage est-il envisageable ?

2. On choisit $a = 9$ et $b = 4$.

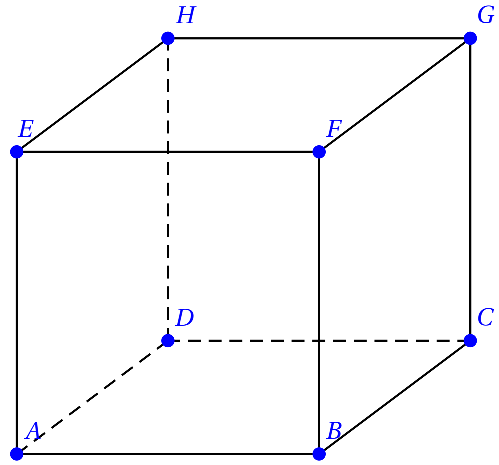
a. Montrer que pour tous entiers naturels n et m, on a :

$$m \equiv 9n+4\ [26] \iff n \equiv 3m+14\ [26]$$

b. Décoder le mot AQ.

*

Annexe
À rendre avec la copie



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane ∽
16 juin 2017

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation

$$(E) : \qquad z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Donner une solution entière de (E).
2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,
$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = \left(z^2 + z - 2\right)\left(z^2 + z + 1\right).$$
3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.
4. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que ABCD est un quadrilatère non croisé.
Le quadrilatère ABCD est-il un losange ? Justifier.

*

EXERCICE 2 **4 points**

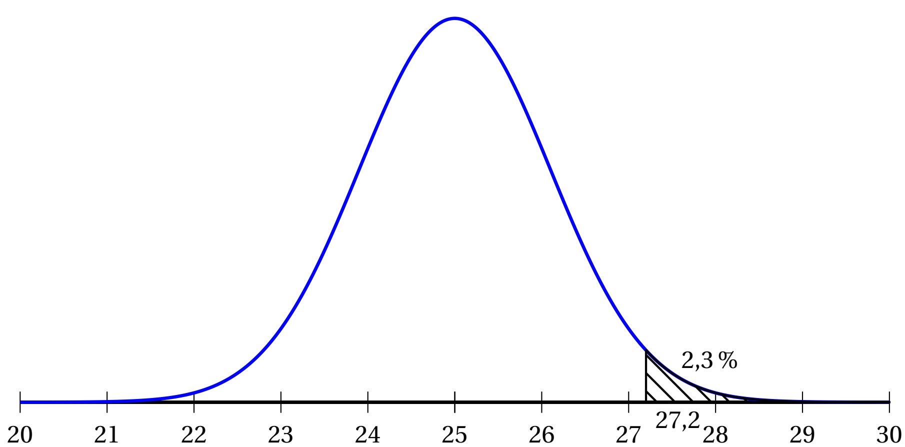
Commun à tous les candidats

Dans une usine automobile, certaines pièces métalliques sont recouvertes d'une fine couche de nickel qui les protège contre la corrosion et l'usure. Le procédé utilisé est un nickelage par électrolyse.

On admet que la variable aléatoire X, qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (μm) et d'écart type σ_1.

Une pièce est conforme si l'épaisseur de nickel déposé est comprise entre $22,8$ μm et $27,2$ μm.

La fonction de densité de probabilité de X est représentée ci-dessous. On a pu déterminer que $P(X > 27,2) = 0,023$.



1. **a.** Déterminer la probabilité qu'une pièce soit conforme.
   b. Justifier que 1,1 est une valeur approchée de σ_1 à 10^{-1} près.
   c. Sachant qu'une pièce est conforme, calculer la probabilité que l'épaisseur de nickel déposé sur celle-ci soit inférieure à 24 μm. Arrondir à 10^{-3}.

2. Une équipe d'ingénieurs propose un autre procédé de nickelage, obtenu par réaction chimique sans aucune source de courant. L'équipe affirme que ce nouveau procédé permet théoriquement d'obtenir 98 % de pièces conformes.

La variable aléatoire Y qui, à chaque pièce traitée avec ce nouveau procédé, associe l'épaisseur de nickel déposé suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 25$ μm et d'écart-type σ_2.

a. En admettant l'affirmation ci-dessus, comparer σ_1 et σ_2.

b. Un contrôle qualité évalue le nouveau procédé ; il révèle que sur 500 pièces testées, 15 ne sont pas conformes.
Au seuil de 95 %, peut-on rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs ?

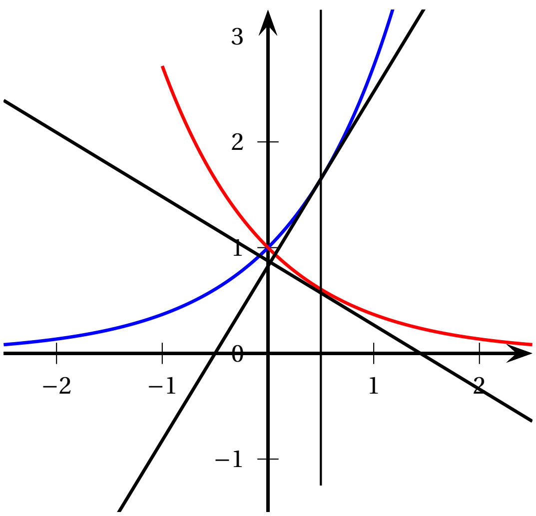
*

EXERCICE 3 **3 points**
Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_g$ celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.
Pour tout réel a, on note M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et N le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse a.
La tangente en M à $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en P, la tangente en N à $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en Q.
À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableur la longueur du segment $[PQ]$ pour chacune de ces valeurs de a.



	A	B
1	Abscisse a	Longueur PQ
2	-3	2
3	$-2,5$	2
4	-2	2
5	$-1,5$	2
6	-1	2
7	$-0,5$	2
8	0	2
9	0,5	2
10	1	2
11	1,5	2
12	2	2
13	2,5	2
14		

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Démontrer que la tangente en M à $\mathscr{C}_f$ est perpendiculaire à la tangente en N à $\mathscr{C}_g$.

2. a. Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?

b. Démontrer cette conjecture.

*

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n) : \qquad \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On a donné en ANNEXE, qui n'est pas à rendre, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer son maximum.

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ notée α_n.
2. D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geqslant 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n).
   a. Sur le graphique sont tracées les droites D_3, D_4 et D_5 d'équations respectives $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{5}$.
   Conjecturer le sens de variation de la suite (a_n).
   b. Comparer, pour tout entier $n \geqslant 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.
   Déterminer le sens de variation de la suite (α_n).
   c. En déduire que la suite (α_n) converge.
   Il n'est pas demandé de calculer sa limite.
3. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que

$$1 \leqslant \alpha_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \beta_n.$$

   a. On admet que la suite $\left(\beta_n\right)$ est croissante.
   Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,

$$\beta_n \geqslant n\frac{\beta_3}{3}.$$

   b. En déduire la limite de la suite $\left(\beta_n\right)$.

*

EXERCICE 5 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 6.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 9 \times 2^n - 6.$$

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, u_n est divisible par 6.
   On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \frac{u_n}{6}$.
3. On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ».
   Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
4. **a.** Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$.
   b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.
   c. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1}.
5. **a.** Vérifier que $2^4 \equiv 1\ [5]$.
   b. En déduire que si n est de la forme $4k+2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.
   c. Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ?
   Justifier.

*

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A$(-1\ ;\ 2\ ;\ 0)$, B$(1\ ;\ 2\ ;\ 4)$ et C$(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

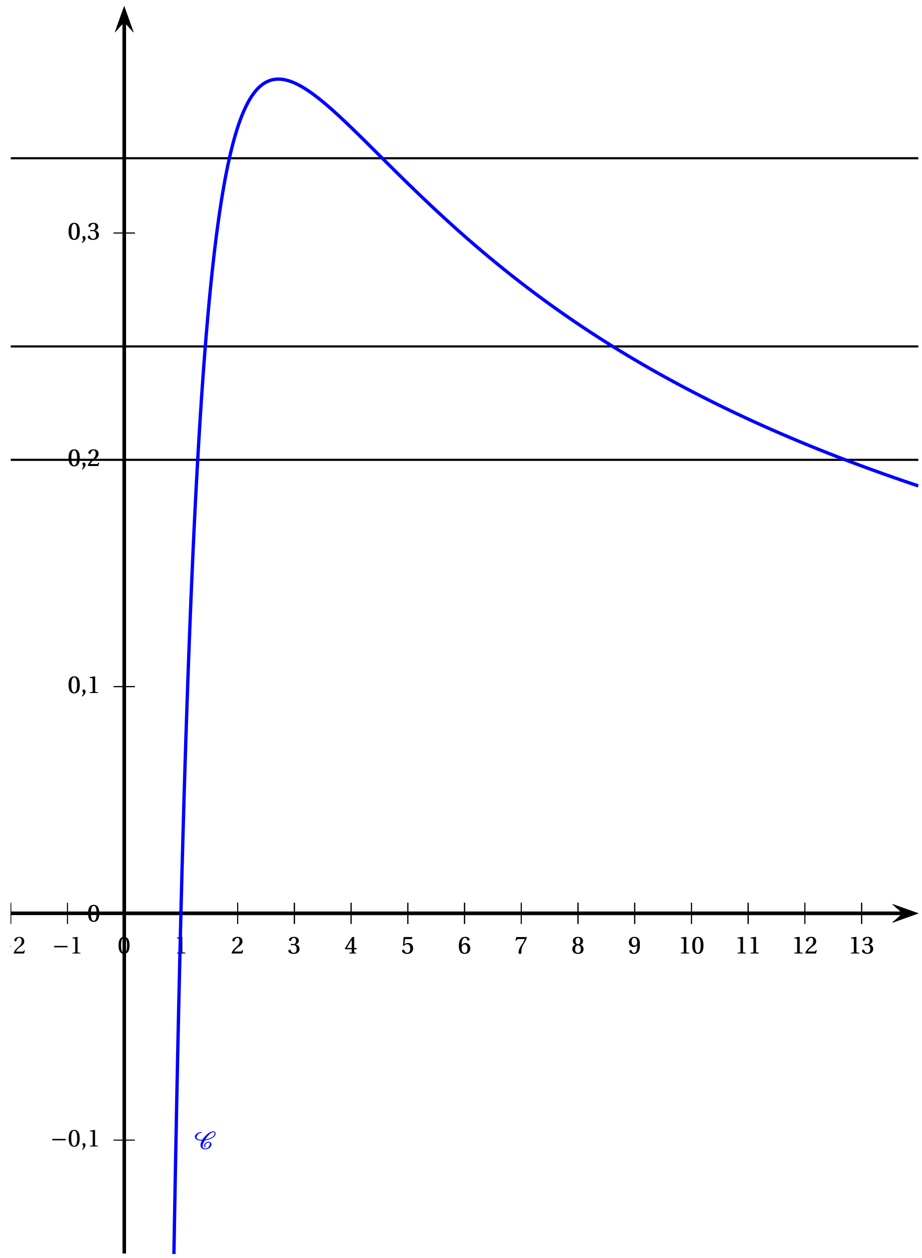
1. **a.** Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}}$.
   c. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$, arrondie au degré.
2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   a. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Soient $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$.
   a. Démontrer que le plan $\mathcal{P}_2$ a pour équation $x = 2z$.
   b. Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
   c. Soit la droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est

$$\left\{\begin{array}{l c r}x &=& 2t\\ y &=& -4t-3,\\ z &=& t\end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

   Démontrer que $\mathcal{D}$ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
4. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées. *

ANNEXE de l'exercice 4

Cette annexe n'est pas à rendre.



Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat S Métropole ∾ 21 juin 2017

Exercice 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$h(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h.
   a. Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a :

   $$h(x) = \mathrm{e}^{-x} - h'(x)$$

   où h' désigne la fonction dérivée de h.

   b. Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

   c. Déduire des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \ln(x+1) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(x+1).$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.
Ces deux courbes sont tracées en annexe page 451. Cette annexe est à rendre avec la copie.

1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ et N le point de coordonnées $(x\ ;\ g(x))$: M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

   a. Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.

   b. Placer sur le graphique fourni en annexe page 451 les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN.

2. Soit λ un réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

   a. Hachurer le domaine D_λ. correspondant à la valeur λ proposée sur le graphique en annexe page 451.

   b. On note A_λ l'aire du domaine D_λ, exprimée en unités d'aire. Démontrer que :

   $$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda + 1}{\mathrm{e}^\lambda}.$$

   c. Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	
	λ est un réel positif
	S est un réel strictement compris entre 0 et 1.
Initialisation :	
	Saisir S
	λ prend la valeur 0
Traitement :	
	Tant Que $1-\dfrac{\lambda+1}{\text{e}^{\lambda}} < S$ faire
	$\quad\lambda$ prend la valeur $\lambda+1$
	Fin Tant Que
Sortie :	
	Afficher λ

a. Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur $S = 0,8$?

b. Quel est le rôle de cet algorithme ?

*

Exercice 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est mini d'un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne : $2x - z - 3 = 0$.

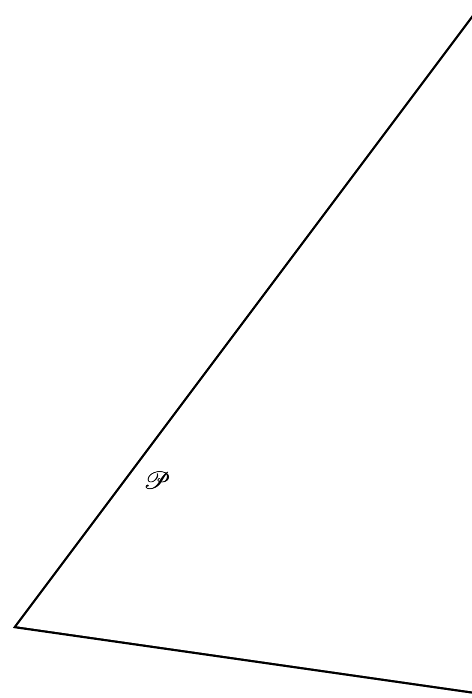
On note A le point de coordonnées $\left(1\ ;\ a\ ;\ a^2\right)$ où a est un nombre réel.

1. Justifier que, quelle que soit la valeur de a, le point A n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$.
2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ (de paramètre t) passant par le point A et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

   b. Soit M un point appartenant à la droite $\mathscr{D}$, associé à la valeur t du paramètre dans la représentation paramétrique précédente.

   Exprimer la distance AM en fonction du réel t.

On note H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale à $\mathscr{P}$ et passant par le point A. Le point H est appelé projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ et la distance AH est appelée distance du point A au plan $\mathscr{P}$.



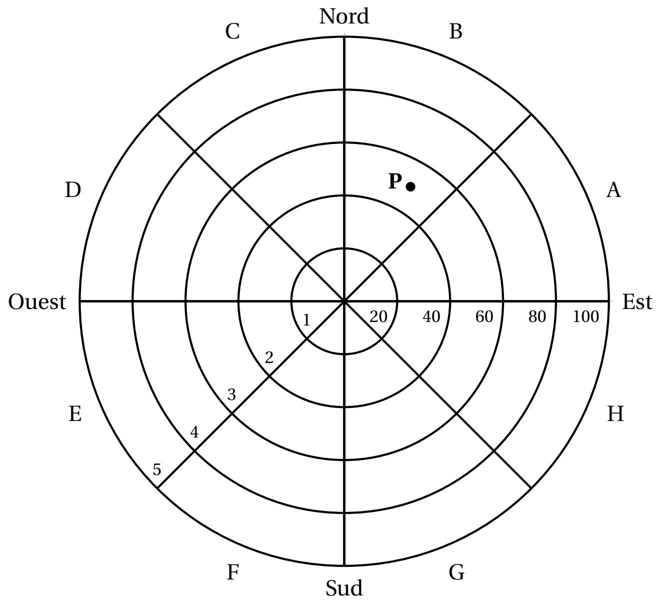
3. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle la distance AH du point A de coordonnées $\left(1\,;\,a\,;\,a^2\right)$ au plan $\mathscr{P}$ est minimale ? Justifier la réponse.

*

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans une vaste plaine, un réseau de capteurs permet de détecter la foudre et de produire une image des phénomènes orageux. Ces données servent en particulier aux services météorologiques pour améliorer leurs prévisions et pour permettre des interventions plus rapides sur les lieux, notamment en cas d'incendie.

Le but de l'exercice est d'étudier les impacts de foudre détectés par un capteur.
L'écran radar, sur lequel les points d'impact de foudre sont observés, a l'allure suivante :



Le capteur de foudre étant représenté par le centre de l'écran, cinq cercles concentrique correspondant aux rayons respectifs 20, 40, 60, 80 et 100 kilomètres délimitent dans l'ordre cinq zones, numérotées de 1 à 5, définies par leur distance au capteur. De plus, huit segments partant du capteur délimitent huit portions, de même ouverture angulaire, nommées dans le sens trigonométrique de A à H.

L'écran est ainsi partagé en quarante secteurs dénommés par une lettre et un nombre entre 1 et 5. Par exemple, le point P positionné sur la figure est situé dans le secteur B3.

On assimile l'écran radar à une partie du plan complexe en définissant un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ de la manière suivante :

- l'origine O marque la position du capteur ;
- l'axe des abscisses est orienté d'Ouest en Est ;
- l'axe des ordonnées est orienté du Sud au Nord ;
- l'unité choisie est le kilomètre.

Dans la suite, un point de l'écran radar est associé à un point d'affixe z.

PARTIE A

1. On note z_P l'affixe du point P situé dans le secteur B3 sur le graphique précédent. On appelle r le module de z_P et θ son argument dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.
   Parmi les quatre propositions suivantes, déterminer la seule qui propose un encadrement correct pour r et pour θ (aucune justification n'est demandée) :

Proposition A	**Proposition B**	**Proposition C**	**Proposition D**
$40 < r < 60$ et $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$	$20 < r < 40$ et $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{4}$	$40 < r < 60$ et $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$	$0 < r < 60$ et $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < -\dfrac{\pi}{4}$

2. Un impact de foudre est matérialisé sur l'écran en un point d'affixe z. Dans chacun des deux cas suivants, déterminer le secteur auquel ce point appartient :
   a. $z = 70\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$;
   b. $z = -45\sqrt{3} + 45\mathrm{i}$.

Partie B

On suppose dans cette partie que le capteur affiche un impact au point P d'affixe $50\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

En raison d'imprécisions de mesures, le point d'impact affiché ne donne qu'une indication approximative du point d'impact réel de la foudre.

Ainsi, lorsque le capteur affiche le point d'impact P d'affixe $50\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, l'affixe z du point d'impact réel de la foudre admet :

- un module qui peut être modélisé par une variable aléatoire M suivant une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart type $\sigma = 5$;
- un argument qui peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant une loi normale d'espérance $\dfrac{\pi}{3}$ et d'écart type $\dfrac{\pi}{12}$.

On suppose que les variables aléatoires M et T sont indépendantes, c'est-à-dire que, quels que soient les intervalles I et J, les évènements $(M \in I)$ et $(T \in J)$ sont indépendants.

Dans la suite les probabilités seront arrondies à 10^{-3} près.

1. Calculer la probabilité $P(M < 0)$ et interpréter le résultat obtenu.
2. Calculer la probabilité $P(M \in]40\ ;\ 60[)$.
3. On admet que $P\left(T \in \left]\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[\right) = 0,819$.
   En déduire la probabilité que la foudre ait effectivement frappé le secteur B3 selon cette modélisation.

*

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :
S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;
M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;
I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

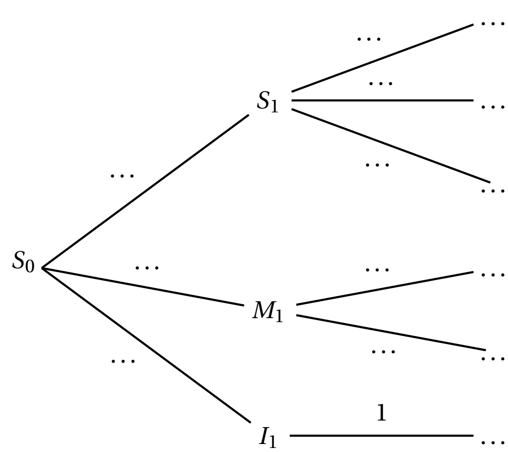
En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1\ ;\ P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. Montrer que $P(I_2) = 0{,}2025$.
3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.
Pour tout entier naturel n, on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.
On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,850 0	0,050 0	0,100 0
4	2	0,722 5	0,075 0	0,202 5
5	3	0,614 1	0,084 9	0,301 0
6	4	0,522 0	0,085 9	0,392 1
7	5	0,443 7	0,081 9	0,474 4
8	6	0,377 1	0,075 4	0,547 4
...	...	...	...	...
20	18	0,053 6	0,013 3	0,933 0
21	19	0,045 6	0,011 3	0,943 1
22	20	0,038 8	0,009 6	0,951 6

*Pour répondre aux questions **a.** et **b.** suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.*

a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'une certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.
Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

3. a. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,85u_n$.
En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

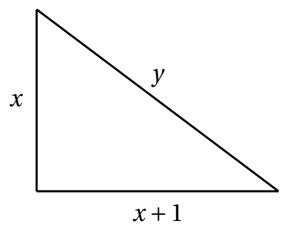
$$v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right).$$

4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n).
Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle?*

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On appelle « triangle rectangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs x et $x+1$, et dont l'hypoténuse a pour longueur y, où x et y sont des entiers naturels.
Ainsi, un TRPI est un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont deux nombres entiers consécutifs et dont la longueur de l'hypoténuse est un nombre entier.



Si le triangle de côtés x, $x+1$ et y, où y est la longueur de l'hypoténuse, est un TRPJ, on dira que le couple $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI.

Partie A

1. Démontrer que le couple d'entiers naturels $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI si, et seulement si, on a :

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

2. Montrer que le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls est défini par le couple $(3\,;5)$.
3. **a.** Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair alors n est impair.

   b. Montrer que dans un couple d'entiers $(x\ ;\ y)$ définissant un TRPI, le nombre y est nécessairement impair.
4. Montrer que si le couple d'entiers naturels $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux.

Partie B

On note A la matrice carrée : $A = \begin{pmatrix}3 & 2\\4 & 3\end{pmatrix}$, et B la matrice colonne : $B = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.
Soient x et y deux entiers naturels ; on définit les entiers naturels x' et y' par la relation :

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + B.$$

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

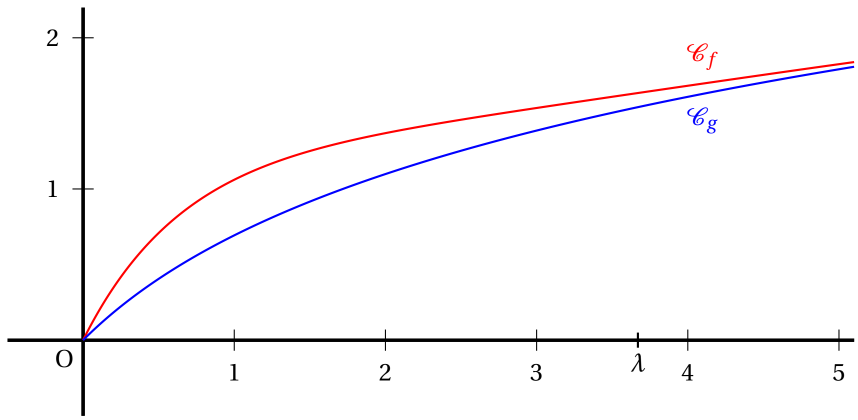
   a. Montrer que : $y'^2 - 2x'(x'+1) = y^2 - 2x(x+1)$.

   b. En déduire que si le couple $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI, alors le couple $\left(x'\ ;\ y'\right)$ définit également un TRPI.
2. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels, définies par

   $x_0 = 3$, $y_0 = 5$ et pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix} + B$.

   Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ définit un TRPI.
3. Déterminer, par la méthode de votre choix que vous préciserez, un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2017. *

ANNEXE À REMETTRE AVEC LA COPIE



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S – Asie ∾
22 juin 2017

EXERCICE 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

où

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C.

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.
Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$C(t) = 12\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right).$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

Partie B : étude de fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{105}{x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right).$$

Démontrer que, pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

2. On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0		$+\infty$
$g(x)$	0	$\searrow$	-1

En déduire le sens de variation de la fonction f.
On ne demande pas les limites de la fonction f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1;80]$.
En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 15.
Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairance a de ce patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit d à 105, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.
On rappelle que la fonction C est définie sur l' intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

1. On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.

a. Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.

b. Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang ; elle est égale à $5,9$ micromole par litre.
Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.

2. Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.*

EXERCICE 2 — 3 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \\ u_{n+1} & = & \left(\dfrac{n+1}{2n+4}\right)u_n. \end{array}\right.$$

On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = (n+1)u_n$.

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1,000 00	1,000 00
3	1	0,250 00	0,500 00
4	2	0,083 33	0,250 00
5	3	0,031 25	0,125 00
6	4	0,012 50	0,062 50
7	5	0,005 21	0,031 25
8	6	0,002 23	0,015 63
9	7	0,000 98	0,007 81
10	8	0,000 43	0,003 91
11	9	0,000 20	0,001 95

*

1. La feuille de calcul ci-contre présente les valeurs des premiers termes des suites (u_n) et (v_n), arrondies au cent-millième.
Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) ?

2. a. Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n.

b. Démontrer cette conjecture.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On dispose de deux dés, identiques d'aspect, dont l'un est truqué de sorte que le 6 apparait avec la probabilité $\frac{1}{2}$. On prend un des deux dés au hasard, on le lance, et on obtient 6.

   Affirmation 1 : la probabilité que le dé lancé soit le dé truqué est égale à $\frac{2}{3}$.

2. Dans le plan complexe, on considère les points M et N d'affixes respectives $z_{\text{M}} = 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et $z_{\text{N}} = \frac{3-\text{i}}{2+\text{i}}$.

   Affirmation 2 : la droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées.

Dans les questions **3.** et **4.**, on se place dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace et l'on considère la droite d dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+t\\ y &=& 2, \qquad t \in \mathbb{R}.\\ z &=& 3+2t\end{array}\right.$

[resume]On considère les points A, B et C avec A$(-2\,;\,2\,;\,3)$, B $(0\,;\,1\,;\,2)$ et C$(4\,;\,2\,;\,0)$. On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés. **Affirmation 3** : la droite d est orthogonale au plan (ABC). On considère la droite Δ passant par le point D$(1\,;\,4\,;\,1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\,(2\,;\,1\,;\,3)$. **Affirmation 4** : la droite d et la droite Δ ne sont pas coplanaires.

*

EXERCICE 4 — 3 points

Commun à tous les candidats

L'objet du problème est l'étude des intégrales I et J définies par :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\text{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\text{d}x.$$

Partie A : valeur exacte de l'intégrale *I*

1. Donner une interprétation géométrique de l'intégrale I.
2. Calculer la valeur exacte de I.

Partie B : estimation de la valeur de *J*

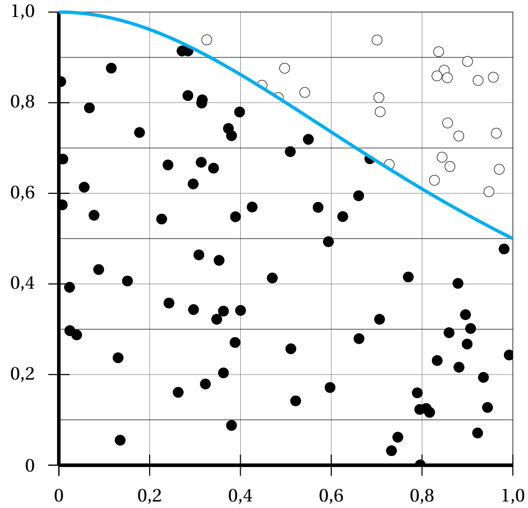
Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On a donc : $J = \int_0^1 g(x)\,\text{d}x$.
Le but de cette partie est d'évaluer l'intégrale J à l'aide de la méthode probabiliste décrite ci-après.
On choisit au hasard un point M$(x\,;\,y)$ en tirant de façon indépendante ses coordonnées x et y au hasard selon la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$.
On admet que la probabilité p qu'un point tiré de cette manière soit situé sous la courbe $\mathcal{C}_g$ est égale à l'intégrale J.
En pratique, on initialise un compteur c à 0, on fixe un entier naturel n et on répète n fois le processus suivant :

- on choisit au hasard et indépendamment deux nombres x et y, selon la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$;
- si M$(x\,;\,y)$ est au-dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$ on incrémente le compteur c de 1.

On admet que $f = \frac{c}{n}$ est une valeur approchée de J. *C'est le principe de la méthode dite de Monte-Carlo.*

La figure ci-contre illustre la méthode présentée pour $n = 100$.
100 points ont été placés aléatoirement dans le carré.
Les disques noirs correspondent aux points sous la courbe, les disques blancs aux points au-dessus de la courbe.
Le rapport du nombre de disques noirs par le nombre total de disques donne une estimation de l'aire sous la courbe.

Illustration de la méthode avec $n = 100$



1. Recopier et compléter l'algorithme ci-après pour qu'il affiche une valeur approchée de J.

Variables	n, c, f, i, x, y sont des nombres

Traitement	Lire la valeur de n
	c prend la valeur ...
	Pour i allant de 1 à ... faire
	    x prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
	    y prend ...
	    Si ... alors
	    ... prend la valeur ...
	    Fin si
	Fin pour
	f prend la valeur ...

Sortie	Afficher f

2. Pour $n = 1\,000$, l'algorithme ci-dessus a donné pour résultat : $f = 0,781$.
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la valeur exacte de J.
3. Quelle doit-être, au minimum, la valeur de n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,02 ?*

EXERCICE 5 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Question préliminaire

Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, où λ désigne un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel a positif, on a : $P(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

Démontrer que, pour tout réel a positif, $P(T > a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère des lampes à led dont la durée de vie, exprimée en jour, est modélisée par une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{2\,800}$.

Les durées seront données au jour près, et les probabilités au millième près

Partie A : étude d'un exemple

1. Calculer la probabilité qu'une lampe fonctionne au moins 180 jours.
2. Sachant qu'une telle lampe a déjà fonctionné 180 jours, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore au moins 180 jours ?

Partie B : contrôle de la durée de vie moyenne

Le fabricant de ces lampes affirme que, dans sa production, la proportion de lampes qui ont une durée de vie supérieure à 180 heures est de 94 %.
Un laboratoire indépendant qui doit vérifier cette affirmation fait fonctionner un échantillon aléatoire de 400 lampes pendant 180 jours.
On suppose que les lampes tombent en panne indépendamment les unes des autres.
Au bout de ces 180 jours, 32 de ces lampes sont en panne.
Au vu des résultats des tests, peut-on remettre en cause, au seuil de 95 %, la proportion annoncée par le fabricant ?

Partie C : dans une salle de spectacle

Pour éclairer une salle de spectacle, on installe dans le plafond 500 lampes à led.
On modélise le nombre de lampes fonctionnelles après 1 an par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 440$ et d'écart-type $\sigma = 7,3$.

1. Calculer $P(X > 445)$, la probabilité que plus de 445 lampes soient encore fonctionnelles après un an.
2. Lors de l'installation des lampes dans le plafond, la direction de la salle veut constituer un stock de lampes.
   Quelle doit-être la taille minimale de ce stock pour que la probabilité de pouvoir changer toutes les lampes défectueuses, après un an, soit supérieure à 95 % ?*

EXERCICE 5 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties sont indépendantes

Un bit est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.

Partie A : ligne de transmission

Une ligne de transmission transporte des bits de données selon le modèle suivant :
- elle transmet le bit de façon correcte avec une probabilité p ;
- elle transmet le bit de façon erronée (en changeant le 1 en 0 ou le 0 en 1) avec une probabilité $1 - p$.

On assemble bout à bout plusieurs lignes de ce type, et on suppose qu'elles introduisent des erreurs de façon indépendante les unes des autres.
On étudie la transmission d'un seul bit, ayant pour valeur 1 au début de la transmission.
Après avoir traversé n lignes de transmission, on note :
- p_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 1 ;
- q_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0.

On a donc $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.
On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \quad X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On admet que, pour tout entier n, on a : $X_{n+1} = AX_n$ et donc, $X_n = A^n X_0$.

1. **a.** Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

   b. On pose : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que : $A = PDP^{-1}$.

   c. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,
   $$A^n = PD^nP^{-1}.$$

   d. En vous appuyant sur la copie d'écran d'un logiciel de calcul formel donnée ci-contre, déterminer l'expression de q_n en fonction de n.

1	$X0 : = [[1], [0]]$	
	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	M
2	P : = [[1, 1], [1, −1]]	
	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	M
3	D : = [[1, 0],[0,2 $*$ p − 1]]	
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2*p-1 \end{bmatrix}$	M
4	$P*(D\hat{}n)*P\hat{}(-1)*X0$	
	$\begin{bmatrix} \dfrac{(2*p-1)^n+1}{2} \\ \dfrac{-(2*p-1)^n+1}{2} \end{bmatrix}$	M

2. On suppose dans cette question que p vaut 0,98. On rappelle que le bit avant transmission a pour valeur 1. On souhaite que la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0 soit inférieure ou égale à 0,25. Combien peut-on, au maximum, aligner de telles lignes de transmission ?

Partie B : étude d'un code correcteur, le code de Hamming (7, 4)

On rappelle qu'un **bit** est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.
On considère un « mot » formé de 4 bits que l'on note b_1, b_2, b_3 et b_4.
Par exemple, pour le mot « 1101 », on a $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$ et $b_4 = 1$.
On ajoute à cette liste une *clé de contrôle* $c_1c_2c_3$ formée de trois bits :

- c_1 est le reste de la division euclidienne de $b_2 + b_3 + b_4$ par 2 ;
- c_2 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_3 + b_4$ par 2 ;
- c_3 est le reste de la di vision euclidienne de $b_1 + b_2 + b_4$ par 2.

On appelle alors « message » la suite de 7 bits formée des 4 bits du mot et des 3 bits de contrôle.

1. Préliminaires

a. Justifier que c_1, c_2 et c_3 ne peuvent prendre comme valeurs que 0 ou 1.

b. Calculer la clé de contrôle associée au mot 1001.

2. Soit $b_1b_2b_3b_4$ un mot de 4 bits et $c_1c_2c_3$ la clé associée.
Démontrer que si on change la valeur de b_1 et que l'on recalcule la clé, alors :

- la valeur de c_1 est inchangée ;
- la valeur de c_2 est modifiée ;
- la valeur de c_3 est modifiée.

3. On suppose que, durant la transmission du message, au plus un des 7 bits a été transmis de façon erronée. À partir des quatre premiers bits du message reçu, on recalcule les 3 bits de contrôle, et on les compare avec les bits de contrôle reçus.
Sans justification, recopier et compléter le tableau ci-dessous. La lettre F signifie que le bit de contrôle reçu ne correspond pas au bit de contrôle calculé, et J que ces deux bits sont égaux.

Bit de contrôle calculéBit erroné	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	Aucun
c_1	J							
c_2	F							
c_3	F							

4. Justifier rapidement, en vous appuyant sur le tableau, que si un seul bit reçu est erroné, on peut dans tous les cas déterminer lequel, et corriger l'erreur.

5. Voici deux messages de 7 bits :

$$A = 0100010 \quad \text{et} \quad B = 1101001.$$

On admet que chacun d'eux comporte au plus une erreur de transmission.
Dire s'ils comportent une erreur, et la corriger le cas échéant.*

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie ∾ 5 septembre 2017

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Un parc d'attraction propose à son public un tout nouveau grand huit. Pour des raisons de sécurité, son accès n'est autorisé qu'aux personnes dont la taille est supérieure ou égale à 1,40 m et dont l'âge est compris entre 10 et 70 ans.
Des études statistiques sont menées pour évaluer l'affluence et la satisfaction des visiteurs pour ce manège.

On arrondira, si nécessaire, les probabilités à 10^{-4}.

1. **a.** La taille en centimètres d'un visiteur du parc, choisi au hasard, est modélisée par la variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance 165 et d'écart-type 20.
   Quelle est la probabilité qu'un visiteur ait la taille requise pour accéder à ce grand huit ?

   b. L'âge d'un visiteur du parc, choisi au hasard, est modélisé par la variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 30 et d'écart-type 17.
   Quelle est la probabilité qu'un visiteur ait l'âge requis pour accéder à ce grand huit ?

   c. Les études menées permettent d'établir que 89 % des visiteurs ont la taille exigée, 87 % ont l'âge requis mais 8 % n'ont ni la taille, ni l'âge obligatoires. Quelle est alors la proportion des visiteurs vérifiant les conditions requises pour essayer la nouvelle attraction ?
2. Un sondage est réalisé à la sortie du grand huit et révèle que 25 % des personnes ont attendu moins de 30 min avant de pouvoir essayer le manège. Parmi elles, 95 % sont satisfaites de l'attraction.
   En revanche, 22 % des personnes ayant attendu plus de 30 min ne sont pas satisfaites de l'attraction.
   On choisit au hasard un visiteur à sa sortie du grand huit.
   On note A l'évènement « le visiteur a attendu plus de 30min » et S l'évènement « le visiteur est satisfait de l'attraction ».

   a. Montrer que la probabilité qu'un visiteur soit satisfait de l'attraction vaut 0,822 5.

   b. Le directeur rencontre un visiteur insatisfait. Quelle est la probabilité que ce visiteur ait attendu moins de 30 min ?
3. Le directeur est soucieux de savoir si le temps d'attente, plus important les jours de grande affluence, remet en cause le taux de satisfaction des visiteurs. Pour cela, on interroge 200 personnes au hasard à la sortie du grand huit. Parmi elles, 46 se disent insatisfaites.
   Le directeur peut-il être rassuré ?*

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les parties **A** et **B** sont indépendantes

Partie A

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'une tumeur composée de cellules cancéreuses.
On note $N(t)$ le nombre de cellules cancéreuses après un temps t exprimé en semaines et $N(0) = N_0$ le nombre de cellules cancéreuses au premier examen.
Pour tout réel t positif ou nul, on admet qu'il existe un nombre a tel que

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{at}.$$

1. Des cultures en laboratoire ont montré que le nombre de cellules de la tumeur double en 14 semaines.
   En déduire la valeur du paramètre a.
2. En arrondissant la valeur de a obtenue, on peut écrire pour tout réel $t \geqslant 0$,

   $$N(t) N_0 \mathrm{e}^{0,05t}.$$

   La plus petite tumeur détectable au toucher contient environ 10^9 cellules. Lorsqu'une tumeur est détectable, on décide d'opérer le patient afin de la retirer. Or, après intervention, il est possible qu'il reste jusqu'à 10^4 cellules indétectables.
   En l'absence de suivi médical, au bout de combien de temps la tumeur pourrait -elle redevenir détectable au toucher ?

Partie B

Pour atténuer le risque de récidive, le médecin peut proposer de compléter l'opération par une chimiothérapie. Lors d'un traitement par chimiothérapie en intraveineuse, la concentration du médicament dans l'organisme, exprimée en μmol.L^{-1}, peut être modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction c définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

$$c(t) = \frac{D}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{80}t}\right)$$

où

- D est un réel positif qui représente le débit d'écoulement du médicament dans la perfusion, exprimé en micromole par heure ;
- k est un réel positif qui représente la clairance du patient, exprimée en litre par heure.

La clairance traduit la capacité interne du patient à éliminer plus ou moins vite le médicament de son organisme. Elle est propre à chaque individu et est inconnue au début du traitement. Il est nécessaire de la déterminer afin que le médecin puisse adapter le traitement en ajustant le débit D.

1. Détermination de la clairance

Afin de déterminer la clairance, on effectue les mesures suivantes. On règle le débit de la perfusion sur 112 μmol.h^{-1} ; au bout de 6 heures, on prélève un échantillon de sang du patient et on mesure la concentration du médicament : elle est égale à 6,8 μmol.L^{-1}.

a. Justifier que la clairance k du patient est solution de l'équation

$$112\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}k}\right) - 6,8k = 0.$$

b. Démontrer que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

c. Donner une valeur approchée à 10^{-2} de cette solution. Interpréter ce résultat.

2. Réglage du débit

a. Déterminer la limite ℓ de la fonction c en $+\infty$ en fonction du débit D et de la clairance k.

b. La concentration du médicament dans le sang se rapproche rapidement de sa limite ℓ.
Pour que le traitement soit efficace sans devenir toxique, cette concentration limite doit être de 16 μmol.L^{-1}.
En déduire le débit D, à régler par le médecin, lorsque la clairance du patient est de 5,85 L.h^{-1}.

*

EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

On rappelle que pour tout réel a et tout réel b,

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x + 2$.

1. Montrer que si le réel θ appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right[$, alors $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

2. Soit M un point du plan complexe d'affixe z non nulle. On note $\rho = |z|$ le module de z et $\theta = \arg(z)$ un argument de z ; les nombres ρ et θ sont appelés coordonnées polaires du point M.
Montrer que le point M appartient à la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si ses coordonnées polaires sont liées par la relation :

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)},\ \text{avec } \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right[\text{ et } \rho > 0.$$

3. Déterminer les coordonnées du point de la droite $\mathscr{D}$ le plus proche de l'origine O du repère.*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0,3 \\ u_{n+1} & = & 0,9u_n(1-u_n) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1-u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0\,;\,1]$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9u_n$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?

3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.

On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.

Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

Variables :	u est un réel
	n est un entier naturel
Traitement :	u prend la valeur $0,3$
	n prend la valeur 0
	Tant que ... faire :
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher ...

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_0 & = & 0,032 \\ v_{n+1} & = & 1,06v_n(1-v_n) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel $n \geqslant 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.

2. On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite. Montrer que ℓ vérifie :

$$\ell = 1,06\ell(1-\ell).$$

3. La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?*

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane ∽
7 septembre 2017

EXERCICE 1 **7 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Romane utilise deux modes de déplacement pour se déplacer entre son domicile et son lieu de travail : le vélo ou les transports en commun.

Partie A

Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.
Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Romane se déplace en vélo 6 fois sur 10.
La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée p.
Pour une journée donnée, on note :

- E l'évènement « La journée est ensoleillée » ;
- V l'évènement« Romane se déplace en vélo ».

1. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.

2. Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est

$$P(V) = 0,3p + 0,6.$$

3. On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.

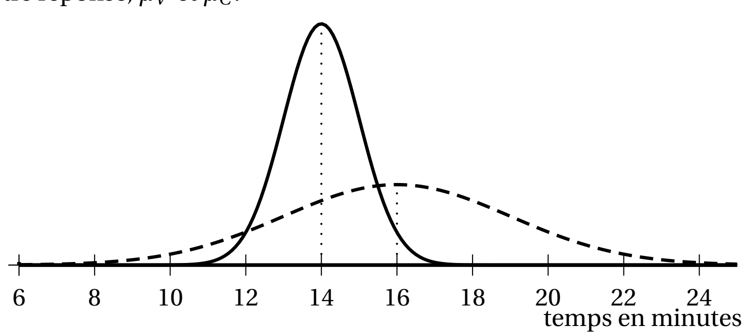
a. Calculer la valeur de p.

b. Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est $\frac{1}{3}$.

Partie B

Lorsque Romane se déplace en vélo, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, entre son domicile et son lieu de travail par une variable aléatoire T_V suivant une loi normale d'espérance μ_V et d'écart-type 1 minute.
Lorsqu'elle effectue ce trajet en transports en commun, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T_C suivant une loi normale d'espérance μ_C et d'écart-type 3 minutes.

1. On nomme $\mathscr{C}_C$ et $\mathscr{C}_V$ les courbes représentatives des fonctions de densité des variables aléatoires T_V et T_C représentées dans la figure ci-dessous.
Déterminer, en justifiant votre réponse, μ_V et μ_C.



2. Calculer la probabilité que pour Romane un trajet domicile-travail en vélo dure entre 10 et 15 minutes. Arrondir la réponse à 10^{-4}.

3. Quel mode de déplacement Romane doit-elle privilégier si elle souhaite mettre moins de 15 minutes pour se rendre au travail ?

Partie C

En hiver, Romane roule en vélo de nuit. Son vélo est visible grâce à une ampoule dont la durée de fonctionnement en heures peut être modélisée par une variable aléatoire, notée X, suivant une loi exponentielle de paramètre λ, réel strictement positif.
La fonction de densité associée est donc la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

1. Soit b un réel positif.
Démontrer, à l'aide d'une intégrale, que

$$P(X \leqslant b) = 1 - \mathrm{e}^{\lambda b}.$$

2. On sait que la probabilité que l'ampoule fonctionne encore après 50 heures d'utilisation est 0,9.

a. En déduire la valeur exacte de λ.

b. Calculer la probabilité que la durée de fonctionnement de l'ampoule soit supérieure à 250 heures sachant que l'ampoule a déjà fonctionné 200 heures.

*

Exercice 2 — 3 points

Commun à tous les candidats

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_0 & = & 100 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{\mathrm{i}}{3} z_n \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.

2. On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r, où r est un nombre réel positif, est l'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{A}M \leqslant r$.
Démontrer que, à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.*

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ telle que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1,

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale.

2. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $[1\,;\,+\infty[$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur $[1\,;\,+\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,\mathrm{d}x \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que $u_0 = \dfrac{1}{2}[\ln(2)]^2$.
Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Prouver que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;\,2]$, on a

$$0 \leqslant \dfrac{1}{x^{n+1}}\ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x^{n+1}}\ln(2).$$

3. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a

$$0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right).$$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).*

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère les points A(1 ; 1 ; 14), B(0 ; 1 ; 8) et C(−2 ; 2 ; 4) ainsi que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\8\\-1\end{pmatrix}$.

1. **a.** Justifier que les points A, B et C définissent un plan.
b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
c. Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $6x + 8y - z = 0$.

2. On considère la droite Δ des points M dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t - 3\\ y &=& t - \dfrac{1}{2},\\ z &=& 4t + 2 \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

a. Donner un vecteur directeur de la droite Δ.
b. La droite Δ et le plan (ABC) sont-ils sécants ?

3. Dans cette question, on considère l'ensemble (E) des points M dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t^3 + t\\ y &=& t + 1,\\ z &=& 2t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer qu'il existe un unique point M qui appartient à la fois à (E) et à (ABC).
Il n'est pas demandé de déterminer ses coordonnées.*

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit p un entier relatif donné.
On s'intéresse dans cette question à l'équation $\left(E_p\right)$

$$3x + 4y = p$$

où $(x\ ;\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple $(-p\ ;\ p)$ est une solution particulière de l'équation.

b. Démontrer que l'ensemble des solutions de $\left(E_p\right)$ est l'ensemble des couples de la forme

$$(-p + 4k\ ;\ p - 3k) \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

Dans la suite de l'exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne

$$6x + 8y - z = 0.$$

[resume]Soit M_0 un point de coordonnées $\left(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0\right)$ qui appartient au plan $\mathscr{P}$ et dont les trois coordonnées sont des entiers relatifs.

1. **a.** Démontrer que z_0 est pair.

b. On pose $z_0 = 2p$ où p est un entier relatif.
Prouver que le couple $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ est solution de l'équation $\left(E_p\right)$.

c. En utilisant la question 1., déterminer l'ensemble des points du plan $\mathscr{P}$ à coordonnées entières.

2. À tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, on associe le point M' de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ avec

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 75 & 180 \\ 56 & 41 & -144 \\ 28 & -30 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que $6x' + 8y' - z' = 101(6x + 8y - z)$.

b. En déduire que si le point M est un point du plan $\mathscr{P}$, alors le point M' est aussi un point du plan $\mathscr{P}$.

c. Soit Δ la droite perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par O.
Montrer que si le point M appartient à Δ, alors le point M' appartient aussi à Δ.

*

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Métropole - La Réunion
12 septembre 2017

La page de fin est une annexe au sujet, à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

On ne cherchera pas à calculer u_n en fonction de n.

1. **a.** Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   b. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $-x^2 \leqslant -2x+1$, puis : $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-2x+1}$.

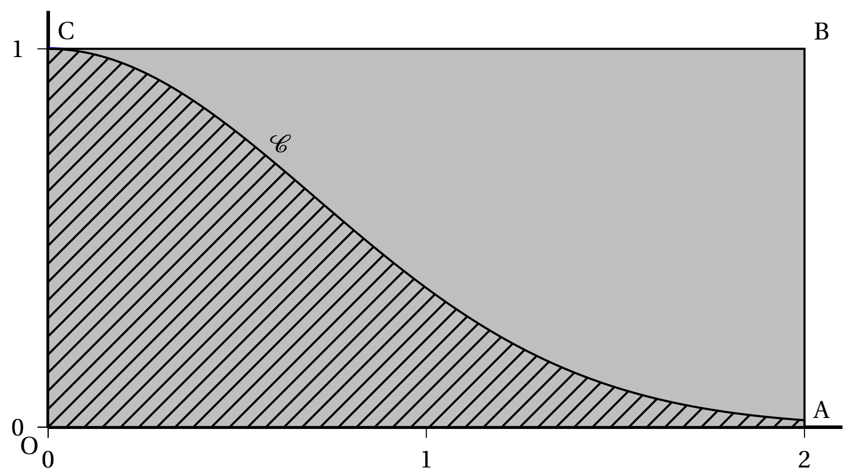
   En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n < \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

   c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

2. Dans cette question, on se propose d'obtenir une valeur approchée de u_2.

   Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, et le rectangle OABC où A$(2\,;\,0)$, B$(2\,;\,1)$ et C$(0\,;\,1)$.

   On a hachuré le domaine $\mathscr{D}$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.



   On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un point M au hasard à l'intérieur du rectangle OABC.

   On admet que la probabilité p que ce point appartienne au domaine est : $p = \dfrac{\text{aire de } \mathscr{D}}{\text{aire de OABC}}$.

   a. Justifier que $u_2 = 2p$.

   b. On considère l'algorithme suivant :

L1	**Variables** : N, C nombres entiers ; X, Y, F nombres réels
L2	**Entrée** : Saisir N
L3	**Initialisation** : C prend la valeur 0
L4	**Traitement** :
L5	Pour k variant de 1 à N
L6	X prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 2
L7	Y prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 1
L8	Si $Y \leqslant \mathrm{e}^{-X^2}$ alors
L9	C prend la valeur $C+1$
L10	Fin si
L11	Fin pour
L12	Afficher C
L13	F prend la valeur C/N
L14	Afficher F

i. Que permet de tester la condition de la ligne L8 concernant la position du point $M(X\ ;\ Y)$?

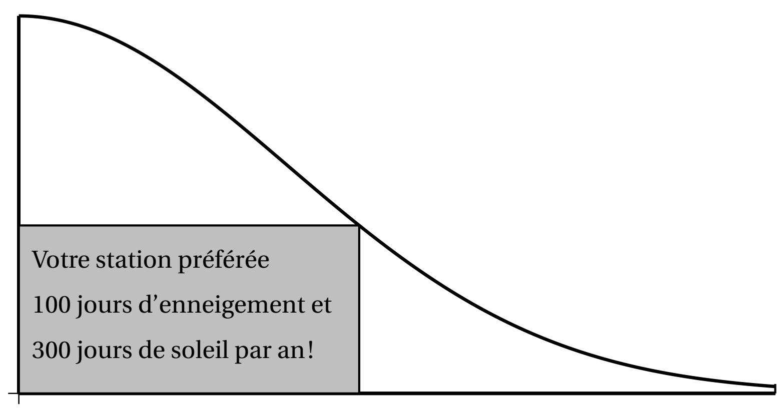
ii. Interpréter la valeur F affichée par cet algorithme.

iii. Que peut-on conjecturer sur la valeur de F lorsque N devient très grand ?

c. En faisant fonctionner cet algorithme pour $N = 10^6$, on obtient $C = 441\,138$.
On admet dans ce cas que la valeur F affichée par l'algorithme est une valeur approchée de la probabilité p à 10^{-3} près.
En déduire une valeur approchée de u_2 à 10^{-2} près.

Partie B

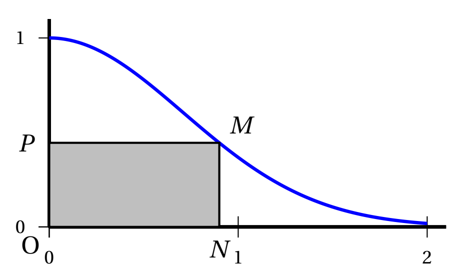
Une entreprise spécialisée est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski.
Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire est insérée sur le panneau comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Le panneau, modélisé par le domaine $\mathscr{D}$ défini dans la partie A, est découpé dans une plaque rectangulaire de 2 mètres sur 1 mètre.
Il est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; l'unité choisie est le mètre.

Pour x nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,2]$, on note :

- M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $\left(x\ ;\ \mathrm{e}^{-x^2}\right)$,
- N le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,
- P le point de coordonnées $\left(0\ ;\ \mathrm{e}^{-x^2}\right)$,
- $A(x)$ l'aire du rectangle ONMP.



1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,2]$, on a : $A(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$.

2. Déterminer la position du point M sur la courbe $\mathscr{C}_f$ pour laquelle l'aire du rectangle ONMP est maximale.

3. Le rectangle ONMP d'aire maximale obtenu à la question 2. doit être peint en bleu, et le reste du panneau en blanc. Déterminer, en m^2 et à 10^{-2} près, la mesure de la surface à peindre en bleu et celle de la surface à peindre en blanc. *

Exercice 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = -z^2 + 2z.$$

Le point M' est appelé image du point M.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$-z^2 + 2z - 2 = 0.$$

En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

2. Soit M un point d'affixe z et M' son image d'affixe z'.
On note N le point d'affixe $z_N = z^2$.
Montrer que M est le milieu du segment $[NM']$.

3. Dans cette question, on suppose que le point M ayant pour affixe z, appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1. On note θ un argument de z.

a. Déterminer le module de chacun des nombres complexes z et z_N, ainsi qu'un argument de z_N en fonction de θ.

b. Sur la figure donnée en annexe page 7, on a représenté un point M sur le cercle $\mathscr{C}$.
Construire sur cette figure les points N et M' en utilisant une règle et un compas (on laissera les traits de construction apparents).

c. Soit A le point d'affixe 1. Quelle est la nature du triangle AMM' ?
La dernière page contenant l'annexe est à rendre avec la copie

*

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Tous les résultats demandés seront arrondis au millième

1. Une étude effectuée sur une population d'hommes âgés de 35 à 40 ans a montré que le taux de cholestérol total dans le sang, exprimé en grammes par litre, peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1,84$ et d'écart type $\sigma = 0,4$.

a. Déterminer selon cette modélisation la probabilité qu'un sujet tiré au hasard dans cette population ait un taux de cholestérol compris entre $1,04$g /L et $2,64$ g/L.

b. Déterminer selon cette modélisation la probabilité qu'un sujet tiré au hasard dans cette population ait un taux de cholestérol supérieur à $1,2$ g/L.

2. Afin de tester l'efficacité d'un médicament contre le cholestérol, des patients nécessitant d'être traités ont accepté de participer à un essai clinique organisé par un laboratoire.
Dans cet essai, 60 % des patients ont pris le médicament pendant un mois, les autres ayant pris un placebo (comprimé neutre).
On étudie la baisse du taux de cholestérol après l'expérimentation.
On constate une baisse de ce taux chez 80 % des patients ayant pris le médicament.
On ne constate aucune baisse pour 90 % des personnes ayant pris le placebo.
On choisit au hasard un patient ayant participé à l'expérimentation et on note :

- M l'évènement « le patient a pris le médicament » ;
- B l'évènement « le taux de cholestérol a baissé chez le patient ».

a. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité de l'évènement B.

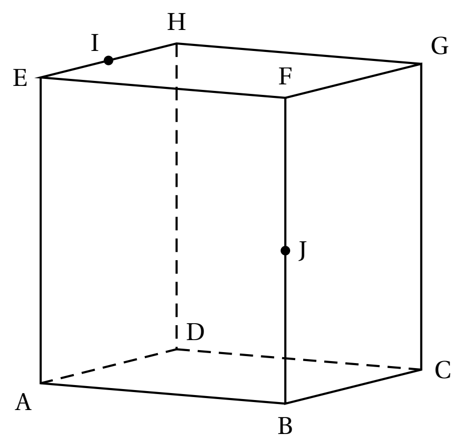
c. Calculer la probabilité qu'un patient ait pris le médicament sachant que son taux de cholestérol a baissé.

3. Le laboratoire qui produit ce médicament annonce que 30 % des patients qui l'utilisent présentent des effets secondaires.
Afin de tester cette hypothèse, un cardiologue sélectionne de manière aléatoire 100 patients traités avec ce médicament.
   a. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de patients suivant ce traitement et présentant des effets secondaires.
   b. L'étude réalisée auprès des 100 patients a dénombré 37 personnes présentant des effets secondaires.
   Que peut-on en conclure ?
   c. Pour estimer la proportion d'utilisateurs de ce médicament présentant des effets secondaires, un organisme indépendant réalise une étude basée sur un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %.
   Cette étude aboutit à une fréquence observée de 37 % de patients présentant des effets secondaires, et à un intervalle de confiance qui ne contient pas la fréquence 30 %.
   Quel est l'effectif minimal de l'échantillon de cette étude ?

*

Exercice 4 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre.
On note I et J les milieux respectifs des segments [EH] et [FB].
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.



1. Donner les coordonnées des points I et J.
2. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).
   c. On note K le milieu du segment [HJ]. Le point K appartient-il au plan (BGI) ?
3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.
   a. En utilisant par exemple le triangle FIG pour base, démontrer que le volume du tétraèdre FBIG est égal à $\dfrac{1}{6}$.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule
   $V = \dfrac{1}{3}B \times h$ *où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.*
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   c. La droite Δ coupe le plan (BGI) en F′. Montrer que le point F′ a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{5}{9}\right)$.
   d. Calculer la longueur FF′. En déduire l'aire du triangle BGI.

*

Exercice 4 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 5 ; −2), B(7 ; −1 ; 3) et C(−2 ; 7 ; −2) et on note $\mathcal{P}$ le plan (ABC).
On cherche une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ sous la forme : $ax + by + cz = 73$, où a, b et c sont des nombres réels.
On note X et Y les matrices colonnes : $X = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que X vérifie la relation : $MX = 73Y$, où M est la matrice
$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Soit N la matrice : $N = \begin{pmatrix} 19 & 4 & -13 \\ -8 & 6 & 17 \\ -47 & 17 & 36 \end{pmatrix}$.

À l'aide d'une calculatrice, on a calculé les produits $M \times N$ et $N \times M$, et on a obtenu les copies d'écran suivantes :

Pour $M \times N$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

Pour $N \times M$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

À l'aide de ces informations, justifier que la matrice M est inversible et exprimer sa matrice inverse M^{-1} en fonction de la matrice N.

3. Montrer alors que : $X = NY$.
En déduire que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne :
$10x + 15y + 6z = 73$.

Partie B

L'objectif de cette partie est l'étude des points à coordonnées entières du plan $\mathcal{P}$ ayant pour équation cartésienne : $10x + 15y + 6z = 73$.

1. Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point appartenant au plan $\mathcal{P}$ et au plan d'équation $z = 3$. On suppose que les coordonnées x, y et z appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

a. Montrer que les entiers x et y sont solutions de l'équation
$(E) : 2x + 3y = 11$.

b. Justifier que le couple $(7\ ;\ -1)$ est une solution particulière de (E) puis résoudre l'équation (E) pour x et y appartenant à $\mathbb{Z}$.

c. Montrer qu'il existe exactement deux points appartenant au plan $\mathcal{P}$ et au plan d'équation $z = 3$ et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces deux points.

2. Dans cette question, on se propose de déterminer tous les points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ du plan $\mathcal{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.
Soient x, y et z des entiers naturels tels que $10x + 15y + 6z = 73$.

a. Montrer que y est impair.

b. Montrer que : $x \equiv 1 \quad [3]$. On admet que : $z \equiv 3 \quad [5]$.

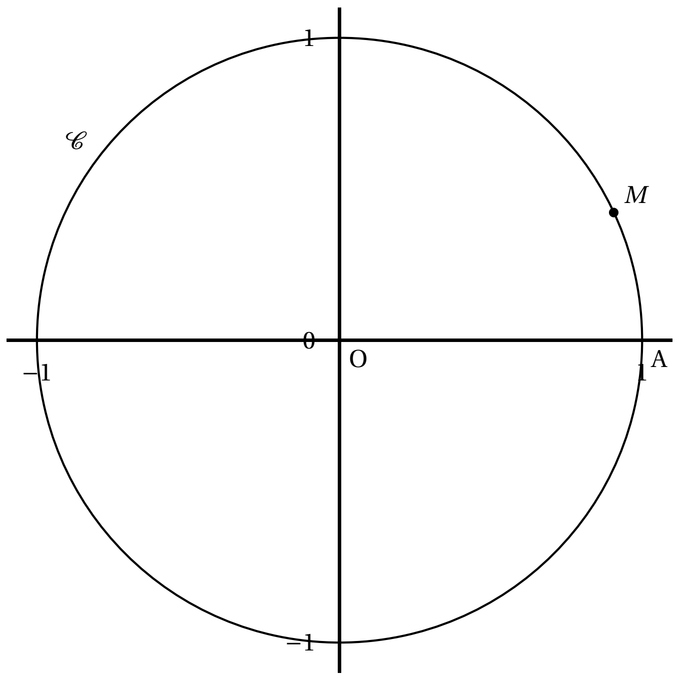
c. On pose alors : $x = 1 + 3p$, $y = 1 + 2q$ et $z = 3 + 5r$, où p, q et r sont des entiers naturels.
Montrer que le point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $p + q + r = 1$.

d. En déduire qu'il existe exactement trois points du plan $\mathcal{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces points.

*

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 2



Durée : 4 heures

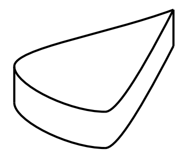
Baccalauréat S Amérique du Sud
21 novembre 2017

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

La chocolaterie Delmas décide de commercialiser de nouvelles confiseries : des palets au chocolat en forme de goutte d'eau.

Pour cela, elle doit fabriquer des moules sur mesure qui doivent répondre à la contrainte suivante : pour que cette gamme de bonbons soit rentable, la chocolaterie doit pouvoir en fabriquer au moins 80 avec 1 litre de pâte liquide au chocolat.

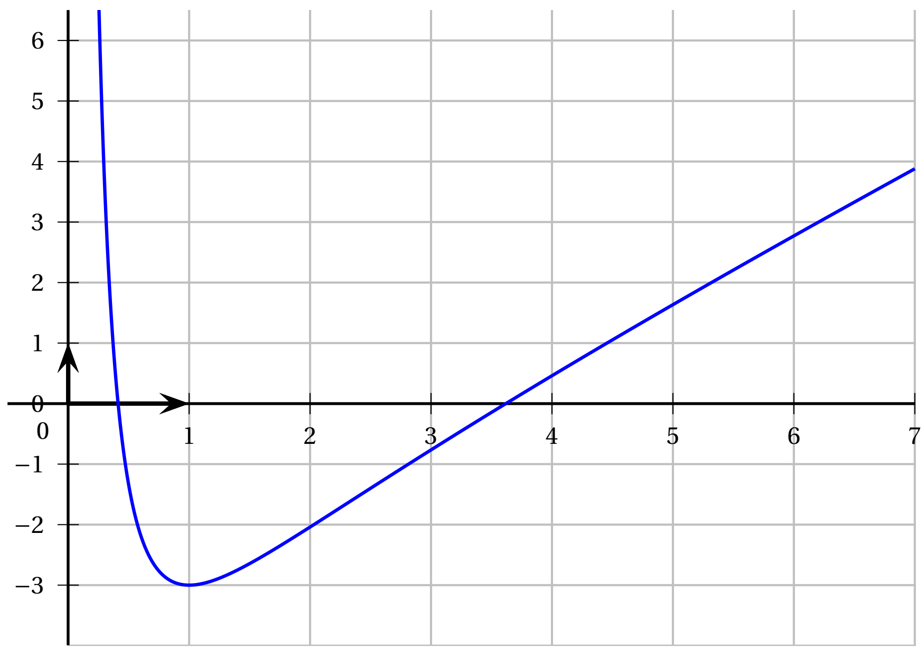


Partie A : modélisation par une fonction

Le demi contour de la face supérieure du palet sera modélisé par une portion de la courbe de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3\ln x}{x}.$$

La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous.



Le repère est orthogonal d'unité 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1. Soit φ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = x^2 - 1 + 3\ln x.$$

   a. Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.

   b. Étudier les variations de φ sur $]0\,;\,+\infty[$.
   En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x.

2. **a.** Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   b. Montrer que sur $]0\,;\,+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.
   En déduire le tableau de variation de f.

c. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,1]$.
Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
On admettra que l'équation $f(x) = 0$ a également une unique solution β sur $[1\,;\,+\infty[$ avec $\beta \approx 3,61$ à 10^{-2} près.

d. Soit F la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2\ln x - \frac{3}{2}(\ln x)^2.$$

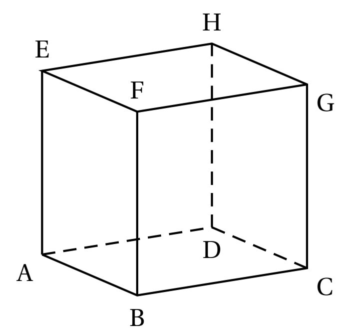
Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : résolution du problème

Dans cette partie, les calculs seront effectués avec les valeurs approchées à 10^{-2} *près de* α *et* β *de la partie* A.

Pour obtenir la forme de la goutte, on considère la courbe représentative C de la fonction f restreinte à l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$ ainsi que son symétrique C' par rapport à l'axe des abscisses.
Les deux courbes C et C' délimitent la face supérieure du palet. Pour des raisons esthétiques, le chocolatier aimerait que ses palets aient une épaisseur de 0,5 cm. Dans ces conditions, la contrainte de rentabilité serait-elle respectée ?

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats



On considère un cube ABCDEFGH.

1. **a.** Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.

   b. En déduire que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

   c. On admet que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.
   Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$.

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE).

c. On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Calculer le volume de la pyramide BDEG.

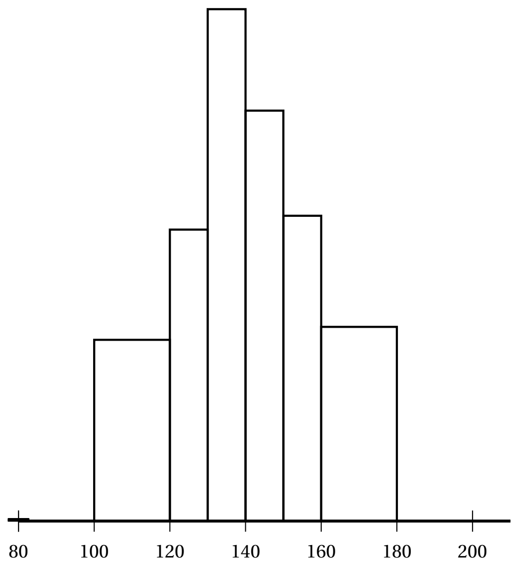
EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

Partie A :

Un organisme de contrôle sanitaire s'intéresse au nombre de bactéries d'un certain type contenues dans la crème fraîche. Pour cela, il effectue des analyses portant sur 10 000 prélèvements de 1 ml de crème fraîche dans l'ensemble de la production française.
Les résultats sont donnés dans le tableau et représentés dans l'histogramme ci-dessous :

Nombre de bactéries (en milliers)	[100 ; 120[	[120 ; 130[	[130 ; 140[	[140 ; 150[	[150 ; 160[	[160 ; 180[
Nombre de prélèvements	1 597	1 284	2 255	1 808	1 345	1 711



À l'aide de la calculatrice, donner une estimation de la moyenne et de l'écart-type du nombre de bactéries par prélèvement.

Partie B :

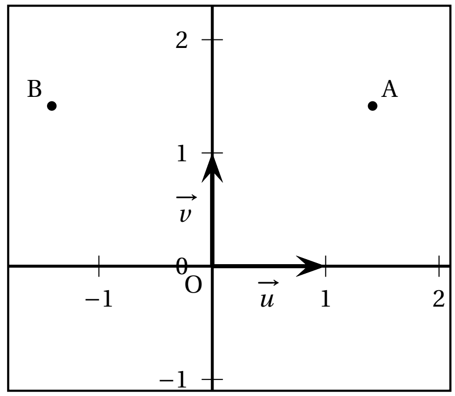
L'organisme décide alors de modéliser le nombre de bactéries étudiées (en milliers par ml) présentes dans la crème fraîche par une variable aléatoire X suivant la loi normale de paramètres $\mu = 140$ et $\sigma = 19$.

1. **a.** Ce choix de modélisation est-il pertinent ? Argumenter.
   b. On note $p = P(X \geqslant 160)$. Déterminer la valeur arrondie de p à 10^{-3}.
2. Lors de l'inspection d'une laiterie, l'organisme de contrôle sanitaire analyse un échantillon de 50 prélèvements de 1 ml de crème fraîche dans la production de cette laiterie ; 13 prélèvements contiennent plus de 160 milliers de bactéries.
   a. L'organisme déclare qu'il y a une anomalie dans la production et qu'il peut l'affirmer en ayant une probabilité de 0,05 de se tromper. Justifier sa déclaration.
   b. Aurait-il pu l'affirmer avec une probabilité de 0,01 de se tromper ?

EXERCICE 4 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_{\mathrm{B}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$



1. Montrer que OAB est un triangle rectangle isocèle.

2. On considère l'équation

$$(E)\ :\ z^2 - \sqrt{6}\,z + 2 = 0.$$

Montrer qu'une des solutions de (E) est l'affixe d'un point situé sur le cercle circonscrit au triangle OAB.

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.
Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016 + n$. On a donc
$v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.

2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel $n,\ u_{n+1} = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x.$$

a. Justifier que g est croissante sur $[0\,;60]$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

2. On remarquera que $u_{n+1} = g\left(u_n\right)$.

a. Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

d. En déduire la convergence de la suite (u_n).

e. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.
Il utilise l'algorithme suivant.

Variables	n un entier naturel
	u un nombre réel
Traitement	n prend la valeur 0 u prend la valeur 12 **Tant Que** .... u prend la valeur .... n prend la valeur .... **Fin Tant Que**
Sortie	Afficher ....

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geqslant 50$.

EXERCICE 5 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

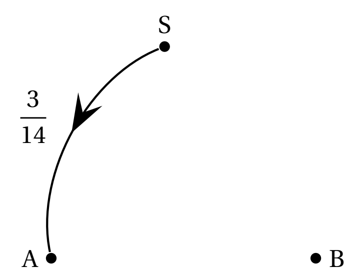
Dans un jeu vidéo en ligne, les joueurs peuvent décider de rejoindre l'équipe A (statut noté A) ou l'équipe B (statut noté B) ou bien de n'en rejoindre aucune et rester ainsi solitaire (statut noté S). Chaque jour, chaque joueur peut changer de statut mais ne peut pas se retirer du jeu.
Les données recueillies sur les premières semaines après le lancement du jeu ont permis de dégager les tendances suivantes :

- un joueur de l'équipe A y reste le jour suivant avec une probabilité de 0,6 ; il devient joueur solitaire avec une probabilité de 0,25. Sinon, il rejoint l'équipe B ;
- un joueur de l'équipe B y reste le jour suivant avec une probabilité de 0,6 ; sinon, il devient joueur solitaire avec une probabilité identique à celle de rejoindre l'équipe A ;
- un joueur solitaire garde ce statut le jour suivant avec une probabilité de $\dfrac{1}{7}$; il rejoint l'équipe B avec une probabilité 3 fois plus élevée que celle de rejoindre l'équipe A.

Au début du jeu, à la clôture des inscriptions, tous les joueurs sont solitaires.
On note $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & s_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste des statuts d'un joueur au bout de n jours. Ainsi a_n est la probabilité d'être dans l'équipe A, b_n celle d'être dans l'équipe B et s_n celle d'être un joueur solitaire, après n jours de jeu.
On a donc : $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ et $s_0 = 1$.

1. On note p la probabilité qu'un joueur solitaire un jour donné passe dans l'équipe A le jour suivant. Justifier que $p = \dfrac{3}{14}$.

2. a. Recopier et compléter le graphe probabiliste ci-contre représentant la situation.



b. On admet que la matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on a donc $U_{n+1} = U_n T$.
Montrer alors que, pour tout entier naturel n, on a $U_n = U_0 T^n$.

c. Déterminer l'état probabiliste au bout d'une semaine, en arrondissant au millième.

3. On pose $V = \begin{pmatrix} 300 & 405 & 182 \end{pmatrix}$.

a. Donner, sans détailler les calculs, le produit matriciel VT. Que constate-t-on ?

b. En déduire un état probabiliste qui reste stable d'un jour sur l'autre.

4. On donne l'algorithme suivant, où la commande « $U[i]$ » renvoie le coefficient de la i-ème colonne d'une matrice ligne U.

Variables	k un entier naturel U une matrice de taille 1×3 T une matrice carrée d'ordre 3
Traitement	U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ T prend la valeur $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ Pour k allant de 1 à 7 U prend la valeur UT Fin Pour
Sortie	Afficher $U[1]$

a. Quelle est la valeur numérique arrondie au millième de la sortie de cet algorithme ? L'interpréter dans le contexte de l'exercice.

b. Recopier et modifier cet algorithme pour qu'il affiche la fréquence de joueurs solitaires au bout de 13 jours.

∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie & Wallis et Futuna ∾

28 novembre 2017

Exercice 1 (4 points)
Commun à tous les candidats

Sofia souhaite se rendre au cinéma. Elle peut y aller à vélo ou en bus.

Partie A : En utilisant le bus
On suppose dans cette partie que Sofia utilise le bus pour se rendre au cinéma. La durée du trajet entre son domicile et le cinéma (exprimée en minutes) est modélisée par la variable aléatoire T_B qui suit la loi uniforme sur $[12\ ;\ 15]$.

1. Démontrer que la probabilité que Sofia mette entre 12 et 14 minutes est de $\dfrac{2}{3}$.
2. Donner la durée moyenne du trajet.

Partie B : En utilisant son vélo

On suppose à présent que Sofia choisit d'utiliser son vélo.
La durée du parcours (exprimée en minutes) est modélisée par la variable aléatoire T_v qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 14$ et d'écart-type $\sigma = 1,5$.

1. Quelle est la probabilité que Sofia mette moins de 14 minutes pour se rendre au cinéma ? Quelle est la probabilité que Sofia mette entre 12 et 14 minutes pour se rendre au cinéma ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.

Partie C : En jouant aux dés

Sofia hésite entre le bus et le vélo. Elle décide de lancer un dé équilibré à 6 faces.
Si elle obtient 1 ou 2, elle prend le bus, sinon elle prend son vélo. On note :
- B l'évènement « Sofia prend le bus » ;
- V l'évènement « Sofia prend son vélo » ;
- C l'évènement « Sofia met entre 12 et 14 minutes pour se rendre au cinéma ».

1. Démontrer que la probabilité, arrondie à 10^{-2}, que Sofia mette entre 12 et 14 minutes est de 0,49.
2. Sachant que Sofia a mis entre 12 et 14 minutes pour se rendre au cinéma, quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'elle ait emprunté le bus ?

Exercice 2 (5 points)
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f et interpréter graphiquement le résultat.
2. **a.** Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$,

$$f(x) = 4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

   b. En déduire que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\ln(x)\big(2-\ln(x)\big)}{x^2}.$$

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du nombre réel x strictement positif.

c. Calculer $f(1)$ et $f\left(\mathrm{e}^2\right)$.

On obtient alors le tableau de variations ci-dessous.

x	0	1	e^2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$	0

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $]0~;~+\infty[$ et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 3 (3 points)
Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par

$$f(x) = 2\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}$$

et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
On admet que, pour tout x appartenant à $[0~;~\ln(2)]$, $f(x)$ est positif.
Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Proposition A :

L'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln(2)$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ est égale à 1 unité d'aire.

Partie B

Soit n un entier strictement positif.
Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par

$$f_n(x) = 2n\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}$$

et $\mathscr{C}_n$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
On admet que f_n est dérivable et que $\mathscr{C}_n$ admet une tangente horizontale en un unique point S_n.
Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Proposition B :

Pour tout entier strictement positif n, l'ordonnée du point S_n est n^2.

Exercice 4 (3 points)
Commun à tous les candidats

Les questions 1. et 2. de cet exercice pourront être traitées de manière indépendante.

On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par

$$z_n = \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^n}.$$

On se place dans le plan complexe d'origine O.

1. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.

b. Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.

2. Pour quelles valeurs de n le nombre z_n est-il réel ?

Exercice 5 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie A :

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur.
On a reproduit ci-dessous une partie d'une feuille de calcul, où figurent les valeurs de u_0 et de u_1.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.

2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. On donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n pour n allant de 2 à 5.

3. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

Partie B : Étude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_n - 7.$$

1. a. Démontrer que (v_n) est une suite constante.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.

2. a. En utilisant le résultat de la question **1. b.**, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} < 15$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 5 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un territoire donné, on s'intéresse à l'évolution couplée de deux espèces : les buses (les prédateurs) et les campagnols (les proies).
Des scientifiques modélisent, pour tout entier naturel n, cette évolution par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_0 &=& 1\,000\\ c_0 &=& 1\,500\\ b_{n+1} &=& 0,3b_n+0,5c_n\\ c_{n+l} &=& -0,5b_n+1,3c_n\end{array}\right.$$

où b_n représente approximativement le nombre de buses et c_n le nombre approximatif de campagnols le 1[er] juin de l'année $2000+n$ (où n désigne un entier naturel).

1. On note A la matrice $\begin{pmatrix}0,3 & 0,5\\ -0,5 & 1,3\end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix}b_n\\ c_n\end{pmatrix}$.

a. Vérifier que $U_1 = \begin{pmatrix}1\,050\\ 1\,450\end{pmatrix}$ et calculer U_2.

b. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.

On donne les matrices $P = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix}0,8 & 0,5\\ 0 & 0,8\end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. On admet que P a pour inverse une matrice Q de la forme $\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}$ où a est un réel.

a. Déterminer la valeur de a en justifiant.

b. On admet que $A = PTQ$.
Démontrer que, pour tout entier n non nul, on a

$$A^n = PT^nQ.$$

c. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier n non nul,

$$T^n = \begin{pmatrix}0,8^n & 0,5n\times 0,8^{n-1}\\ 0 & 0,8^n\end{pmatrix}.$$

3. Lucie exécute l'algorithme ci-dessous et obtient en sortie $N = 40$.
Quelle conclusion Lucie peut-elle énoncer pour les buses et les campagnols ?

Initialisation :	N prend la valeur 0
	B prend la valeur 1 000
	C prend la valeur 1 500
Traitement :	Tant que $B > 2$ ou $C > 2$
	N prend la valeur $N+1$
	R prend la valeur B
	B prend la valeur $0,3R+0,5C$
	C prend la valeur $-0,5R+1,3C$
	Fin Tant Que
Sortie :	Afficher N

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$U_n = \begin{pmatrix}1\,000\times 0,8^n + \dfrac{625}{2}n\times 0,8^n\\[2ex] 1\,500\times 0,8^n + \dfrac{625}{2}n\times 0,8^n\end{pmatrix}$$

et

$$n \leqslant 10\times 1,1^n.$$

a. En déduire les limites des suites (b_n) et (c_n).

b. Des mesures effectuées dans des territoires comparables montrent que la population de campagnols reste toujours supérieure à au moins 50 individus.
À la lumière de ces informations, le modèle proposé dans l'exercice vous paraît-il cohérent ?

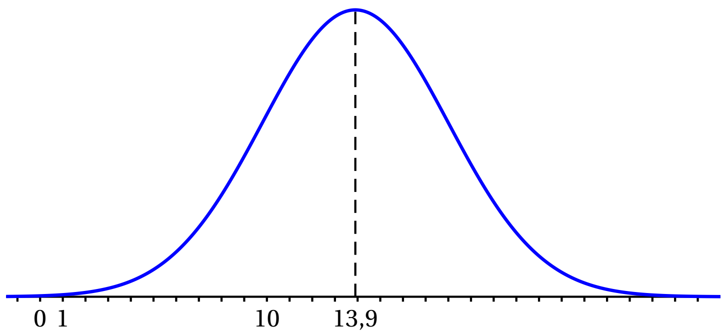
∽ Baccalauréat S Pondichéry 22 avril 2016 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

Des études statistiques ont permis de modéliser le temps hebdomadaire, en heures, de connexion à internet des jeunes en France âgés de 16 à 24 ans par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne $\mu = 13,9$ et d'écart type σ.
La fonction densité de probabilité de T est représentée ci-dessous :



1. On sait que $p(T \geqslant 22) = 0,023$.
   En exploitant cette information :
   a. hachurer sur le graphique donné en annexe, deux domaines distincts dont l'aire est égale à $0,023$;
   b. déterminer $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22)$. Justifier le résultat. Montrer qu'une valeur approchée de σ au dixième est $4,1$.
2. On choisit un jeune en France au hasard.
   Déterminer la probabilité qu'il soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine.
   Arrondir au centième.

Partie B

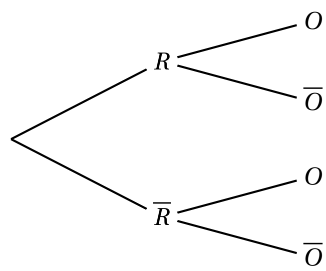
Dans cette partie, les valeurs seront arrondies au millième.
La Hadopi (Haute Autorité pour la diffusion des Œuvres et la Protection des droits sur Internet) souhaite connaître la proportion en France de jeunes âgés de 16 à 24 ans pratiquant au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet. Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage.
Mais la Hadopi craint que les jeunes interrogés ne répondent pas tous de façon sincère. Aussi, elle propose le protocole ($\mathscr{P}$) suivant :

> On choisit aléatoirement un échantillon de jeunes âgés de 16 à 24 ans.
> Pour chaque jeune de cet échantillon :
> - le jeune lance un dé équilibré à 6 faces ; l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
> - l'enquêteur pose la question : « Effectuez-vous un téléchargement illégal au moins une fois par semaine ? » ;
>
> ■ si le résultat du lancer est pair alors le jeune doit répondre à la question par « Oui » ou « Non » de façon sincère ;
> ■ si le résultat du lancer est « 1 » alors le jeune doit répondre « Oui » ;
> ■ si le résultat du lancer est « 3 ou 5 » alors le jeune doit répondre « Non ».

Grâce à ce protocole, l'enquêteur ne sait jamais si la réponse donnée porte sur la question posée ou résulte du lancer de dé, ce qui encourage les réponses sincères.

On note p la proportion inconnue de jeunes âgés de 16 à 24 ans qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

1. *Calculs de probabilités*
   On choisit aléatoirement un jeune faisant parti du protocole ($\mathscr{P}$).
   On note : R l'évènement « le résultat du lancer est pair »,
   O l'évènement « le jeune a répondu Oui ».
   Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



En déduire que la probabilité q de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est :

$$q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}.$$

2. *Intervalle de confiance*

a. À la demande de l'Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole ($\mathscr{P}$). Sur un échantillon de taille 1 500, il dénombre 625 réponses « Oui ».
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage, parmi la population des jeunes français âgés de 16 à 24 ans.

b. Que peut-on en conclure sur la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?*

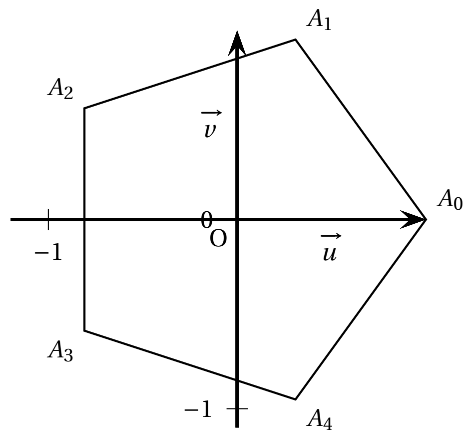
EXERCICE 2 — 3 points

Commun à tous les candidats

L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, de centre O tel que $\overrightarrow{OA_0} = \vec{u}$.
On rappelle que dans le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, ci-contre :

- les cinq côtés sont de même longueur;
- les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 appartiennent au cercle trigonométrique;
- pour tout entier k appartenant à $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ on a $\left(\overrightarrow{OA_k} ; \overrightarrow{OA_{k+1}}\right) = \frac{2\pi}{5}$.



1. On considère les points B d'affixe -1 et J d'affixe $\frac{\text{i}}{2}$.

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre J et de rayon $\frac{1}{2}$ coupe le segment $[BJ]$ en un point K.

Calculer BJ, puis en déduire BK.

2. **a.** Donner sous forme exponentielle l'affixe du point A_2. Justifier brièvement.

b. Démontrer que $BA_2{}^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

c. Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-dessous, que l'on pourra utiliser sans justification :

▶ Calcul formel	
1	cos (4*pi/5) $\to \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)$
2	sqrt((3 - sqrt(5))/2)
	$\to \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$

« sqrt »signifie « racine carrée »

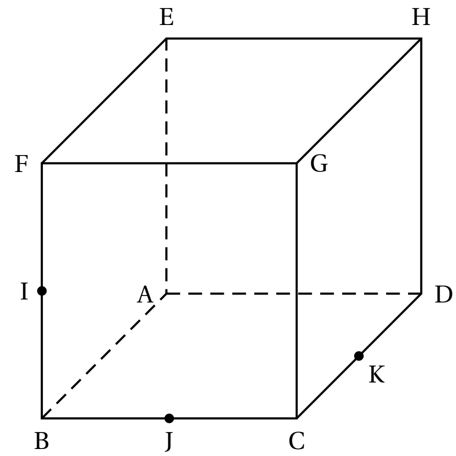
En déduire, grâce à ces résultats, que $BA_2 = BK$.

3. Dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ donné en annexe, construire à la règle et au compas un pentagone régulier. N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.*

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment [BF].
Le point J est le milieu du segment [BC].
Le point K est le milieu du segment [CD].



Partie A

Dans cette partie, on ne demande aucune justification

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.
Construire, sur la figure fournie en annexe et en laissant apparents les traits de construction :

- le point L;
- l'intersection $\mathcal{D}$ des plans (IJK) et (CDH);
- la section du cube par le plan (IJK).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ est normal au plan (IJK).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

3. On désigne par M un point du segment [AG] et t le réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $\overrightarrow{\text{A}M} = t\overrightarrow{\text{AG}}$.

a. Démontrer que $M\text{I}^2 = 3t^2 - 3t + \dfrac{5}{4}$.

b. Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $\text{N}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

4. Démontrer que pour ce point $\text{N}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$:

a. N appartient au plan (IJK).

b. La droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).*

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère les matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres entiers.
Le nombre $3a - 5b$ est appelé le déterminant de M. On le note $\det(M)$.
Ainsi $\det(M) = 3a - 5b$.

1. Dans cette question on suppose que $\det(M) \neq 0$ et on pose $N = \dfrac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix}3 & -b\\ -5 & a\end{pmatrix}$.

Justifier que N est l'inverse de M.

2. On considère l'équation (E) : $\quad \det(M) = 3$.

On souhaite déterminer tous les couples d'entiers $(a~;~b)$ solutions de l'équation (E).

a. Vérifier que le couple $(6~;~3)$ est une solution de (E).

b. Montrer que le couple d'entiers $(a~;~b)$ est solution de (E) si et seulement si $3(a-6) = 5(b-3)$.
En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Partie B

1. On pose $Q = \begin{pmatrix}6 & 3\\ 5 & 3\end{pmatrix}$.

En utilisant la partie A, déterminer la matrice inverse de Q.

2. *Codage avec la matrice* Q

Pour coder un mot de deux lettres à l'aide de la matrice $Q = \begin{pmatrix}6 & 3\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ on utilise la procédure ci-après :

Étape 1 : On associe au mot la matrice $X = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ où x_1 est l'entier correspondant à la première lettre du mot et x_2 l'entier correspondant à la deuxième lettre du mot selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Étape 2 : La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$ telle que
$Y = QX$.

Étape 3 : La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix}r_1\\ r_2\end{pmatrix}$ telle que r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 est le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.

Étape 4 : À la matrice $R = \begin{pmatrix}r_1\\ r_2\end{pmatrix}$ on associe un mot de deux lettres selon le tableau de correspondance de l'étape 1.

$$\text{Exemple : JE} \to X = \begin{pmatrix}9\\ 4\end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix}66\\ 57\end{pmatrix} \to R = \begin{pmatrix}14\\ 5\end{pmatrix} \to \text{OF}.$$

Le mot JE est codé en le mot OF.
Coder le mot DO.

3. *Procédure de décodage*

On conserve les mêmes notations que pour le codage.
Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que
$Y = QX$.

a. Démontrer que $3X = 3Q^{-1}Y$ puis que $\left\{\begin{array}{lcrl} 3x_1 & \equiv & 3r_1 - 3r_2 & [26]\\ 3x_2 & \equiv & -5r_1 + 6r_2 & [26]\end{array}\right.$

b. En remarquant que $9 \times 3 \equiv 1 \quad [26]$, montrer que $\left\{\begin{array}{lcrl} x_1 & \equiv & r_1 - r_2 & [26]\\ x_2 & \equiv & 7r_1 + 2r_2 & [26]\end{array}\right.$

c. Décoder le mot SG.*

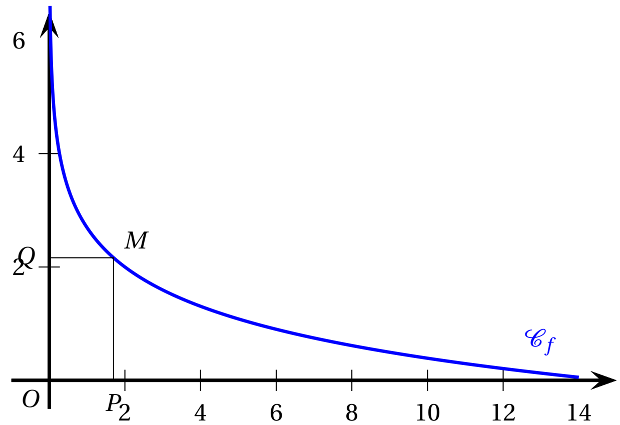
Exercice 4 **3 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $]0~;~14]$ par

$$f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur $\mathscr{C}_f$?
- L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ?
  Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.

Justifier les réponses.*

EXERCICE 5 **5 points**

Commun à tous les candidats

On souhaite stériliser une boîte de conserve.
Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25$ °C et on la place dans un four à température constante $T_F = 100$ °C.
La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85 °C.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.
Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0,85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes.
   Arrondir à l'unité.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.
3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

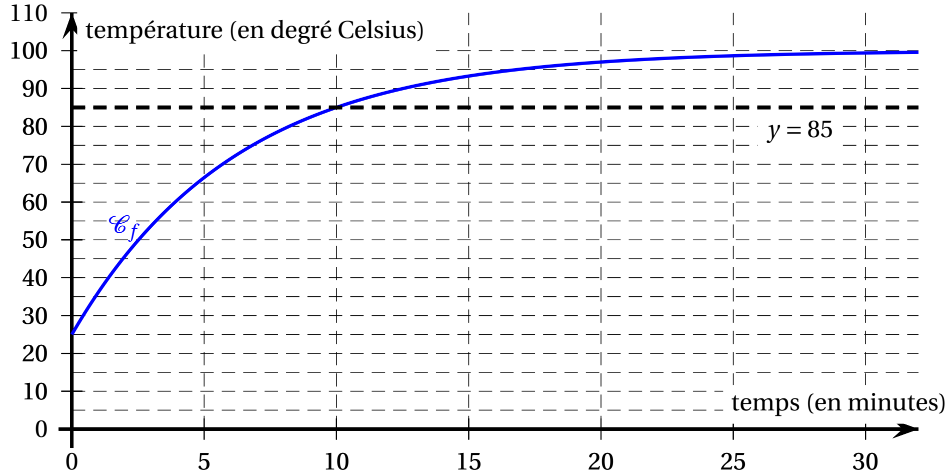
Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.
On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec :

$$f(t) = 100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}.$$

1. **a.** Étudier le sens de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
   b. Justifier que si $t \geqslant 10$ alors $f(t) \geqslant 85$.

2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.
On note $\mathscr{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$,
$y = 85$ et la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f.
On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathscr{A}(\theta)$ est supérieure à 80.



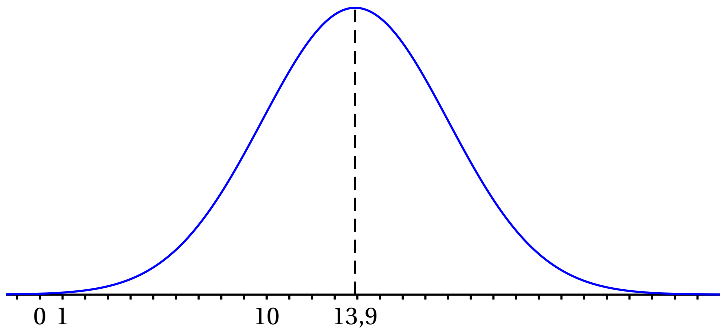
a. Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe, que l'on a $\mathscr{A}(25) > 80$.

b. Justifier que, pour $\theta \geqslant 10$, on a $\mathscr{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\displaystyle\int_{10}^{\theta} \text{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\text{d}t$.

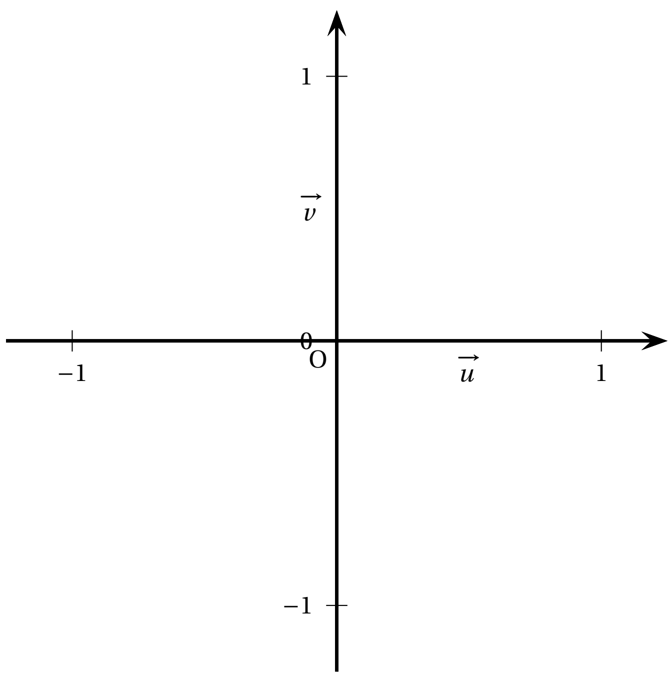
c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?*

ANNEXE 1 à compléter et à remettre avec la copie

EXERCICE 1

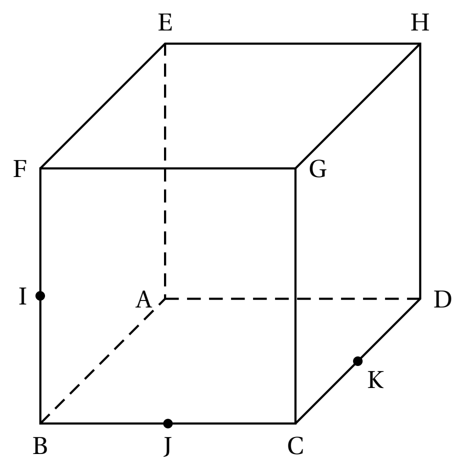


EXERCICE 2

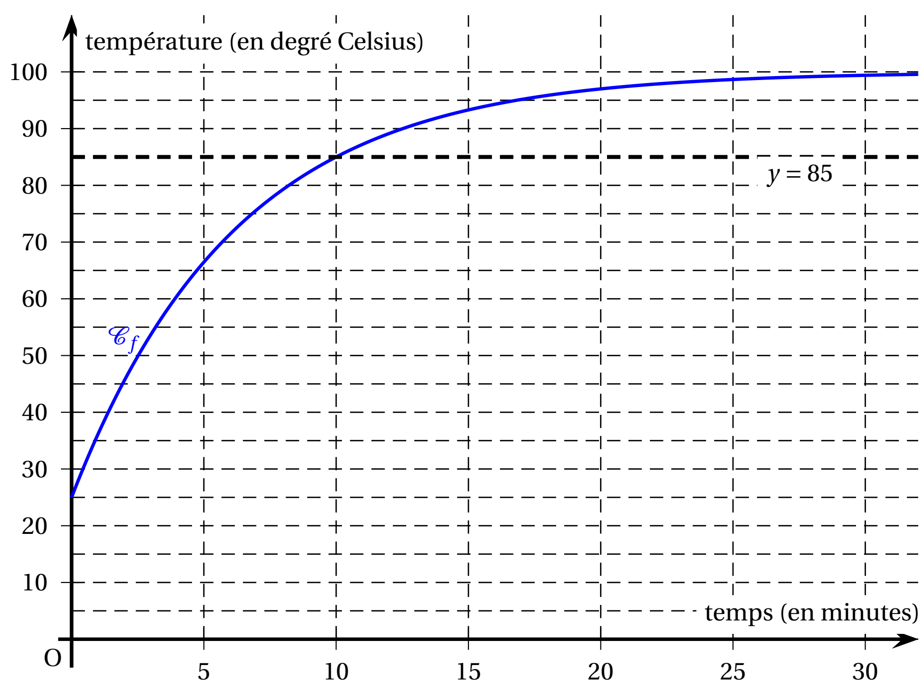


ANNEXE 2 à compléter et à remettre avec la copie

EXERCICE 3



EXERCICE 5



∽ Baccalauréat S Liban 31 mai 2016 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère un solide ADECBF constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée **en annexe (à rendre avec la copie)**. Toutes les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AK}}\right)$.

1. **a.** Montrer que $\text{IE} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I, E et F.

   b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

   c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).

2. On nomme M le milieu du segment [DF] et N celui du segment [AB].

   a. Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

   b. Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

   c. Construire sur l'**annexe (à rendre avec la copie)** la section du solide ADECBF par le plan (EMN).*

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.
Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} *près.*

Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.

1. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?
2. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?

Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite.
Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil. Ses doutes sont-ils justifiés ?

Partie C

Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.
Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est $0,24$;
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est $0,235$.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?*

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1-x}}.$$

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}}$ (on rappelle que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$).
3. Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(2) + 1 - \ln(1+\mathrm{e})$.

Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + n\mathrm{e}^{1-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On considère la suite de terme général

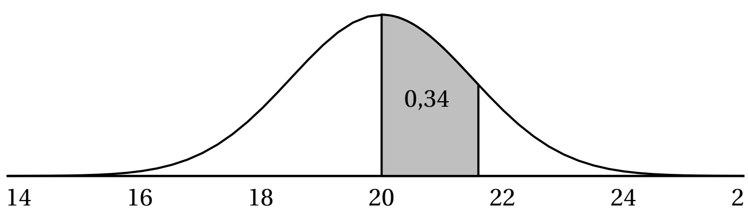
$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. On a tracé en annexe les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe $\mathscr{C}_0$ représentative de la fonction f_0.
2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0.
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
   Démontrer cette conjecture.
4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?*

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

- Sur le schéma ci-dessous on a représenté la courbe de densité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 20$. La probabilité que la variable aléatoire X soit comprise entre 20 et 21,6 est égale à 0,34.



  Affirmation 1 : La probabilité que la variable aléatoire X appartienne à l'intervalle $[23{,}2\,;\,+\infty[$ vaut environ $0{,}046$.

- Soit z un nombre complexe différent de 2. On pose :

$$Z = \frac{\mathrm{i}z}{z-2}.$$

  Affirmation 2 : L'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est une droite passant par le point A$(1\,;\,0)$.
  Affirmation 3 : Z est un imaginaire pur si et seulement si z est réel.

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4 + 6\mathrm{e}^{-2x}}.$$

  Affirmation 4 : L'équation $f(x) = 0{,}5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
  Affirmation 5 : L' algorithme suivant affiche en sortie la valeur $0{,}54$.

Variables :	X et Y sont des réels
Initialisation :	X prend la valeur 0
	Y prend la valeur $\dfrac{3}{10}$
Traitement :	Tant que $Y < 0,5$
	X prend la valeur $X + 0,01$
	Y prend la valeur $\dfrac{3}{4+6\mathrm{e}^{-2X}}$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher X

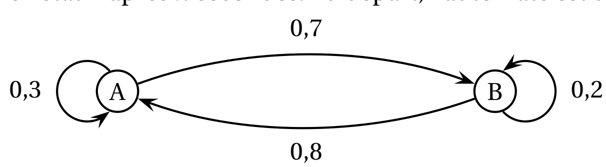
*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

- On considère le système $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 1 & [5]\\ n & \equiv & 3 & [4]\end{array}\right.$ d'inconnue n entier relatif.
  Affirmation 1 : Si n est solution de ce système alors $n - 11$ est divisible par 4 et par 5.
  Affirmation 2 : Pour tout entier relatif k, l'entier $11 + 20k$ est solution du système.
  Affirmation 3 : Si un entier relatif n est solution du système alors il existe un entier relatif k tel que $n = 11 + 20k$.
- Un automate peut se trouver dans deux états A ou B. À chaque seconde il peut soit rester dans l'état où il se trouve, soit en changer, avec des probabilités données par le graphe probabiliste ci-dessous.
  Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état A après n secondes et b_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état B après n secondes. Au départ, l'automate est dans l'état B.



On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a et b sont des réels
Initialisation :	a prend la valeur 0
	b prend la valeur 1
Traitement :	Pour k allant de 1 à 10
	a prend la valeur $0,8a + 0,3b$
	b prend la valeur $1 - a$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher a
	Afficher b

Affirmation 4 : En sortie, cet algorithme affiche les valeurs de a_{10} et b_{10}.
Affirmation 3 : Après 4 secondes, l'automate a autant de chances d'être dans l'état A que d'être dans l'état B.*

EXERCICE 5 **3 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_0 & = & 0\\ z_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 5\end{array}\right.$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_{\mathrm{A}} = 4 + 2\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe z_{A}.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_{\mathrm{A}}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

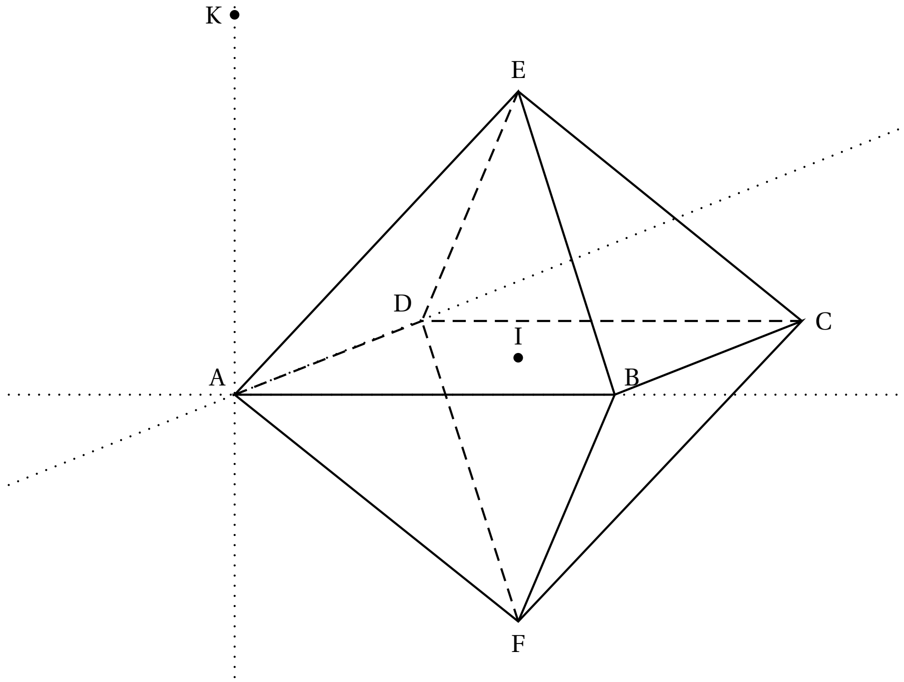
$$u_n = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4-2\mathrm{i}).$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.*

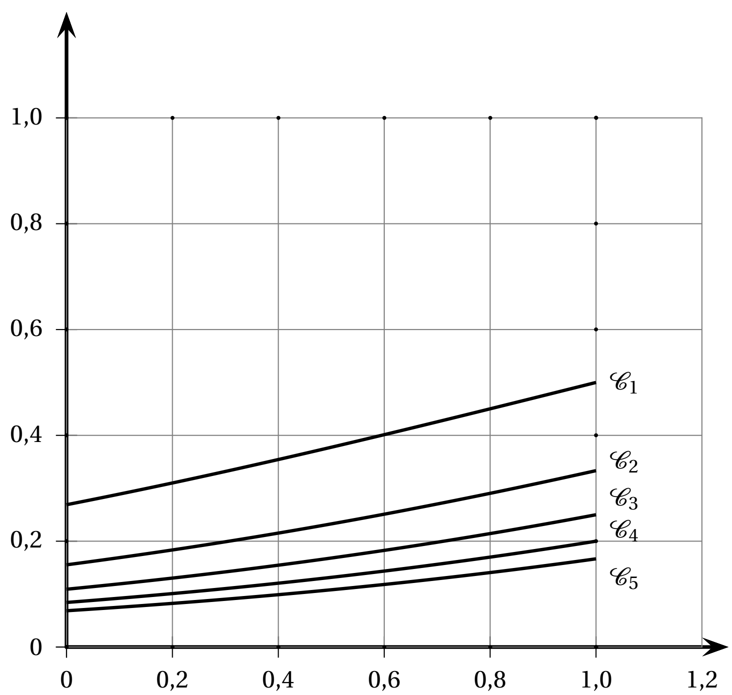
Annexe

À rendre avec la copie

Exercice 1



Exercice 3



Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat S Amérique du Nord ∾ 1$^{\text{er}}$ juin 2016

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :
A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;
B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;
V : « la bille est vendable ».

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.
2. Justifier que $P(B \cap V) = 0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.
3. Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B.
   A-t-il raison ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre, exprimé en cm, des billes produites par les machines A et B.

1. Une étude statistique conduit à modéliser le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0,055$.
   Vérifier que la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien celle trouvée dans la partie A, au centième près.
2. De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type σ', σ' étant un réel strictement positif.
   Sachant que $P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) = 0,98$, déterminer une valeur approchée au millième de σ'.

Partie C

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.
Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.
   a. On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}.
   b. Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?
2. Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?*

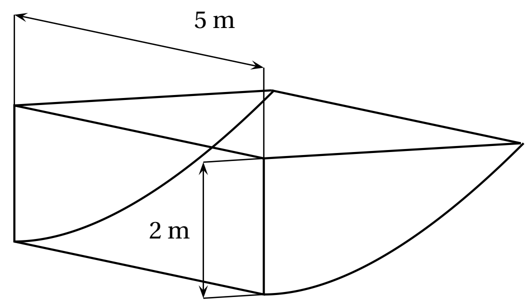
Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.
Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

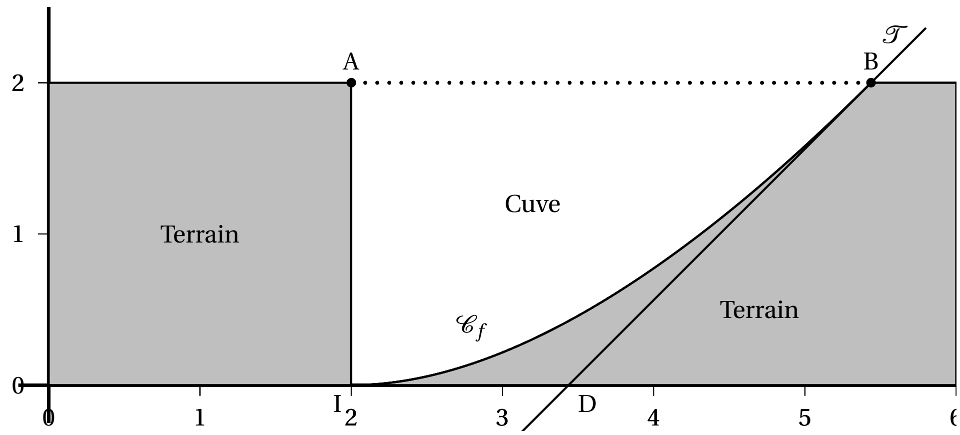
Cette cuve est schématisée ci-contre.



La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 2\mathrm{e}]$ définie par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.
On considère les points $\mathrm{A}(2\,;\,2)$, $\mathrm{I}(2\,;\,0)$ et $\mathrm{B}(2\mathrm{e}\,;\,2)$.



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.

2. On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite $\mathscr{T}$ avec l'axe des abscisses.

a. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ et en déduire les coordonnées de D.

b. On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites d'équations $y = 2$, $x = 2$ et $x = 2\mathrm{e}$.
S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB.
Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

3. a. Montrer que, sur l'intervalle $[2\,;\,2\mathrm{e}]$, la fonction G définie par

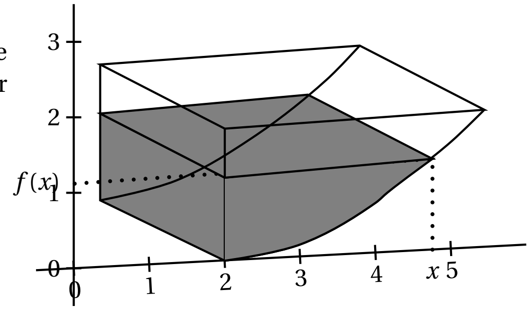
$$G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$$

est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,2\mathrm{e}]$.

c. Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B



Pour tout réel x compris entre 2 et 2e, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.
On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2\,;\,2\text{e}]$,

$$v(x)=5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)-2x\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{4}+2x-3\right].$$

1. Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre?

2. On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre.
Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

Variables :	a est un réel
	b est un réel
Traitement :	a prend la valeur 2
	b prend la valeur 2 e
	Tant que $v(b)-v(a)>10^{-3}$ faire :
	c prend la valeur $(a+b)/2$
	Si $v(c)<V/2$, alors :
	a prend la valeur c
	Sinon
	b prend la valeur c
	Fin Si
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $f(c)$

*

Exercice 3 **3 points**
Commun à tous les candidats

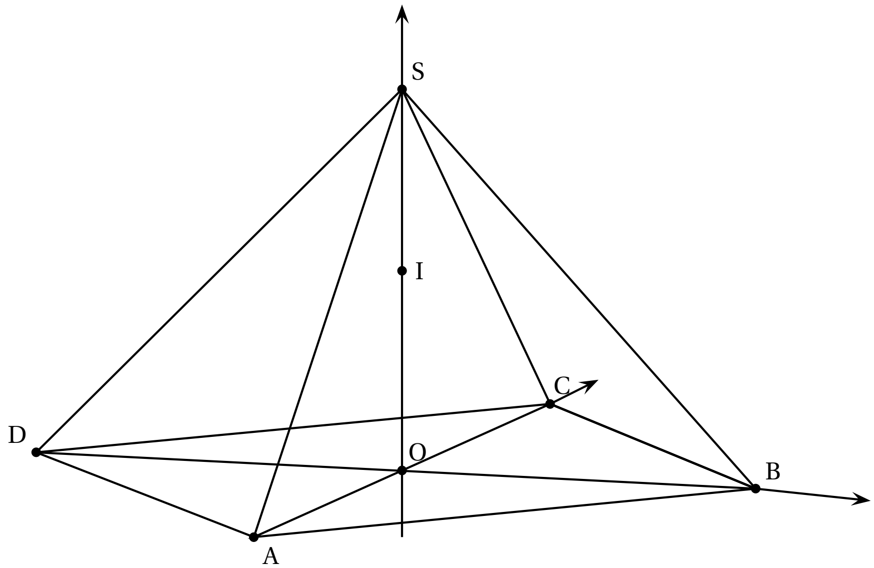
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe 4i et les points C et D tels que ABCD est un carré de centre O.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n=(1+\text{i})^n$.

1. Écrire le nombre $1+\text{i}$ sous forme exponentielle.

2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n\geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD.*

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la pyramide régulière SABCD de sommet S constituée de la base carrée ABCD et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base ABCD avec OB = 1.
On rappelle que le segment [SO] est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Justifier que le repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\text{OB}},\,\overrightarrow{\text{OC}},\,\overrightarrow{\text{OS}}\right)$ est orthonormé.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\text{OB}},\,\overrightarrow{\text{OC}},\,\overrightarrow{\text{OS}}\right)$.

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{\text{SK}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{SD}}$ et on note I le milieu du segment [SO].

a. Déterminer les coordonnées du point K.

b. En déduire que les points B, I et K sont alignés.

c. On note L le point d'intersection de l'arête [SA] avec le plan (BCI).
Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

d. Déterminer les coordonnées du point L.

3. On considère le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\text{OB}},\,\overrightarrow{\text{OC}},\,\overrightarrow{\text{OS}}\right)$.

a. Montrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).

b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{\text{AS}}$ et $\overrightarrow{\text{DS}}$ sont coplanaires.

c. Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?*

Exercice 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.
On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.

1. a. Traduire par une phrase la probabilité $P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=1\right)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{(X_n=0)}\left(X_{n+1}=1\right),\,P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=1\right)\ \text{ et }\ P_{(X_n=2)}\left(X_{n+1}=1\right).$$

b. Exprimer $P\left(X_{n+1}=1\right)$ en fonction de $P\left(X_n=0\right)$, $P\left(X_n=1\right)$ et $P\left(X_n=2\right)$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne définie par :

$$R_n = \begin{pmatrix}P\left(X_n=0\right) & P\left(X_n=1\right) & P\left(X_n=2\right)\end{pmatrix}$$

et on considère M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note R_0 la matrice ligne $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admettra par la suite que, pour tout entier naturel n, $R_{n+1} = R_n \times M$.

Déterminer R_1 et justifier que, pour tout entier naturel n, $R_n = R_0 \times M^n$.

3. On admet que $M = P \times D \times P^{-1}$ avec :

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Établir que, pour tout entier naturel n, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

On admettra que, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. **a.** Calculer $D^n \times P^{-1}$ en fonction de n.

b. Sachant que $R_0 P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n.

5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 2)$.

Interpréter ces résultats.*

Baccalauréat S Centres étrangers
10 juin 2016

Exercice 1 **4 points**

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans une boulangerie industrielle, on prélève au hasard une baguette de pain dans la production.
   On admet que la variable aléatoire exprimant sa masse, en gramme, suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 10.

   Affirmation 1
   La probabilité que la masse de la baguette soit supérieure à 187 g est supérieure à 0,9.

2. **Affirmation 2**
   L'équation $x - \cos x = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   Dans les questions 3. et 4., l'espace est rapporté à un repère orthonormal et l'on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ qui admettent pour représentations paramétriques respectives :

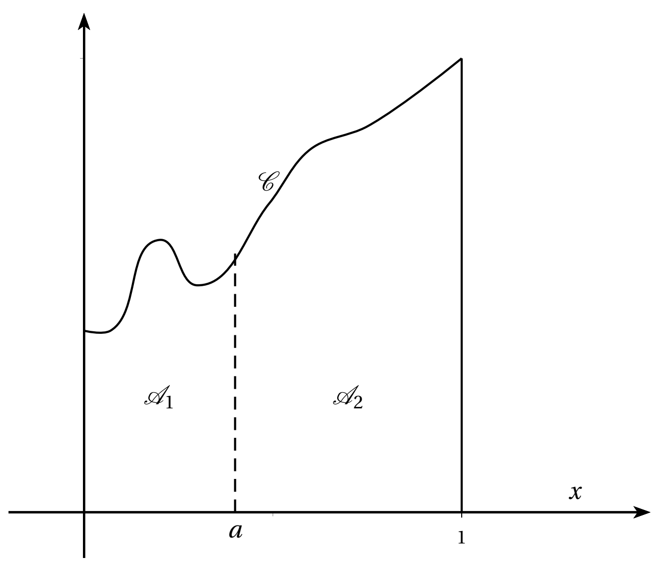
$$\left\{\begin{array}{l} x = 1+2t \\ y = 2-3t \\ z = \quad 4t \end{array}\right., t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} x = -5t'+3 \\ y = \quad 2t' \\ z = \quad t'+4 \end{array}\right., t' \in \mathbb{R}$$

3. **Affirmation 3**
   Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes.
4. **Affirmation 4**
   La droite $\mathcal{D}_1$ est parallèle au plan d'équation $x+2y+z-3=0$.*

Exercice 2 **6 points**

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, continue et positive sur cet intervalle, et a une réel tel que $0 < a < 1$.
On note :

- $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal :
- $\mathcal{A}_1$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$ d'une part, les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$ d'autre part.
- $\mathcal{A}_2$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$ d'une part, les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$ d'autre part.



Le but de cet exercice est de déterminer, pour différentes fonctions f, une valeur du réel a vérifiant la condition (E) : « les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales ».
On admet l'existence d'un tel réel a pour chacune des fonctions considérées.

Partie A : Étude de quelques exemples

1. Vérifier que dans les cas suivants, la condition (E) est remplie pour un unique réel a et déterminer sa valeur.
   a. f est une fonction constante strictement positive.
   b. f est définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x$.

2. **a.** À l'aide d'intégrales, exprimer, en unités d'aires, les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$.
   b. On note F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~1]$.
   Démontrer que si le réel a satisfait la condition (E), alors $F(a) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2}$.
   La réciproque est-elle vraie ?
3. Dans cette question, on envisage deux autres fonctions particulières.
   a. La fonction f est définie pour tout réel x de $[0~;~1]$ par $f(x) = \text{e}^x$.
   Vérifier que la condition (E) est vérifiée pour un unique réel a et donner sa valeur.
   b. La fonction f définie pour tout réel x de $[0~;~1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$.
   Vérifier que la valeur $a = \dfrac{2}{5}$ convient.

Partie B : Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

Dans cette partie, on considère la fonction f définie pour tout réel x de $[0~;~1]$ par $f(x) = 4 - 3x^2$.

1. Démontrer que si a est un réel satisfaisant la condition (E), alors a est solution de l'équation :

$$x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}.$$

   Dans la suite de l'exercice, on admettra que cette équation a une unique solution dans l'intervalle $[0~;~1]$. On note a cette solution.
2. On considère la fonction g définie pour tout réel x de $[0~;~1]$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$ et la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.
   a. Calculer u_1.
   b. Démontrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0~;~1]$.
   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
   d. Prouver que la suite (u_n) est convergente. À l'aide des opérations sur les limites, prouver que la limite est a.
   e. On admet que le réel a vérifie l'inégalité $0 < a - u_{10} < 10^{-9}$. Calculer u_{10} à 10^{-8} près.*

Exercice 3 **5 points**

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les trois parties sont relatives à cette même situation, mais peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.
   a. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.
   b. Quelle est la meilleure approximation de $P(X \geqslant 400)$ parmi les nombres suivants ?

   0,92 0,93 0,94 0,95.
2. Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieur à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

Partie B : Proportion de personnes favorables au projet dans la population

Dans cette partie, on suppose que n personnes ont répondu à la question, et on admet que ces personnes constituent un échantillon aléatoire de taille n (où n est un entier naturel supérieur à 50).
Parmi ces personnes, 29 % sont favorables au projet d'aménagement.

1. Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale.
2. Déterminer la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,04.

Partie C : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.
L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.
- soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.
Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

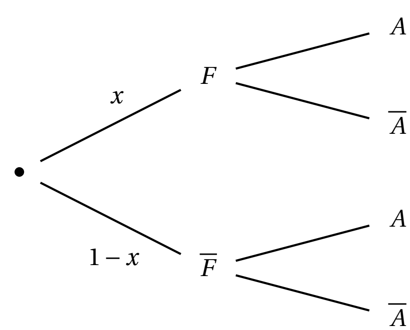
- F l'évènement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\overline{F}$ l'évènement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- A l'évènement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\overline{A}$ l'évènement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

Ainsi, d'après les données, on a $p(A) = 0,29$.

1. En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $P_F(A)$ et $P_{\overline{F}}(A)$.
2. On pose $x = P(F)$.

   a. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

   b. En déduire une égalité vérifiée par x

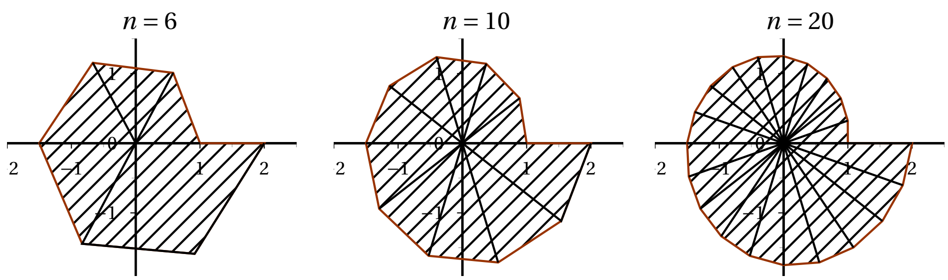


3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.*

Exercice 4 **5 points**
Candidat/e/s n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautile à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n, on définit les nombres complexes $z_k = \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ et on note M_k le point d'affixe z_k.
Dans ce modèle, le pourtour du nautile est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0 \leqslant k \leqslant n$.
Par exemple, pour les entiers $n = 6$, $n = 10$ et $n = 20$, on obtient les figures ci-dessous.



Partie A : Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$. Ainsi, pour $0 \leqslant k \leqslant 6$, on a $z_k = \left(1+\dfrac{k}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{6}}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera.
3. Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{7\sqrt{3}}{24}$.

Partie B : Ligne brisée formée à partir de $n+1$ points

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, déterminer la longueur OM_k.
2. Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, déterminer une mesure des angles $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_k}\right)$ et $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.

   En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_k}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.
3. Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est égale à $\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)\times\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.
4. On admet que l'aire du triangle OM_kM_{k+1} est égale à

   $a_k = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$ et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$.

   L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n lorsqu'on entre l'entier n :

VARIABLES	A est un nombre réel
	k est un entier
	n est un entier
TRAITEMENT	Lire la valeur de n
	A prend la valeur 0
	Pour k allant de 0 à n-1
	A prend la valeur $A+\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$
	Fin Pour
SORTIE	Afficher A

   On entre dans l'algorithme $n = 10$

   Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726		

5. On admet que $A_2 = 0$ et que la suite (A_n) converge et que $\lim_{n\to+\infty} A_n = \dfrac{7\pi}{3} \approx 7,3$.

   Recopier et compléter les lignes $L6$ et $L13$ de l'algorithme ci-après qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geqslant 7,2$. On ne demande pas de déterminer n.

VARIABLES :	A est un nombre réel	
	k est un entier	
	n est un entier	
TRAITEMENT :	n prend la valeur 2	
	A prend la valeur 0	
	Tant que.	
		n prend la valeur $n+1$
		A prend la valeur 0
		Pour k allant de 0 à $n-1$
		A prend la valeur $A+\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$
		Fin Pour
	Fin Tant que	
SORTIE :	**Afficher** . . .	

*

Exercice 4 **5 points**

Candidat/e/s ayant choisi la spécialité mathématique

Le but de cet exercice est d'étudier, sur un exemple, une méthode de chiffrement publiée en 1929 par le mathématicien et cryptologue Lester Hill. Ce chiffrement repose sur la donnée d'une matrice A, connue uniquement de l'émetteur et du destinataire.

Dans tout l'exercice, on note A la matrice définie par : $A=\begin{pmatrix}5&2\\7&7\end{pmatrix}$.

Partie A – Chiffrement de Hill

Voici les différentes étapes de chiffrement pour un mot comportant un nombre pair de lettres :

Étape 1	On divise le mot en blocs de deux lettres consécutives puis, pour chaque bloc, on effectue chacune des étapes suivantes.
Étape 2	On associe aux deux lettres du bloc les deux entiers x_1 et x_2 tous deux compris entre 0 et 25, qui correspondent aux deux lettres dans le même ordre, dans le tableau suivant : A B C D E F G H I J K L M 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 N O P Q R S T U V W X Y Z 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
Étape 3	On transforme la matrice $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ en la matrice $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ vérifiant $Y=AX$.
Étape 4	On transforme la matrice $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ en la matrice $R=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 celui de la division euclidienne de y_2 par 26.
Étape 5	On associe aux entiers r_1 et r_2 les deux lettres correspondantes du tableau de l'étape 2. Le bloc chiffré est le bloc obtenu en juxtaposant ces deux lettres.

Tableau de l'étape 2 :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Question : utiliser la méthode de chiffrement exposée pour chiffrer le mot « HILL ».

Partie B - Quelques outils mathématiques nécessaires au déchiffrement

1. Soit a un entier relatif premier avec 26.
   Démontrer qu'il existe un entier relatif u tel que $u\times a\equiv 1$ modulo 26.
2. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	a, u, et r sont des nombres (a est naturel et premier avec 26)
TRAITEMENT :	Lire a
	u prend la valeur 0, et r prend la valeur 0
	Tant que $r\neq 1$
	u prend la valeur $u+1$
	r prend la valeur du reste de la division euclidienne de $u\times a$ par 26
	Fin du Tant que
SORTIE	Afficher u

On entre la valeur $a = 21$ dans cet algorithme.

a. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

u	0	1	2	...
r	0	21	...	...

b. En déduire que $5 \times 21 \equiv 1$ modulo 26.

3. On rappelle que A est la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice $12A - A^2$.

b. En déduire la matrice B telle que $BA = 21I$.

c. Démontrer que si $AX = Y$, alors $21X = BY$.

Partie C - Déchiffrement

On veut déchiffrer le mot VLUP.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ la matrice associée, selon le tableau de correspondance, à un bloc de deux lettres avant chiffrement, et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ la matrice définie par l'égalité : $Y = AX = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} X$.

Si r_1 et r_2 sont les restes respectifs de y_1 et y_2 dans la division euclidienne par 26, le bloc de deux lettres après chiffrement est associé à la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que : $\left\{\begin{array}{rcl} 21x_1 & = & 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 & = & -7y_1 + 5y_2 \end{array}\right.$

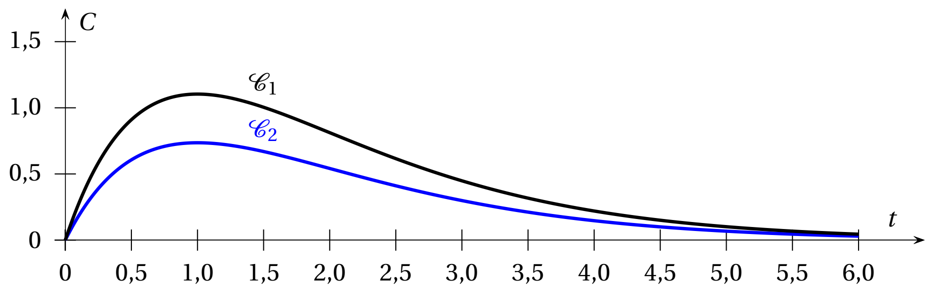
2. En utilisant la question B .2., établir que : $\left\{\begin{array}{rcll} x_1 & \equiv & 9r_1 + 16r_2 & \text{modulo } 26 \\ x_2 & \equiv & 17r_1 + 25r_2 & \text{modulo } 26 \end{array}\right.$

3. Déchiffrer le mot VLUP, associé aux matrices $\begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.*

∽ Baccalauréat S Polynésie ∾
10 juin 2016

EXERCICE 1 **7 points**
Commun à tous les candidats

Partie A
Voici deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.
C est exprimée en gramme par litre et t en heure.
Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.
À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?
On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.
2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.
3. Une personne à jeun absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(t) = At\mathrm{e}^{-t}$$

où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.
 a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.
 b. L'affirmation suivante est-elle vraie ?
 « À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.
3. Rappeler la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de $0,2$ g.L^{-1} pour un jeune conducteur.
 a. Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que
 $f(t_1) = f(t_2) = 0,2$.

b. Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?
Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.

5. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à
5×10^{-3} g.L^{-1}.

a. Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

b. On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par
$f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}$.

Initialisation :	t prend la valeur $3,5$
	p prend la valeur $0,25$
	C prend la valeur $0,21$
Traitement :	Tant que $C > 5 \times 10^{-3}$ faire :
	t prend la valeur $t + p$
	C prend la valeur $f(t)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher t

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme.
Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25		
t	3,5		
C	0,21		

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?*

EXERCICE 2 — 3 points

Commun à tous les candidats

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n.$$

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5.$$

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2015 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0,2$.
Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2016 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2015.
L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

1. Lorsque le groupe voit une étoile filante, vérifier que la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est environ $0,451$.
2. Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à $0,95$? Arrondir ce temps à la minute près.
3. L'astronome a prévu une sortie de deux heures. Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

Partie B

Ce responsable adresse un questionnaire à ses adhérents pour mieux les connaître. Il obtient les informations suivantes :

- 64 % des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents ;
- 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel ;
- 65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel.

1. On choisit un adhérent au hasard. Montrer que la probabilité que cet adhérent possède un télescope personnel est $0,494$.
2. On choisit au hasard un adhérent parmi ceux qui possèdent un télescope personnel. Quelle est la probabilité que ce soit un nouvel adhérent ? Arrondir à 10^{-3} près.

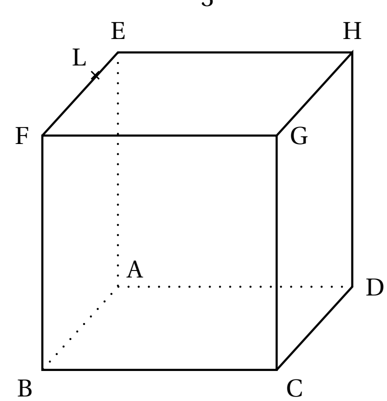
Partie C

Pour des raisons pratiques, l'astronome responsable du club souhaiterait installer un site d'observation sur les hauteurs d'une petite ville de 2 500 habitants. Mais la pollution lumineuse due à l'éclairage public nuit à la qualité des observations. Pour tenter de convaincre la mairie de couper l'éclairage nocturne pendant les nuits d'observation, l'astronome réalise un sondage aléatoire auprès de 100 habitants et obtient 54 avis favorables à la coupure de l'éclairage nocturne.
L'astronome fait l'hypothèse que 50 % de la population du village est favorable à la coupure de l'éclairage nocturne. Le résultat de ce sondage l'amène-t-il à changer d'avis ?*

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1** :
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{2} + 3i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = -4i$ ne sont pas alignés.
2. **Proposition 2** :
Il n'existe pas d'entier naturel n non nul tel que $[i(1+i)]^{2n}$ soit un réel strictement positif.
3. ABCDEFGH est un cube de côté 1. Le point L est tel que $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.



Proposition 3
La section du cube par le plan (BDL) est un triangle.
Proposition 4
Le triangle DBL est rectangle en B.

4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2\,;\,5]$ et dont on connaît le tableau de variations donné ci-dessous :

x	2		3		4		5
Variations de f	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2

Proposition 5 :
L'intégrale $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre 1,5 et 6.*

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1**
Pour tout entier naturel n, le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4.
2. On considère la suite u définie, pour $n \geqslant 1$, par

$$u_n = \frac{1}{n}\text{pgcd}(20\,;\,n).$$

Proposition 2
La suite (u_n) est convergente.
3. **Proposition 3**
Pour toutes matrices A et B carrées de dimension 2, on a $A \times B = B \times A$.
4. Un mobile peut occuper deux positions A et B. À chaque étape, il peut soit rester dans la position dans laquelle il se trouve, soit en changer.
Pour tout entier naturel n, on note :
   - A_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position A à l'étape n » et a_n sa probabilité.
   - B_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position B à l'étape n » et b_n sa probabilité.
   - X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

On admet que, pour tout entier nature n, $X_{n+1} = M \times X_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,3 \\ 0,45 & 0,7 \end{pmatrix}$.
Proposition 4
La probabilité $P_{A_n}(B_{n+1})$ vaut 0,45.
Proposition 5
Il existe un état initial $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ tel que la probabilité d'être en B à l'étape 1 est trois fois plus grande que celle d'être en A à l'étape 1, autrement dit tel que $b_1 = 3a_1$.*

∽ Baccalauréat S Métropole–La Réunion 20 juin 2016 ∾

EXERCICE 1 **6 POINTS**

Commun à tous les candidats

Partie A

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées.
La chaîne A produit 40 % des composants et la chaîne B produit le reste.

Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur. En sortie de chaîne A, 20 % des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5 %.

On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
On note :

A l'évènement « le composant provient de la chaîne A »

B l'évènement « le composant provient de la chaîne B »

S l'évènement « le composant est sans défaut »

1. Montrer que la probabilité de l'évènement S est $P(S) = 0,89$.
2. Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A. On donnera le résultat à 10^{-2} près.

Partie B

Des améliorations apportées à la chaîne A ont eu pour effet d'augmenter la proportion p de composants sans défaut.

Afin d'estimer cette proportion, on prélève au hasard un échantillon de 400 composants parmi ceux fabriqués par la chaîne A. Dans cet échantillon, la fréquence observée de composants sans défaut est de $0,92$.

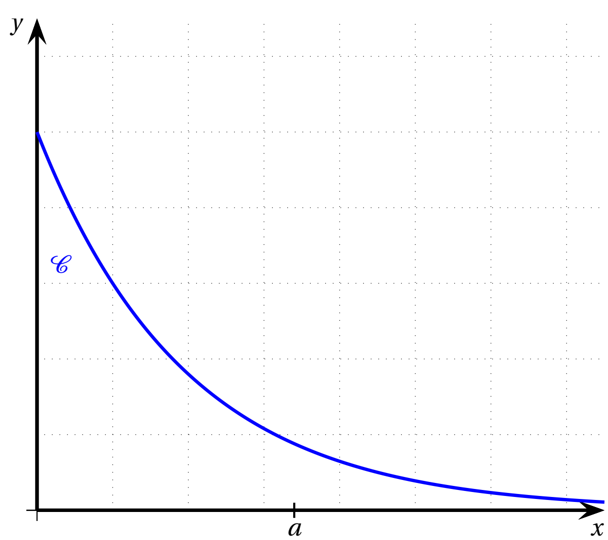
1. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.
2. Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon pour qu'un tel intervalle de confiance ait une amplitude maximum de $0,02$?

Partie C

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).
On note f la fonction densité associée à la variable aléatoire T. On rappelle que :

- pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.
- pour tout nombre réel $a \geqslant 0$, $p(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



a. Interpréter graphiquement $P(T \leqslant a)$ où $a > 0$.

b. Montrer que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$: $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

c. En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leqslant t) = 1$.

2. On suppose que $P(T \leqslant 7) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question on prend $\lambda = 0,099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.

a. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

b. On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.
Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.

c. Donner l'espérance mathématique $\mathrm{E}(T)$ de la variable aléatoire T à l'unité près.
Interpréter ce résultat.*

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ on donne les points :

$$\mathrm{A}(1\,;\,2\,;\,3), \mathrm{B}(3\,;\,0\,;\,1), \mathrm{C}(-1\,;\,0\,;\,1), \mathrm{D}(2\,;\,1\,;\,-1), \mathrm{E}(-1\,;\,-2\,;\,3) \text{ et } \mathrm{F}(-2\,;\,-3,4).$$

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés.

Affirmation 2 : Le vecteur $\overrightarrow{n}\,(0\,;\,1\,;\,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.*

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right).$$

1. Résoudre dans R l'équation : $f(x) = x$.

2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$, $f(x)$ appartient à $[0\,;\,1]$.

4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels;
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $N - \ln\left(N^2+1\right) < A$ N prend la valeur $N+1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

a. Que fait cet algorithme ?

b. Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0\,;\,1]$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
   En déduire la valeur de ℓ.*

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout couple d'entiers relatifs non nuls $(a,\ b)$, on note pgcd$(a,\ b)$ le plus grand diviseur commun de a et b.
Le plan est muni d'un repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Exemple. Soit Δ_1 la droite d'équation $y = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{2}{3}$.

   a. Montrer que si $(x,\ y)$ est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3.

   b. Existe-il au moins un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs ? Justifier.

   Généralisation

   On considère désormais une droite Δ d'équation $(E)\ :\ y = \dfrac{m}{n}x - \dfrac{p}{q}$ où m, n, p et q sont des entiers relatifs non nuls tels que pgcd$(m,\ n) =$ pgcd$(p,\ q) = 1$.
   Ainsi, les coefficients de l'équation (E) sont des fractions irréductibles et on dit que Δ est une droite rationnelle.
   Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m, n, p et q pour qu'une droite rationnelle Δ comporte au moins un point dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.
2. On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées $\left(x_0,\ y_0\right)$ où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

   a. En remarquant que le nombre $ny_0 - mx_0$ est un entier relatif, démontrer que q divise le produit np.

   b. En déduire que q divise n.
3. Réciproquement, on suppose que q divise n, et on souhaite trouver un couple $\left(x_0,\ y_0\right)$ d'entiers relatifs tels que $y_0 = \dfrac{m}{n}x_0 - \dfrac{p}{q}$.

   a. On pose $n = qr$, où r est un entier relatif non nul. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $qru - mv = 1$.

   b. En déduire qu'il existe un couple $\left(x_0,\ y_0\right)$ d'entiers relatifs tels que
   $y_0 = \dfrac{m}{n}x_0 - \dfrac{p}{q}$.
4. Soit Δ la droite d'équation $y = \dfrac{3}{8}x - \dfrac{7}{4}$. Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs ? Justifier.
5. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	M, N, P, Q : entiers relatifs non nuls, tels que pgcd$(M,\ N)$ = pgcd$(P,\ Q) = 1$
	X : entier naturel
Entrées :	Saisir les valeurs de M, N, P, Q
Traitement et sorties :	
	Si Q divise N alors
	X prend la valeur 0
	Tant que $\left(\dfrac{M}{N}X - \dfrac{P}{Q}\text{n'est pas entier}\right)$
	et $\left(-\dfrac{M}{N}X - \dfrac{P}{Q}\text{n'est pas entier}\right)$ faire
	X prend la valeur $X + 1$
	Fin tant que
	Si $\dfrac{M}{N}X - \dfrac{P}{Q}$ est entier alors
	Afficher $X, \dfrac{M}{N}X - \dfrac{P}{Q}$
	Sinon
	Afficher $-X, -\dfrac{M}{N}X - \dfrac{P}{Q}$
	Fin Si
	Sinon
	Afficher « Pas de solution »
	Fin Si

a. Justifier que cet algorithme se termine pour toute entrée de M, N, P, Q, entiers relatifs non nuls tels que pgcd$(M,\ N)$ = pgcd$(P,\ Q) = 1$.

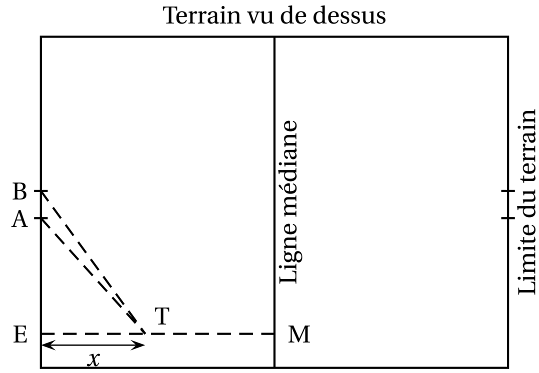
b. Que permet-il d'obtenir ?*

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment [AB].

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : EM = 50 m, EA = 25 m et AB = 5,6 m . On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{\text{ETA}}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{\text{ETB}}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{\text{ATB}}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0~;~\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0~;~\dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. L'angle $\widehat{\text{ATB}}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0~;~\dfrac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0~;~\dfrac{\pi}{2}\right[$,

$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$.

Montrer que $\tan\gamma = \dfrac{5,6x}{x^2+765}$.

4. L'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0\,;50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$.

Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ à 0,01 radian près.*

∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane ∾
20 juin 2016

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} *près.*

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

- A : « l'ampoule provient de la machine A »;
- B : « l'ampoule provient de la machine B »;
- D : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.

b. Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,930 5.

c. L'ampoule tirée est sans défaut.
Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.
Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

Partie B

1. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif a, $P(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

a. Montrer que $P(T \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$.

b. Montrer que si T suit une loi exponentielle alors pour tous les réels positifs t et a on a

$$P_{T \geqslant t}(T \geqslant t + a) = P(T \geqslant a).$$

2. Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.

a. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.

b. Calculer la probabilité $P(T \geqslant 5\,000)$.

c. Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.

2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise?*

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-2| = 1$.

1. Justifier que $\mathscr{C}$ est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.
2. Soit a un nombre réel. On appelle $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = ax$.
   Déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ en fonction des valeurs du réel a.*

EXERCICE 3 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

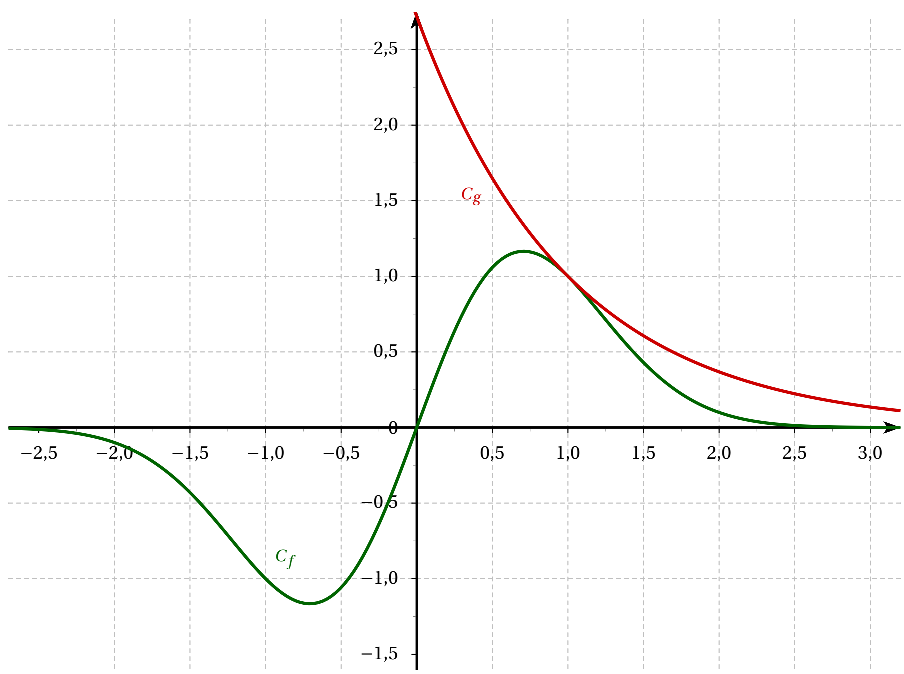
1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0,
   $f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.
   On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.
2. **a.** On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.
   Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = \left(1 - 2x^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;\,0]$, $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) \leqslant g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leqslant 0.$$

On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

b. On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0~;~+\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ. (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)

c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leqslant 0$.

4. a. La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?

b. Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point commun, noté A.

c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Partie C

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\mathrm{e}^{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$.

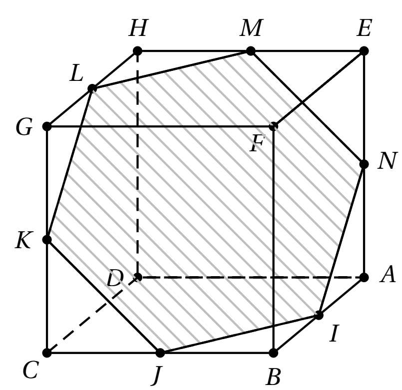
3. Interpréter graphiquement ce résultat.*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(D~;\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH}\right)$.



Dans ce repère, on a :

$D(0~;~0~;~0)$, $C(1~;~0~;~0)$, $A(0~;~1~;~0)$,

$H(0~;~0~;~1)$ et $E(0~;~1~;~1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.

Soit $\mathcal{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.

On admet que la section du cube par le plan $\mathcal{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

1. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).

b. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.

3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).

b. En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathcal{P}$ son sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.

4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs :

$$7x - 3y = 1. \qquad \text{(E)}$$

1. Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x\ ;\ y)$ de l'équation (E) vérifiant $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$.

```
Variables :  X est un nombre entier
             Y est un nombre entier
Début :      Pour X variant de −5 à 10
                 (1) ..............
                     (2) ..............
                     Alors Afficher X et Y
                     Fin Si
                 Fin Pour
             Fin Pour
Fin
```

2. **a.** Donner une solution particulière de l'équation (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

c. Déterminer l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation

$$7x - 3y - 1 = 0$$

On définie la suite (A_n) de points du plan de coordonnées $(x_n\ :\ y_n)$ vérifiant pour tout n entier naturel :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & 2 \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} & = & -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{array}\right.$$

1. On note M la matrice $\begin{pmatrix} \frac{-13}{2} & 3 \\ \frac{-35}{2} & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on pose

$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n$.

b. Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel n, X_n en fonction de M^n et X_0.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de P, notée P^{-1}, est définie par $P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

b. Pour tout entier naturel n, donner D^n sans justification.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP^{-1}$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, une expression de x_n et y_n en fonction de n.

4. Montrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite $\mathscr{D}$.*

Baccalauréat S – Asie
23 juin 2016

EXERCICE 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

Un maraîcher est spécialisé dans la production de fraises.
Cet exercice envisage dans la partie A la production de fraises, et dans la partie B leur conditionnement.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : production de fraises

Le maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B ; 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A, et 45 % dans la serre B. Dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88 ; dans la serre B, elle est égale à 0,84.

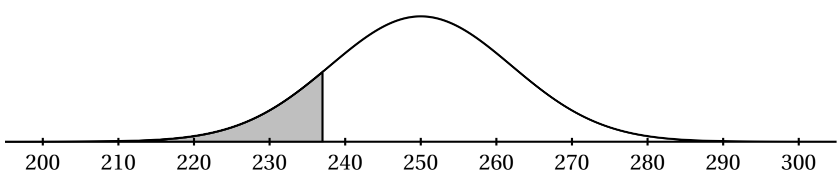
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Proposition 1 :
La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

Proposition 2 :
On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit.
La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.

Partie B : conditionnement des fraises

Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ.
La représentation graphique de la fonction densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée ci-après :



1. On donne $P(X237) = 0,14$. Calculer la probabilité de l'évènement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes ».
2. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \dfrac{X - 250}{\sigma}$.
   a. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
   b. Démontrer que $P\left(Y - \dfrac{13}{\sigma}\right) = 0,14$.
   c. En déduire la valeur de σ arrondie à l'entier.
3. Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par n et m deux nombres entiers.
   a. Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $250 - n$; $250 + n$. Déterminer la plus petite valeur de n pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.
   b. On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme,se trouve dans l'intervalle 230 ; m. Déterminer la plus petite valeur de m pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

EXERCICE 2 — 3 points

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = a\mathrm{e}^{ax} + a.$$

On note $I(a)$ l'intégrale de la fonction f_a entre 0 et 1 :

$$I(a) = \int_0^1 f_a(x) \text{x}.$$

1. On pose dans cette question $a = 0$. Déterminer $I(0)$.

2. On pose dans cette question $a = 1$.
On étudie donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = \mathrm{e}^x + 1.$$

- **a.** Sans étude, représenter graphiquement sur la copie la fonction f_1 dans un repère orthogonal et faire apparaître le nombre $I(1)$.
- **b.** Calculer la valeur exacte de $I(1)$, puis arrondir au dixième.

3. Existe-il une valeur de a pour laquelle $I(a)$ est égale à 2 ?
Si oui, en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

EXERCICE 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$u_0 = 1\,000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,2u_n - 100$.

1.
- **a.** Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.
On précisera en particulier ce que représente u_n.
- **b.** L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.
- **c.** On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.
Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1 000
	n prend la valeur 0
	Tant que .... faire
	    u prend la valeur ....
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher ....

2.
- **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n 1\,000$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B : second modèle – avec une fonction

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur 0 ; $+\infty$ par :

$$f(t) = \frac{50}{1+49\mathrm{e}^{-0,2t}}$$

où t représente le temps exprimé en jours et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1. a. Calculer $f(0)$.

b. Démontrer que, pour tout réel $t0$, $f(t) < 50$.

c. Étudier le sens de variation de la fonction f.

d. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.

3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
Résoudre l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$.
En déduire la réponse au problème.

Partie C : un contrôle de qualité

Les bactéries peuvent être de deux types : le type A, qui produit effectivement une protéine utile à l'industrie, et le type B, qui ne la produit pas et qui est donc inutile d'un point de vue commercial.

L'entreprise affirme que 80 % des bactéries produites sont de type A.

Pour vérifier cette affirmation, un laboratoire analyse un échantillon aléatoire de 200 bactéries en fin de production.
L'analyse montre que 146 d'entre elles sont de type A.
L'affirmation de l'entreprise doit-elle être remise en cause?

EXERCICE 4 — 4 points

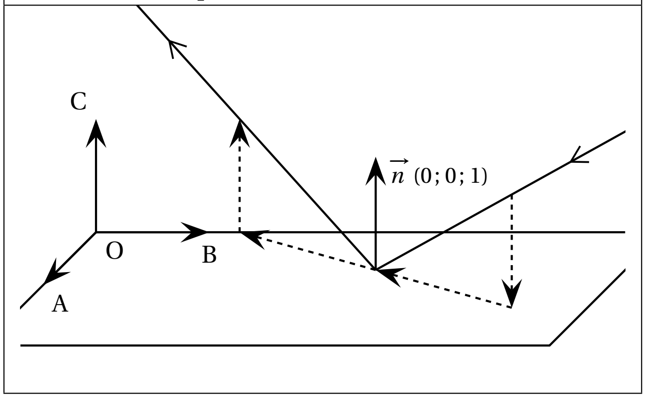
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un catadioptre est un dispositif optique formé de trois miroirs en forme de « coin de cube », les faces réfléchissantes tournées vers l'intérieur. On en trouve dans les réflecteurs de certains véhicules ainsi que dans les appareils de topographie.
Les points O, A, B et C sont des sommets d'un cube, de telle sorte que le repère $\left(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ soit un repère orthonormé.
On utilisera ce repère dans tout l'exercice.
Les trois miroirs du catadioptre sont représentés par les plans (OAB), (OBC) et (OAC). Les rayons lumineux sont modélisés par des droites.

Règles de réflexion d'un rayon lumineux (admises) :

- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\ (a\,;\,b\,;\,c)$ est réfléchi par le plan (OAB), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\overrightarrow{v}\ (a\,;\,b\,;\,-c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\ (a\,;\,b\,;\,c)$ est réfléchi par le plan (OBC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\overrightarrow{v}\ (-a\,;\,b\,;\,c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\ (a\,;\,b\,;\,c)$ est réfléchi par le plan (OAC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\overrightarrow{v}\ (a\,;\,-b\,;\,c)$;

Vue en perspective cavalière de la réflexion d'un rayon lumineux sur le plan (OAB)



1. *Propriété des catadioptres*

En utilisant les règles précédentes, démontrer que si un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC), le rayon final est parallèle au rayon initial.

Pour la suite, on considère un rayon lumineux modélisé par une droite d_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_1}$ $(-2\ ;\ -1\ ;\ -1)$ qui vient frapper le plan (OAB) au point I_1 (2 ; 3 ; 0). Le rayon réfléchi est modélisé par la droite d_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}$ $(-2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ et passant par le point I_1.

2. *Réflexion de d_2 sur le plan* (OBC)

a. Donner une représentation paramétrique de la droite d_2.

b. Donner, sans justification, un vecteur normal au plan (OBC) et une équation cartésienne de ce plan.

c. Soit I_2 le point de coordonnées (0 ; 2 ; 1).
Vérifier que le plan (OBC) et la droite d_2 sont sécants en I_2.

On note d_3 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OBC). d_3 est donc la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}$ $(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ passant par le point I_2 (0 ; 2 ; 1).

3. *Réflexion de d_3 sur le plan* (OAC)

Calculer les coordonnées du point d'intersection I_3 de la droite d_3 avec le plan (OAC).
On note d_4 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OAC). Elle est donc parallèle à la droite d_1.

4. *Étude du trajet de la lumière*

On donne le vecteur $\overrightarrow{u}$ $(1\ ;\ -2\ ;\ 0)$, et on note $\mathscr{P}$ le plan défini par les droites d_1 et d_2.

a. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

b. Les droites d_1, d_2 et d_3 sont-elles situées dans un même plan ?

c. Les droites d_1, d_2 et d_4 sont-elles situées dans un même plan ?

EXERCICE 4 — 5 points

Candidat/e/s ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'objet du problème est l'étude d'une méthode de cryptage, dite « chiffrement de Hill », dans un cas particulier. Cette méthode nécessite une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & s \end{pmatrix}$, dont les coefficients sont des nombres entiers choisis entre 0 et 25, et tels que $ad - bc$ soit premier avec 26.
Cette matrice est connue seulement de l'émetteur et du destinataire.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A : quelques résultats

1. On considère l'équation (E) : $9d - 26m = 1$, où d et m désignent deux entiers relatifs.

a. Donner une solution simple de cette équation, de sorte que d et m soient des nombres entiers compris entre 0 et 3.

b. Démontrer que le couple (d, m) est solution de l'équation (E) si et seulement si :

$$9(d-3) = 26(m-1).$$

c. En déduire que les solutions de l'équation (E) sont les nombres entiers relatifs de la forme :

$$\left\{\begin{array}{lcl} d & = & 26k+3 \\ m & = & 9k+1 \end{array}\right., \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

2. a. Soit n un nombre entier. Démontrer que si $n = 26k - 1$, avec k entier relatif, alors n et 26 sont premiers entre eux.

b. En déduire que les nombres $9d - 28$, avec $d = 26k + 3$ et $k \in \mathbb{Z}$, sont premiers avec 26.

Partie B : cryptage et décryptage

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

On utilisera le tableau suivant pour la correspondance entre les lettres et les nombres.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Méthode de cryptage (pour un mot comportant un nombre pair de lettres)	**Exemple : avec le mot MATH**	
1. On regroupe les lettres par paires.	MA	TH
2. On remplace les lettres par les valeurs associées à l'aide du tableau précédent, et on place les couples de nombres obtenus dans des matrices colonne.	$C_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$	$C_2 = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \end{pmatrix}$
3. On multiplie les matrices colonne par la gauche par la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$	$AC_1 = \begin{pmatrix} 108 \\ 84 \end{pmatrix}$	$AC_2 = \begin{pmatrix} 199 \\ 154 \end{pmatrix}$
4. On remplace chaque coefficient des matrices colonne obtenues par leur reste dans la division euclidienne par 26.	$108 = 4 \times 26 + 4$ $84 = 3 \times 26 + 6$ On obtient : $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 17 \\ 24 \end{pmatrix}$
5. On utilise le tableau de correspondance entre lettres et nombres pour obtenir le mot crypté.	EGRY	

1. En cryptant par cette méthode le mot « PION », on obtient « LZWH ». En détaillant les étapes pour les lettres « ES », crypter le mot « ESPION ».

2. Méthode de décryptage

Notation : lorsqu'on manipule des matrices de nombres entiers relatifs, on peut utiliser la notation « ≡ »pour parler de congruence coefficient par coefficient. Par exemple, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 108 \\ 84 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ modulo 26 car } 108 \equiv 4 \text{ modulo 26 et } 84 \equiv 6 \text{ modulo 26.}$$

Soient a, b, x, y, x' et y' des nombres entiers relatifs.

On sait que si $x \equiv x'$ modulo 26 et $y \equiv y'$ modulo 26 alors :

$ax + by \equiv ax' + by'$ modulo 26.

Ce résultat permet d'écrire que, si A est une matrice 2×2, et B et C sont deux matrices colonne 2×1, alors :

$$B \equiv C \text{ modulo 26 implique } AB \equiv AC \text{ modulo 26.}$$

a. Établir que la matrice A est inversible, et déterminer son inverse.

b. Décrypter le mot : XQGY.

∽ Baccalauréat S Métropole–La Réunion ∽
12 septembre 2016

EXERCICE 1 **6 POINTS**

Commun à tous les candidats

Les trois parties sont indépendantes. Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

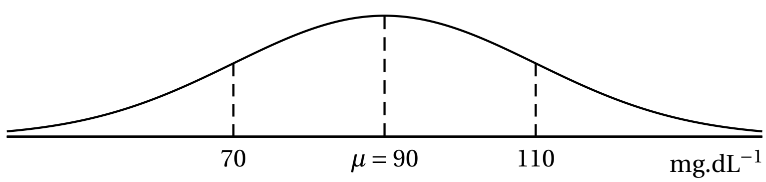
Partie 1

On estime qu'en 2013 la population mondiale est composée de 4,6 milliards de personnes âgées de 20 à 79 ans et que 46,1 % des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale et 53,9 % en zone urbaine.
En 2013, d'après la fédération internationale du diabète, 9,9 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte de diabète et 6,4 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone rurale est atteinte de diabète.
On interroge au hasard une personne âgée de 20 à 79 ans. On note :
R l'évènement : « la personne choisie habite en zone rurale »,
D l'évènement : « la personne choisie est atteinte de diabète ».

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. **a.** Calculer la probabilité que la personne interrogée soit diabétique.
   b. La personne choisie est diabétique. Quelle est la probabilité qu'elle habite en zone rurale ?

Partie 2

Une personne est dite en hypoglycémie si sa glycémie à jeun est inférieure à 60 mg.dL^{-1} et elle est en hyperglycémie si sa glycémie à jeun est supérieure à 110 mg. dL^{-1}. La glycémie à jeun est considérée comme « normale » si elle est comprise entre 70 mg.dL^{-1} et 110 mg.dL^{-1}. Les personnes ayant un taux de glycémie compris entre 60 et 70 mg.dL^{-1} ne font pas l'objet d'un suivi particulier.
On choisit au hasard un adulte dans cette population. Une étude a permis d'établir que la probabilité qu'il soit en hyperglycémie est $0,052$ à 10^{-3} près. Dans la suite on admettra que cette probabilité est égale à $0,052$.
On modélise la glycémie à jeun, exprimée en mg.dL^{-1}, d'un adulte d'une population donnée, par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
On donne ci-dessous la représentation graphique de la densité de probabilité de la variable aléatoire X.



1. Quelle est la probabilité que la personne choisie ait une glycémie à jeun « normale » ?
2. Déterminer la valeur de σ arrondie au dixième.
3. Dans cette question, on prend $\sigma = 12$. Calculer la probabilité que la personne choisie soit en hypoglycémie.

Partie 3

Afin d'estimer la proportion, pour l'année 2013, de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans, on interroge au hasard 10 000 personnes.
Dans l'échantillon étudié, 716 personnes ont été diagnostiquées diabétiques.

1. À l'aide d'un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %, estimer la proportion de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans.
2. Quel doit être le nombre minimal de personnes à interroger si l'on veut obtenir un intervalle de confiance d'amplitude inférieure ou égale à 0,01 ?*

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Commun à tous les candidats

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geqslant 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}.$$

1. **a.** Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.
   b. Dans cette question, on suppose que $z_0 = \mathrm{i}$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.
   c. Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné. Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de l'entier naturel n ?
   Prouver cette conjecture.
2. Déterminer z_{2016} dans le cas où $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.
3. Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?*

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.
Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1 - a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

```
Variables :        a, b, d, s sont des entiers
                   i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :   a prend la valeur 0
                   b prend la valeur 0
                   Saisir n
Traitement :       Pour i allant de 1 à n faire
                   | d prend la valeur d'un entier aléatoire compris
                   | entre 1 et 6
                   | Si d ⩽ 2
                   |    | alors a prend la valeur 1 − a
                   |    | sinon Si d ⩽ 4
                   |    |          | alors b prend la valeur 1 − b
                   |    |        FinSi
                   | FinSi
                   | s prend la valeur a + b
                   FinPour
Sortie :           Afficher s
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	s
initialisation	╳	╳			╳
1er passage boucle Pour					
2e passage boucle Pour					
3e passage boucle Pour					

b. Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ?

2. Pour tout entier naturel n, on note :

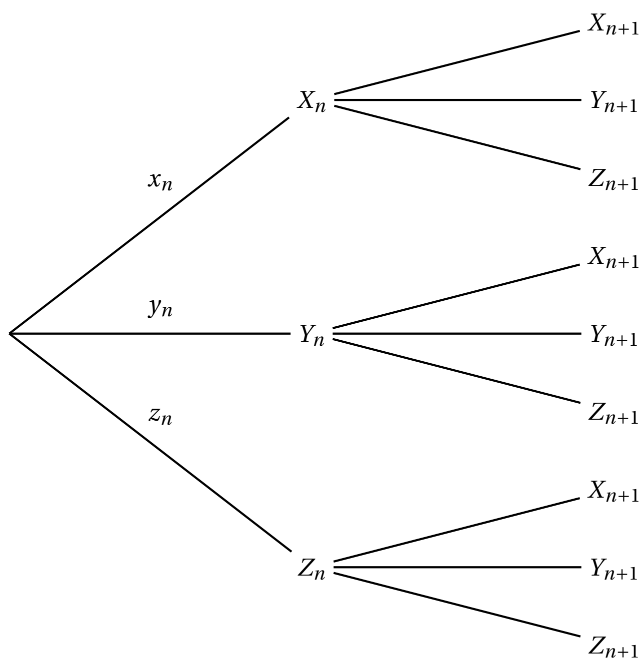
- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = P(X_n)$; $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n et Z_n.

a. Donner les probabilités x_0 , y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

b. Justifier que $P_{X_n}(X_{n+1}) = \frac{1}{3}$.

c. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches, certaines pouvant être nulles :



d. Pour tout entier naturel n, exprimer z_n en fonction de x_n et y_n.

e. En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_{n+1} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}$.

f. On pose, pour tout entier naturel n, $b_n = y_n - \frac{1}{2}$.
Montrer que la suite (b_n) est géométrique.
En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

g. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.
Interpréter le résultat.*

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 3 pièces A, B et C ayant chacune un côté pile et un côté face.
Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on retourne la pièce C.
Au début du jeu, les 3 pièces sont toutes du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face et 1 code le côté pile. Si a code un côté de la pièce A, alors $1 - a$ code l'autre côté de la pièce A.

Variables :	a, b, c, d, s sont des entiers naturels
	i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :	a prend la valeur 0
	b prend la valeur 0
	c prend la valeur 0
	Saisir n
Traitement :	Pour i allant de 1 à n faire
	d prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 6
	Si $d \leqslant 2$
	alors a prend la valeur $1-a$
	sinon Si $d \leqslant 4$
	alors b prend la valeur $1-b$
	sinon c prend la valeur $1-c$
	FinSi
	FinSi
	s prend la valeur $a+b+c$
	FinPour
Sortie :	Afficher s

a. On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 4 et 2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	c	s
initialisation						
1er passage boucle Pour						
2e passage boucle Pour						
3e passage boucle Pour						

b. Cet algorithme permet-il de savoir si, après une exécution de n tirages, les trois pièces sont du côté pile ?

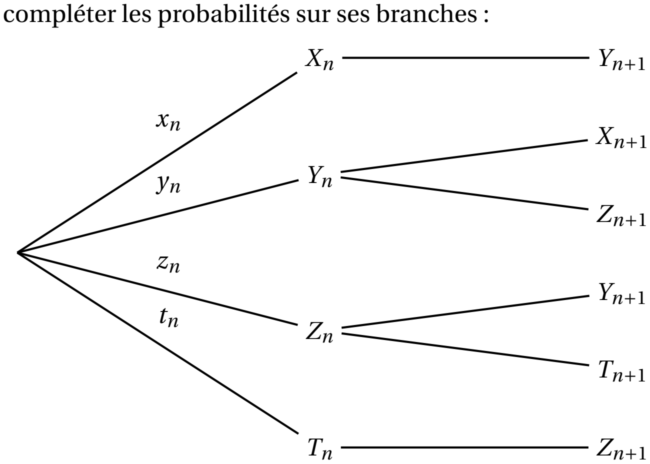
2. Pour tout entier naturel n, on note :

- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les trois pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une seule pièce est du côté pile et les autres sont du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, exactement deux pièces sont du côté pile et l'autre est du côté face »
- T_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les trois pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = p(X_n)$; $y_n = p(Y_n)$; $z_n = p(Z_n)$ et $t_n = p(T_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n, Z_n et T_n.

a. Donner les probabilités x_0 ,y_0, z_0 et t_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1, 2 ou 3 pièces du côté pile.

b. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches :



3. Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice ligne $\begin{pmatrix}x_n & y_n & z_n & t_n\end{pmatrix}$.

a. Donner la matrice U_0.

b. À l'aide de l'arbre précédemment rempli, déterminer la matrice carrée M telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n \times M$.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $Un = U_0 \times M^n$.

5. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$x_n = \frac{(-1)^n+3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}{8}$; $\quad y_n = \frac{-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n-(-1)^n\times 3+3}{8}$

$z_n = \frac{-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+(-1)^n\times 3+3}{8}$; $\quad t_n = \frac{-(-1)^n+3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}{8}$

a. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au bout de 5 lancers de dés, une seule des trois pièces soit du côté pile.

b. Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte

- Première affirmation :

« À l'issue d'un nombre pair de lancers de dés, les pièces peuvent être toutes les trois du côté pile ».

- Deuxième affirmation :

« Au cours du jeu, la probabilité que les pièces soient toutes les trois du côté pile peut être supérieure ou égale à $\dfrac{1}{4}$ ».

- Troisième affirmation :

« Au cours du jeu, la probabilité que les pièces soient toutes les trois du côté pile peut être supérieure ou égale à $0,249$ ».*

Exercice 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie 1

Soit v_1 la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$v_1(t) = 5 \times \frac{\mathrm{e}^{0,3t}-1}{\mathrm{e}^{0,3t}+1}.$$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction v_1.

2. On suppose, dans cette question, que le parachute fonctionne correctement. On admet que t secondes après qu'il a été lâché, la vitesse du colis (exprimée en m.s^{-1}) est égale, avant d'atteindre le sol, à $v_1(t)$.

On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas 6 m.s^{-1}.

Le colis risque-t-il d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement ? Justifier.

Partie 2

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.

On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en m.s^{-1}), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par :

$$v_2(t) = 32,7\left(1-\mathrm{e}^{-0,3t}\right).$$

1. Quelle est la vitesse, exprimée en m.s^{-1}, atteinte par le colis au bout de 10 secondes ? Arrondir à 0,1 m.s^{-1}.

2. Résoudre l'équation $v_2(t) = 30$ m.s^{-1}. Donner une interprétation concrète de la solution de cette équation dans le cadre de cet exercice.

3. On sait que la chute du colis dure 20 secondes.

On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis, T secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par :

$$d(T) = \int_0^T v_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que, pour tout réel T de l'intervalle $[0\,;\,20]$,

$d(T) = 109\left(\mathrm{e}^{-0,3T}+0,3T-1\right)$.

b. Déterminer une valeur approchée à 1 m près de la distance parcourue par le colis lorsqu'il atteint le sol.

4. Déterminer un encadrement d'amplitude $0,1$ s du temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres.*

∽ Baccalauréat S (spécialité) Antilles-Guyane ∾ septembre 2016

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

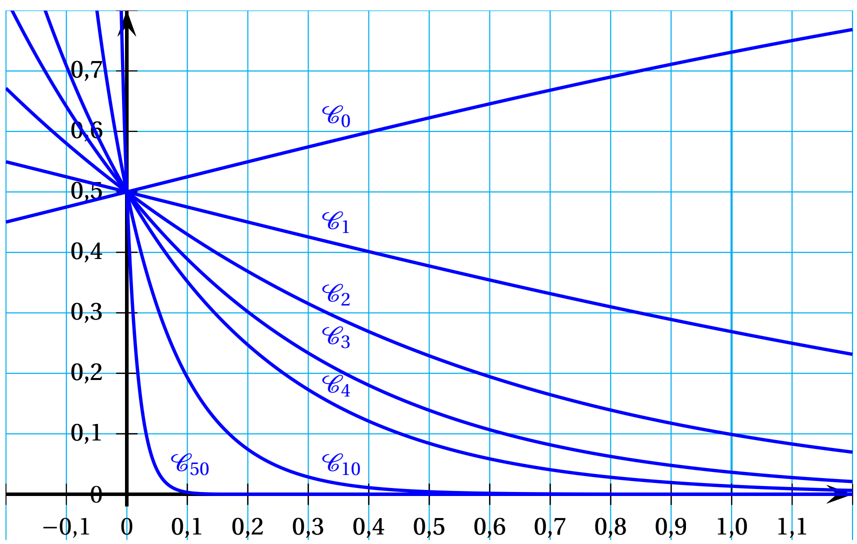
$$f_n(x) = \frac{e^{-(n-1)x}}{1+e^x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On a représenté ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_n$ pour différentes valeurs de n.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$



Partie A - Étude graphique

1. Donner une interprétation graphique de u_n.
2. Quelles conjectures peut-on faire concernant les variations et la convergence de la suite (u_n) ?
3. Proposer, à l'aide du graphique et en expliquant la démarche, un encadrement de u_4 d'amplitude $0,05$.

Partie B - Étude théorique

1. Montrer que $u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.
2. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$ puis en déduire u_1.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
4. On pose pour tout entier naturel n et pour tout x réel, $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
   a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $d_n(x) = e^{-nx}\frac{1-e^x}{1+e^x}$.
   b. Étudier le signe de la fonction d_n sur l'intervalle $[0\,;1]$.
5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
6. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
   a. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_n + u_{n+1} = \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

b. En déduire la valeur de ℓ.

c. On souhaite construire un algorithme qui affiche la valeur de u_N pour un entier naturel N non nul donné.
Recopier et compléter les quatre lignes de la partie **Traitement** de l'algorithme suivant.

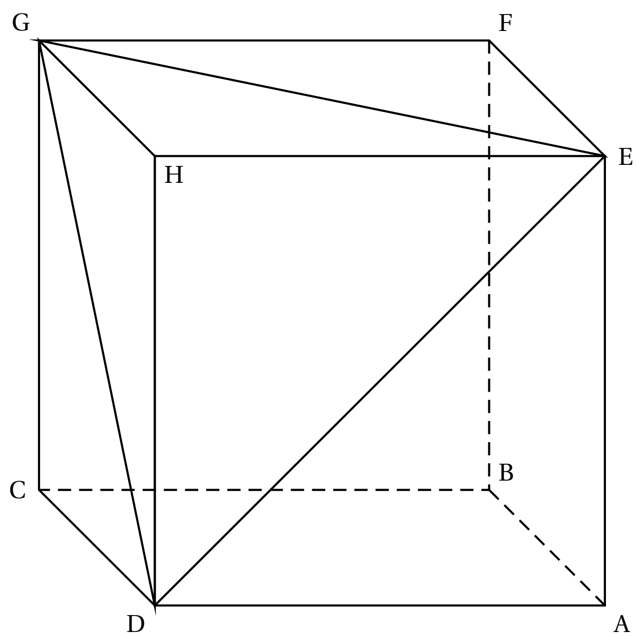
Entrée :	N est un entier naturel non nul
Variables :	U est un nombre réel
	K est un entier naturel
Initialisation :	Affecter 1 à K
	Affecter $1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ à U
	Demander à l'utilisateur la valeur de N
Traitement :	Tant que $K < N$
	Affecter . . . . à U
	Affecter . . . . à K
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher U

*

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



On se place dans le repère orthonormé $\left(B\,;\,\overrightarrow{BA},\,\overrightarrow{BC},\,\overrightarrow{BF}\right)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BH).
2. Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).
3. Déterminer une équation cartésienne du plan (DEG).
4. On note P le point d'intersection du plan (DEG) et de la droite (BH).
   Déduire des questions précédentes les coordonnées du point P.
5. Que représente le point P pour le triangle DEG ? Justifier la réponse.*

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre questions, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et recopiera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et (E) l'équation d'inconnue complexe z

$$(E): \quad z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0,$$

où a désigne un nombre réel quelconque.
   - Pour toute valeur de a, (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$.
   - Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et leurs modules sont distincts.
   - Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et leurs modules sont égaux.
   - Il existe une valeur de a pour laquelle (E) admet au moins une solution réelle.
2. Soit θ un nombre réel dans l'intervalle $]0\,;\,\pi[$ et z le nombre complexe $z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
   Pour tout réel θ dans l'intervalle $]0\,;\,\pi[$:
   - Le nombre z est un réel positif.
   - Le nombre z est égal à 1.
   - Un argument de z est θ.
   - Un argument de z est $\dfrac{\theta}{2}$.
3. Soit la fonction f définie et dérivable pour tout nombre réel x par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x.$$

   - La fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{4}\,;\,+\infty\right[$.
   - Soit f' la fonction dérivée de f. On a $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.
   - La fonction f est positive sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   - Soit F la fonction définie, pour tout réel x, par $F(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x)$.
     La fonction F est une primitive de la fonction f.
4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $0,02$.
   $0,45$ est une valeur approchée à 10^{-2} près de :
   - $P(X = 30)$
   - $P(X \leqslant 60)$
   - $P(X \leqslant 30)$
   - $P(30 \leqslant X \leqslant 40)$

*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Parmi les ordinateurs d'un parc informatique, 60 % présentent des failles de sécurité. Afin de pallier ce problème, on demande à un technicien d'intervenir chaque jour pour traiter les défaillances.
On estime que chaque jour, il remet en état 7 % des ordinateurs défaillants, tandis que de nouvelles failles apparaissent chez 3 % des ordinateurs sains. On suppose de plus que le nombre d'ordinateurs est constant sur la période étudiée.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'ordinateurs sains de ce parc informatique au bout de n jours d'intervention, et b_n la proportion d'ordinateurs défaillants au bout de n jours.
Ainsi $a_0 = 0,4$ et $b_0 = 0,6$.

Partie A

1. Décrire la situation précédente à l'aide d'un graphe ou d'un arbre pondéré.
2. Déterminer a_1 et b_1.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
   a. Justifier que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.
   b. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.
   c. Calculer, à l'aide de la calculatrice, X_{30}. En donner une interprétation concrète (les coefficients seront arrondis au millième).

Partie B

1. On pose $D = \begin{pmatrix}0,9 & 0\\ 0 & 0,9\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}0,07\\ 0,03\end{pmatrix}$.

a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$X_{n+1} = DX_n + B.$$

2. On pose, pour tout entier naturel n, $Y_n = X_n - 10B$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1} = DY_n$.

b. On admet que pour tout entier naturel n, $Y_n = D^n Y_0$.
En déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = D^n\left(X_0 - 10B\right) + 10B$.

c. Donner l'expression de D^n puis en déduire a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de n.

3. Selon cette étude, que peut-on dire de la proportion d'ordinateurs défaillants sur le long terme ?*

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ∾
17 novembre 2016

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} - 0,1.$$

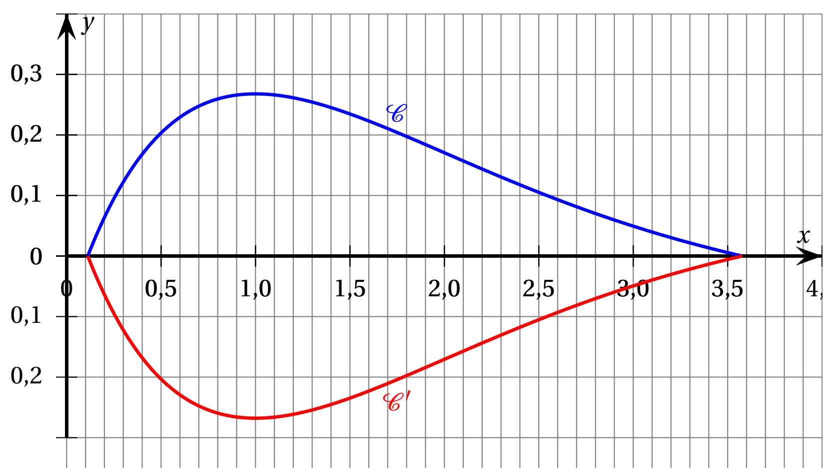
1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $[0~;~+\infty[$ et dresser le tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[0~;~1]$.

On admet l'existence du nombre réel strictement positif β tel que $\alpha < \beta$ et $f(\beta) = 0$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha~;~\beta]$ dans un repère orthogonal et $\mathscr{C}'$ la courbe symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

L'unité sur chaque axe représente 5 mètres.

Ces courbes sont utilisées pour délimiter un massif floral en forme de flamme de bougie sur lequel seront plantées des tulipes.



[resume]Démontrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $[\alpha~;~\beta]$ par

$$F(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x} - 0,1x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha~;~\beta]$. Calculer, en unités d'aire, une valeur arrondie à 0,01 près de l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. On utilisera les valeurs arrondies à 0,001 près suivantes : $\alpha \approx 0,112$ et $\beta \approx 3,577$. Sachant que l'on peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré, calculer le nombre de plants de tulipes nécessaire à la réalisation de ce massif.*

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

La société « Bonne Mamie » utilise une machine pour remplir à la chaîne des pots de confiture. On note X la variable aléatoire qui à chaque pot de confiture produit associe la masse de confiture qu'il contient, exprimée en grammes.
Dans le cas où la machine est correctement réglée, on admet que X suit une loi normale de moyenne $\mu = 125$ et d'écart-type σ.

1. **a.** Pour tout nombre réel t positif, déterminer une relation entre $P(X \leqslant 125 - t)$ et $P(X \geqslant 125 + t)$.

b. On sait que 2,3 % des pots de confiture contiennent moins de 121 grammes de confiture. En utilisant la relation précédente, déterminer
$P(121 \leqslant X \leqslant 129)$.

2. Déterminer une valeur arrondie à l'unité près de σ telle que
$P(123 \leqslant X \leqslant 127) = 0,68$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $\sigma = 2$.

[resume]On estime qu'un pot de confiture est conforme lorsque la masse de confiture qu'il contient est comprise entre 120 et 130 grammes.

1. a. On choisit au hasard un pot de confiture de la production. Déterminer la probabilité que ce pot soit conforme. On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

b. On choisit au hasard un pot parmi ceux qui ont une masse de confiture inférieure à 130 grammes. Quelle est la probabilité que ce pot ne soit pas conforme ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

2. On admet que la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'un pot de confiture soit conforme est $0,988$.
On choisit au hasard 900 pots dans la production. On constate que 871 de ces pots sont conformes. Au seuil de 95 % peut-on rejeter l'hypothèse suivante : « La machine est bien réglée » ?*

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

1. On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a. Déterminer la forme exponentielle de a.

b. Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.

2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.

3. Soit M un point d'affixe z du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

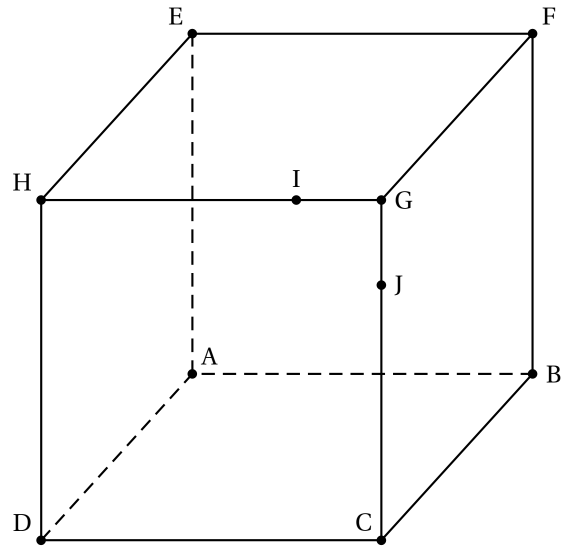
a. Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z = \text{e}^{\text{i}\theta}$ avec θ un nombre réel.

b. Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.

4. Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

EXERCICE 4 **3 points**
Commun à tous les candidats

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.
On définit les points I et J respectivement par $\overrightarrow{\text{HI}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{HG}}$ et $\overrightarrow{\text{JG}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{CG}}$.



1. **Sur le document réponse donné en annexe, à rendre avec la copie**, tracer, sans justifier, la section du cube par le plan (IJK) où K est un point du segment [BF].
2. **Sur le document réponse donné en annexe, à rendre avec la copie**, tracer, sans justifier, la section du cube par le plan (IJL) où L est un point de la droite (BF).
3. Existe-t-il un point P de la droite (BF) tel que la section du cube par le plan (IJP) soit un triangle équilatéral ? Justifier votre réponse.*

EXERCICE 5 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.
Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.
Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.
On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.
Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année. Ainsi, on a

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,8u_n + c.$$

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$.

1. Conjecturer la monotonie et la limite de la suite (u_n).
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.
3. Vérifier les deux conjectures établies à la question 1. en justifiant votre réponse.
   Interpréter ces deux résultats.

Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.
On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.
On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5c$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire une expression du terme général de la suite (v_n)en fonction de n.
3. Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne son objectif.*

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats avant suivi l'enseignement de spécialité

On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.
Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de fourmis, exprimé en milliers. dans cette population au bout du n-ième jour.
Au début de l'étude la colonie compte 5 000 fourmis et au bout d'un jour elle compte 5 100 fourmis. Ainsi, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 5,1$.
On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10 % chaque jour.
En d'autres termes. pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9\left(u_{n+1} - u_n\right).$$

1. Démontrer, dans ces conditions, que $u_2 = 5,19$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

  a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1} = AV_n$.
  On admet alors que, pour tout entier naturel n, $V_n = A^n V_0$.

  b. On pose $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On admet que la matrice P est inversible.
  À l'aide de la calculatrice, déterminer la matrice P^{-1}.
  En détaillant les calculs, déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.

  c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a
  $A^n = PD^nP^{-1}$.
  Pour tout entier naturel n, on admet que

$$A^n = \begin{pmatrix} -10 \times 0,9^{n+1} + 10 & 10 \times 0,9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0,9^n + 10 & 10 \times 0,9^n - 9 \end{pmatrix}.$$

  d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 6 - 0,9^n$.

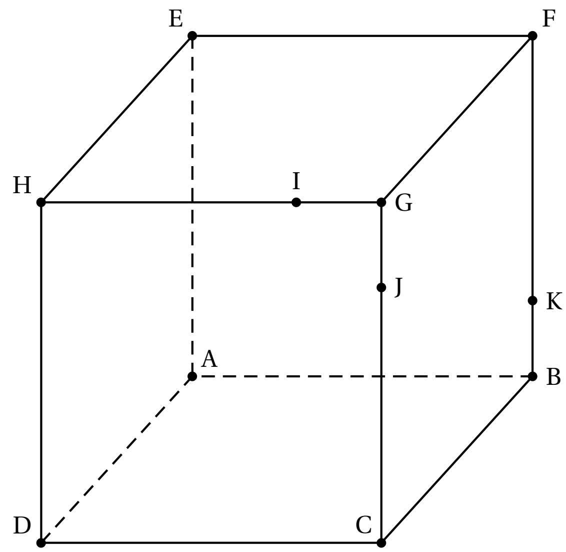
3. Calculer la taille de la colonie au bout du 10$^{\text{e}}$ jour. On arrondira le résultat à une fourmi près.

4. Calculer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte.*

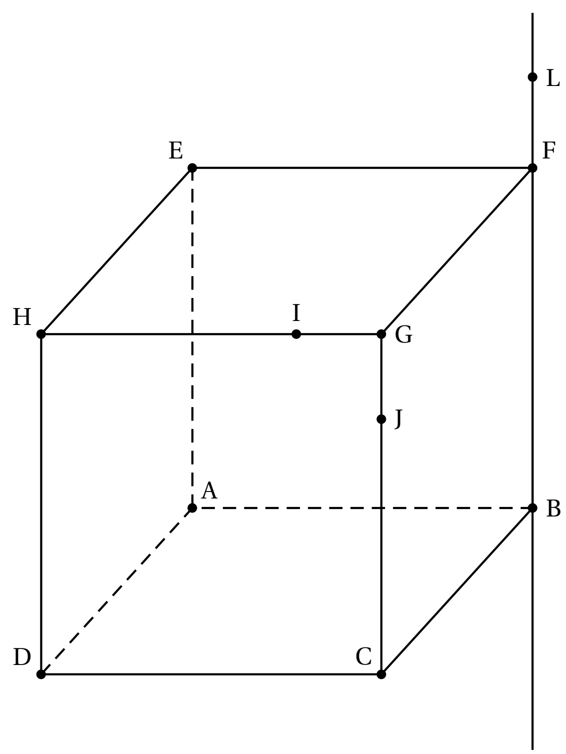
À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE de l'exercice 4

Exercice 4, question 1



Exercice 4, question 2



∽ Baccalauréat S Amérique du Sud ∽
22 novembre 2016

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données en annexe 1 sont les représentations graphiques, dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, de deux fonctions f et g définies sur $[0~;~+\infty[$.
On considère les points A(0,5; 1) et B(0 ; −1) dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On sait que O appartient à $\mathscr{C}_f$ et que la droite (OA) est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point O.

1. On suppose que la fonction f s'écrit sous la forme $f(x) = (ax+b)\text{e}^{-x^2}$ où a et b sont des réels. Déterminer les valeurs exactes des réels a et b, en détaillant la démarche.

Désormais, on considère que $f(x) = 2x\text{e}^{-x^2}$ pour tout x appartenant à $[0~;~+\infty[$

[resume]

1. **a.** On admettra que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} \times \dfrac{x^2}{\text{e}^{x^2}}$.
   Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
   b. Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.
2. La fonction g dont la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ passe par le point B(0 ; −1) est une primitive de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.
   a. Déterminer l'expression de $g(x)$.
   b. Soit m un réel strictement positif.
   Calculer $I_m = \displaystyle\int_0^m f(t)\,\text{d}t$ en fonction de m.
   c. Déterminer $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} I_m$.
3. **a.** Justifier que f est une fonction densité de probabilité sur $[0~;~+\infty[$.
   b. Soit X une variable aléatoire continue qui admet la fonction f comme densité de probabilité. Justifier que, pour tout réel x de $[0~;~+\infty[$,
   $P(X \leqslant x) = g(x) + 1$.
   c. En déduire la valeur exacte du réel α tel que $P(X \leqslant \alpha) = 0,5$.
   d. Sans utiliser une valeur approchée de α, construire dans le repère de l'annexe 1 le point de coordonnées $(\alpha~;~0)$ en laissant apparents les traits de construction.
   Hachurer ensuite la région du plan correspondant à $P(X \leqslant \alpha)$.*

EXERCICE 2 **3 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué **un point par réponse exacte correctement justifiée**. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Proposition 1

L'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2\text{i}|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe 3i.

Proposition 2

Soit (E) l'équation $(z-1)\left(z^2-8z+25\right) = 0$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Proposition 3

$\dfrac{\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $\left(-\sqrt{3}+\text{i}\right)^8$.

EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}.$$

1. **a.** À l'aide du calcul des premiers termes de la suite (u_n), conjecturer la forme explicite de u_n en fonction de n. Démontrer cette conjecture.

   b. En déduire la valeur de la limite ℓ de la suite (u_n).

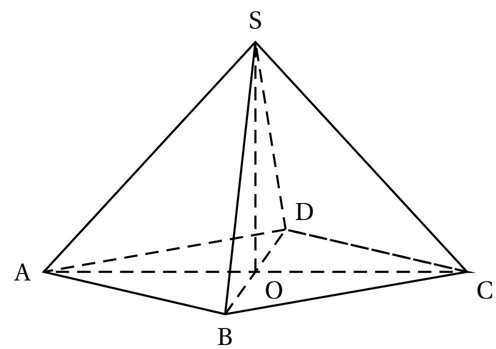
2. Compléter, dans l'annexe 2, l'algorithme permettant de déterminer la valeur du plus petit entier n tel que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 10^{-3}$.*

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : un calcul de volume sans repère

On considère une pyramide équilatère SABCD (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre.
Les diagonales du carré ABCD mesurent 24 cm. On note O le centre du carré ABCD.
On admettra que OS = OA.



1. Sans utiliser de repère, démontrer que la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).
2. En déduire le volume, en cm^3, de la pyramide SABCD.

Partie B : dans un repère

On considère le repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}},\ \overrightarrow{\text{OS}}\right)$.

1. On note P et Q les milieux respectifs des segments [AS] et [BS].

   a. Justifier que $\overrightarrow{n}\,(1\,;\,1\,;\,-3)$ est un vecteur normal au plan (PQC).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQC).

2. Soit H le point du plan (PQC) tel que la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC).

   a. Donner une représentation paramétrique de la droite (SH).

   b. Calculer les coordonnées du point H.

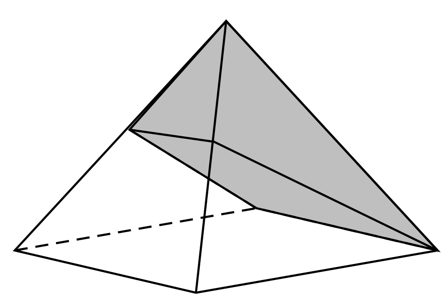
   c. Montrer alors que la longueur SH, en unité de longueur, est $\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.

3. On admettra que l'aire du quadrilatère PQCD, en unité d'aire, est égale à $\dfrac{3\sqrt{11}}{8}$

   Calculer le volume de la pyramide SPQCD, en unité de volume.

Partie C : partage équitable

Pour l'anniversaire de ses deux jumelles Anne et Fanny, Madame Nova a confectionné un joli gâteau en forme de pyramide équilatère dont les diagonales du carré de base mesurent 24 cm.
Elle s'apprête à le partager en deux, équitablement, en plaçant son couteau sur le sommet. C'est alors qu'Anne arrête son geste et lui propose une découpe plus originale :
« Place la lame sur le milieu d'une arête, parallèlement à un côté de la base, puis coupe en te dirigeant vers le côté opposé ».



Fanny a des doutes, les parts ne lui semblent pas équitables.
Est-ce le cas ? Justifier la réponse.*

Exercice 5 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, toutes les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-4}

On étudie un modèle de climatiseur d'automobile composé d'un module mécanique et d'un module électronique.
Si un module subit une panne, il est changé.

Partie A : Étude des pannes du module mécanique

Une enseigne d'entretien automobile a constaté, au moyen d'une étude statistique, que la durée de fonctionnement (en mois) du module mécanique peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type σ :

1. Déterminer l'arrondi à 10^{-4} de σ sachant que le service statistique indique que $P(D \geqslant 48) = 0{,}7977$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\boldsymbol{\sigma = 2,4}$.

[resume]Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module mécanique soit comprise entre 45 et 52 mois.
Déterminer la probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois.

Partie B : Étude des pannes d'origine électronique

Sur le même modèle de climatiseur, l'enseigne d'entretien automobile a constaté que la durée de fonctionnement (en mois) du module électronique peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer la valeur exacte de λ, sachant que le service statistique indique que $P(0 \leqslant T \leqslant 24) = 0,03$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\boldsymbol{\lambda = 0{,}00127}$.

[resume]Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois.

2. **a.** Démontrer que, pour tous réels t et h positifs, on a :
$P_{T \geqslant t}(T \geqslant t+h) = P(T \geqslant h)$, c'est-à-dire que la variable aléatoire T est sans vieillissement.
   b. Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois. Déterminer la probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants.

Partie C : Pannes d'origine mécanique et électronique

On admet que les évènements $(D \geqslant 48)$ et $(T \geqslant 48)$ sont indépendants.
Déterminer la probabilité que le climatiseur ne subisse aucune panne avant 48 mois.

Partie D : Cas particulier d'un garage de l'enseigne

Un garage de l'enseigne a étudié les fiches d'entretien de 300 climatiseurs de plus de 4 ans. Il constate que 246 d'entre eux ont leur module mécanique en état de fonctionnement depuis 4 ans.
Ce bilan doit-il remettre en cause le résultat donné par le service statistique de l'enseigne, à savoir que $P(D \geqslant 48) = 0{,}7977$? Justifier la réponse.

Exercice 5 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, ... sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.
Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$$N_p = \underbrace{11\ldots1}_{\substack{p \text{ répétitions} \\ \text{du chiffre } 1}} = \sum_{k=0}^{k=p-1} 10^k.$$

Dans tout l'exercice, p désigne un entier naturel non nul.
L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des rep-units.

Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

1. Montrer que N_p n'est divisible ni par 2 ni par 5.
2. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 3.
   a. Prouver que, pour tout entier naturel j, $10^j \equiv 1 \mod 3$.
   b. En déduire que $N_p \equiv p \mod 3$.
   c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le rep-unit N_p soit divisible par 3.
3. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 7.
   a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous, où a est l'unique entier relatif appartenant à $\{-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\}$ tel que $10^m \equiv a \mod 7$.
   On ne demande pas de justification.

m	0	1	2	3	4	5	6
a							

   b. Soit p un entier naturel non nul.
   Montrer que $10^p \equiv 1 \mod 7$ si et seulement si p est un multiple de 6.
   On pourra utiliser la division euclidienne de p par 6.
   c. Justifier que, pour tout entier nature p non nul, $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$.
   d. Démontrer que « 7 divise N_p » est équivalent à « 7 divise $9N_p$ ».
   e. En déduire que N_p est divisible par 7 si et seulement si p est un multiple de 6.

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

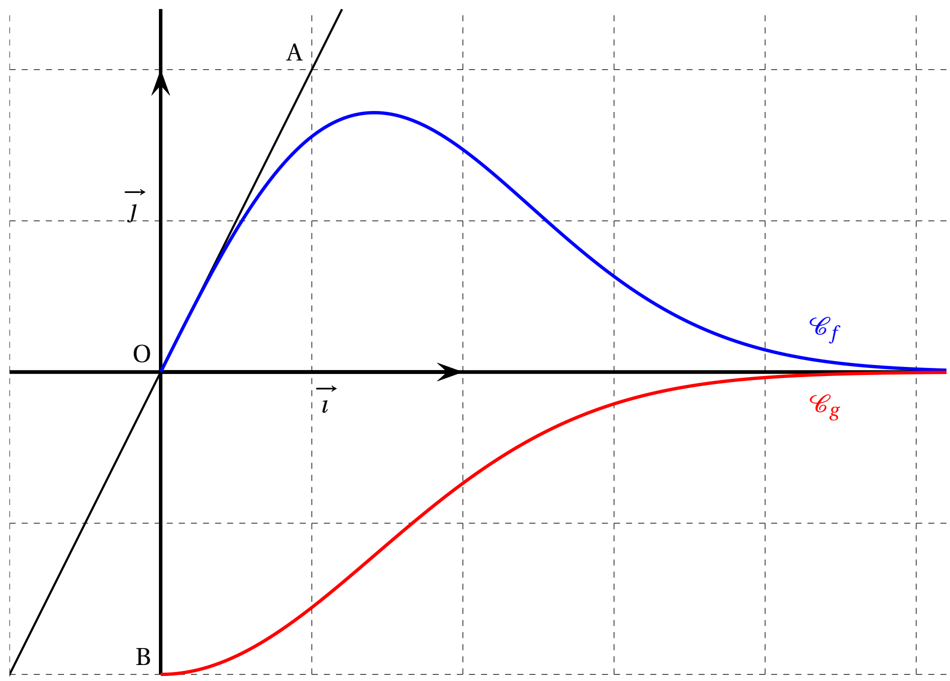
1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, c'est-à-dire $n^2 \equiv 1 \mod 10$.
   a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n \equiv \ldots\ [10]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \ldots\ [10]$										

   b. En déduire qu'il existe un entier naturel m tel que : $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.
   c. Conclure que $n^2 \equiv 1 \mod 20$.
2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20 ?
3. En déduire que, pour p entier naturel supérieur ou égal à 2, le rep-unit N_p n'est pas le carré d'un entier.*

ANNEXES (à compléter et à remettre avec la copie)

Annexe 1 (Exercice 1) :



Annexe 2 (Exercice 3) :

Variables :	n, a et b sont des nombres.
Initialisation :	n prend la valeur 0
	a prend la valeur 0
	b prend la valeur 0,5.
Traitement :	Tant que $\|b-a\|$ ....
	n prend la valeur ....
	a prend la valeur ....
	b prend la valeur ....
	Fin Tant que.
Sortie :	Afficher ....

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2017

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$$

et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Partie A

1. Justifier toutes les informations du tableau de variations de f donné ci-dessous.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$			$\frac{1}{\mathrm{e}}$		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

2. Soit F la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$F(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

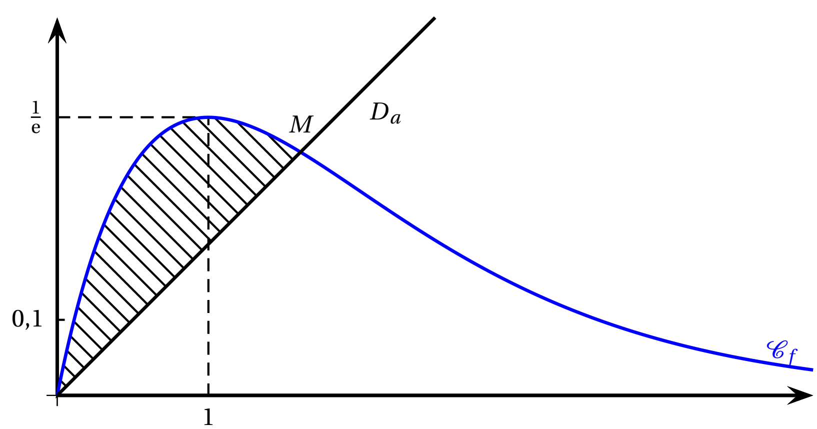
Démontrer que la fonction F est une primitive de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$. On considère la droite D_a d'équation $y = ax$ et M le point d'intersection de la droite D_a avec la courbe $\mathscr{C}_f$. On note x_M l'abscisse du point M.

On note $\mathscr{H}(a)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous, c'est-à-dire du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$ au-dessus de la droite D_a et entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = x_M$.

Le but de cette partie est d'établir l'existence et l'unicité de la valeur de a telle que $\mathscr{H}(a) = 0,5$ puis d'étudier un algorithme.



1. Prouver que la droite D_a et la courbe $\mathscr{C}_f$ ont un unique point d'intersection M distinct de l'origine.

On admet dans la suite de l'exercice que le point M a pour abscisse $x_M = -\ln a$ et que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de la droite D_a sur l'intervalle $[0\,;\,-\ln(a)]$.

2. Montrer que $\mathcal{H}(a) = a\ln(a) - \frac{1}{2}a(\ln(a))^2 + 1 - a$.

3. Soit la fonction $\mathcal{H}$ définie sur $]0\,;\,1]$ par $\mathcal{H}(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x(\ln(x))^2 + 1 - x$.
On admet que $\mathcal{H}$ est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et que son tableau de variations correspond à celui qui est proposé ci-dessous.

x	0		1
$\mathcal{H}(x)$	‖ 1	$\searrow$	0

Justifier qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0\,;\,1[$ tel que $\mathcal{H}(\alpha) = 0,5$.

4. On considère l'algorithme présenté ci-dessous.

VARIABLES :	A, B et C sont des nombres ;
	p est un entier naturel.
INITIALISATION :	Demander la valeur de p
	A prend la valeur 0
	B prend la valeur 1
TRAITEMENT :	Tant que $B - A > 10^{-p}$
	C prend la valeur $(A+B)/2$
	Si $\mathcal{H}(C) > 0,5$
	Alors A prend la valeur de C
	Sinon B prend la valeur de C
	Fin de la boucle Si
	Fin de la boucle Tant que
SORTIE :	Afficher A et B.

Que représentent les valeurs A et B affichées en sortie de cet algorithme ?

5. Donner un encadrement d'amplitude $0,01$ de α.

EXERCICE 2 — 3 points

Commun à tous les candidats

Répondre à chacune des affirmations ci-dessous par Vrai ou Faux en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.

1. La durée de vie T (exprimée en années) d'un appareil électronique suit la loi exponentielle de paramètre λ où $\lambda > 0$.
   On sait qu'un tel appareil a une durée de vie moyenne de quatre ans.
   La probabilité que cet appareil fonctionne deux années de plus sachant qu'il a déjà fonctionné trois ans est d'environ $0,39$ à $0,01$ près.
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
   L'équation $z^3 - 3z^2 + 3z = 0$ admet trois solutions dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, qui sont les affixes de trois points formant un triangle équilatéral.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Des étudiants d'une université se préparent à passer un examen pour lequel quatre thèmes (A, B, C et D) sont au programme.

Partie A

Sur les 34 sujets de l'examen déjà posés, 22 portaient sur le thème A.
Peut-on rejeter au seuil de 95 % l'affirmation suivante : « il y a une chance sur deux que le thème A soit évalué le jour de l'examen » ?

Partie B

Le thème A reste pour beaucoup d'étudiants une partie du programme difficile à maîtriser. Un stage de préparation est alors proposé pour travailler ce thème.
Lors de l'examen, on a constaté que s'il y a un exercice portant sur le thème A :

- 30 % des étudiants n'ayant pas suivi le stage ne traitent pas l'exercice ;
- $\frac{5}{6}$ des étudiants ayant suivi le stage l'ont traité.

On sait de plus que 20 % des étudiants participent au stage.

Lors des résultats de l'examen, un étudiant s'exclame : « Je n'ai pas du tout traité le thème A ».
Quelle est la probabilité que cet étudiant ait suivi le stage ? On arrondira le résultat à $0,001$ près.

Partie C

On suppose que la variable aléatoire T, associant la durée (exprimée en minutes) que consacre un étudiant de cette université pour la composition de cet examen, suit la loi normale d'espérance $\mu = 225$ et d'écart-type σ où $\sigma > 0$.
La probabilité qu'un étudiant finisse son examen en moins de 235 minutes est de $0,98$.
Déterminer une valeur approchée de σ à $0,1$ près.
$\left(\text{On pourra, par exemple, introduire la variable aléatoire } Z = \frac{T-225}{\sigma}\right)$.

EXERCICE 4 **3 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 &=& 0 \\ u_{n+1} &=& \dfrac{1}{2-u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \geqslant 0. \end{array}\right.$$

On obtient à l'aide d'un tableur les premiers termes de cette suite :

	A	B	C
1		u_n	u_n
2	n	(en valeurs exactes)	(en valeurs approchées)
3	0	0	0
4	1	1/2	0,5
5	2	2/3	0,666 666 667
6	3	3/4	0,75
7	4	4/5	0,8
8	5	5/6	0,833 333 333
9	6	6/7	0,857 142 857
10	7	7/8	0,875
11	8	8/9	0,888 888 889
12	9	9/10	0,9
13	10	10/11	0,909 090 909

Prouver que la suite (u_n) converge.

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J, K).
On considère les points

$$A(-1~;~-1~;~0),\ B(6~;~-5~;~1),\ C(1~;~2~;~-2) \text{ et } S(13~;~37~;~54).$$

1. **a.** Justifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

   b. Prouver que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. **a.** Déterminer la nature du triangle ABC.

   b. Démontrer que la valeur exacte de l'aire du triangle ABC est, en unités d'aire, $\dfrac{\sqrt{1\,122}}{2}$.

3. **a.** Prouver que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

   b. La droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point S coupe le plan (ABC) en un point noté H.
   Déterminer les coordonnées du point H.

4. Déterminer le volume du tétraèdre SABC.
   On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :

$$\frac{\textit{Aire de la base} \times \textit{hauteur}}{3}.$$

∽ Baccalauréat S Pondichéry 17 avril 2015 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

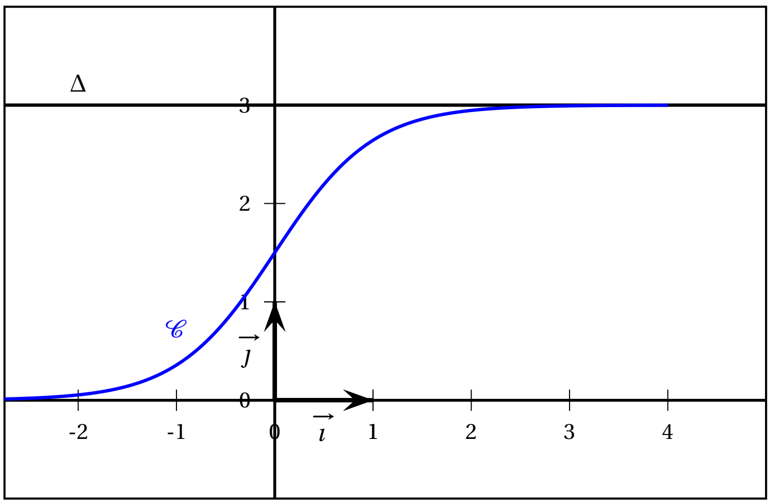
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1+\text{e}^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.
2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\frac{3}{2}\ln\left(1+\text{e}^{-2x}\right)$.
   Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
3. Soit a un réel strictement positif.
   a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\text{d}x$.
   b. Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\text{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\text{e}^{-2a}}\right)$.
   c. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan défini par
   $\left\{\begin{array}{lll} x & \geqslant & 0 \\ f(x) & \leqslant y & \leqslant 3 \end{array}\right.$
   Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathscr{D}$.*

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n, $\quad v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1~;~1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.
Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?

2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015+n)$.

  a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $\quad h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.

  b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n).
  Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

  c. La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.*

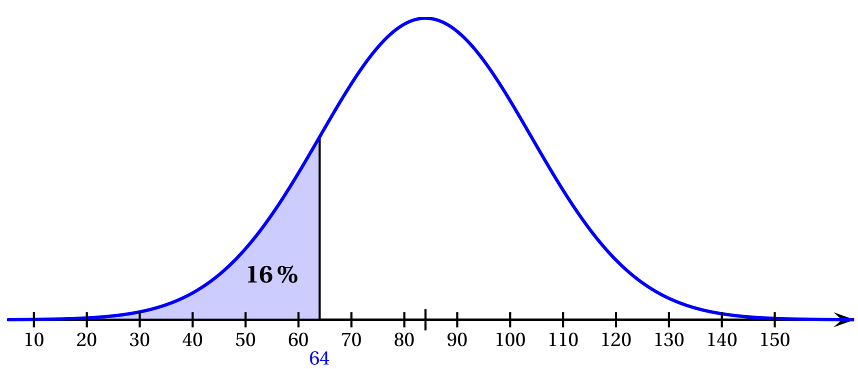
EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0,16$.
La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



1. **a.** En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$.

  b. Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?

2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X-84}{\sigma}$.

  a. Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?

  b. Justifier que $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.

  c. En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3}.

3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.
Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3}.

a. Calculer la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans.

b. Calculer la probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

Le lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières années.
L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires.
Des études statistiques menées **sur les clients qui prennent l'extension de garantie** montrent que 11,5 % d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

1. On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).

a. Quelle est la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de probabilité utilisée. Arrondir à 10^{-3}.

b. Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à 10^{-3}.

2. L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, El'Ectro remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros, **si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année**. Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.
On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note Y la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise El'Ectro, grâce à l'extension de garantie.

a. Justifier que Y prend les valeurs 65 et -334 puis donner la loi de probabilité de Y.

b. Cette offre d'extension de garantie est-elle financièrement avantageuse pour l'entreprise ? Justifier.*

EXERCICE 4 **5 points**
Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.
Dans le repère $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $\text{M}\left(1 ; 1 ; \dfrac{3}{4}\right)$, $\text{N}\left(0 ; \dfrac{1}{2} ; 1\right)$, $\text{P}\left(1 ; 0 ; -\dfrac{5}{4}\right)$.

1. Placer M, N et P sur la figure donnée en annexe.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$.
En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.

3. On considère l'algorithme 1 donné en annexe.

a. Exécuter *à la main* cet algorithme avec les coordonnées des points M, N et P données ci-dessus.

b. À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ? Qu'en déduire pour le triangle MNP ?

4. On considère l'algorithme 2 donné en annexe. Le compléter pour qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M.

5. On considère le vecteur $\overrightarrow{n}(5 ; -8 ; 4)$ normal au plan (MNP).

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).

b. On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

6. Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.

a. Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\dfrac{4}{7} ; \dfrac{24}{35} ; \dfrac{23}{35}\right)$.

b. On donne $\text{FK} = \sqrt{\dfrac{27}{35}}$.
Calculer le volume du tétraèdre MNPF.*

EXERCICE 4 **5 points**
Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul sont appelés **nombres de Mersenne**.

1. On désigne par a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que PGCD$(b\ ;\ c) = 1$.
   Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que :

   si b divise a et c divise a alors le produit bc divise a.

2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$.
   Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous.

$\left(2^{33} - 1\right) \div 3$	2863311530
$\left(2^{33} - 1\right) \div 4$	2147483648
$\left(2^{33} - 1\right) \div 12$	715827882,6

   Il affirme que 3 divise $\left(2^{33} - 1\right)$ et 4 divise $\left(2^{33} - 1\right)$ et 12 ne divise pas $\left(2^{33} - 1\right)$.

   a. En quoi cette affirmation contredit-elle le résultat démontré à la question **1.** ?

   b. Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $\left(2^{33} - 1\right)$.

   c. En remarquant que $2 \equiv -1 \quad [3]$, montrer que, en réalité, 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.

   d. Calculer la somme $S = 1 + 2^3 + \left(2^3\right)^2 + \left(2^3\right)^3 + \cdots + \left(2^3\right)^{10}$.

   e. En déduire que 7 divise $2^{33} - 1$.

3. On considère le nombre de Mersenne $2^7 - 1$. Est-il premier ? Justifier.

4. On donne l'algorithme suivant où MOD$(N,\ k)$ représente le reste de la division euclidienne de N par k.

Variables :	n entier naturel supérieur ou égal à 3
	k entier naturel supérieur ou égal à 2
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
	Affecter à k la valeur 2.
Traitement :	Tant que MOD$(2^n - 1,\ k) \neq 0$ et $k \leqslant \sqrt{2^n - 1}$
	Affecter à k la valeur $k + 1$
	Fin de Tant que.
Sortie :	**Afficher** k.
	Si $k > \sqrt{2^n - 1}$
	Afficher « CAS 1 »
	Sinon
	Afficher « CAS 2 »
	Fin de Si

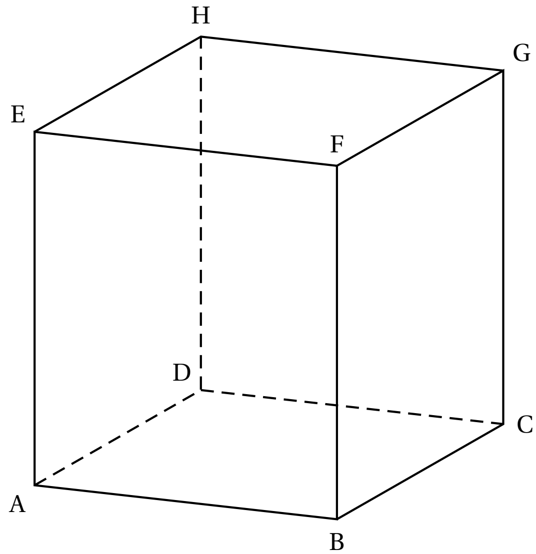
   a. Qu'affiche cet algorithme si on saisit $n = 33$? Et si on saisit $n = 7$?

   b. Que représente le CAS 2 pour le nombre de Mersenne étudié ? Que représente alors le nombre k affiché pour le nombre de Mersenne étudié ?

   c. Que représente le CAS 1 pour le nombre de Mersenne étudié ?*

ANNEXE à remettre avec la copie

EXERCICE 4 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



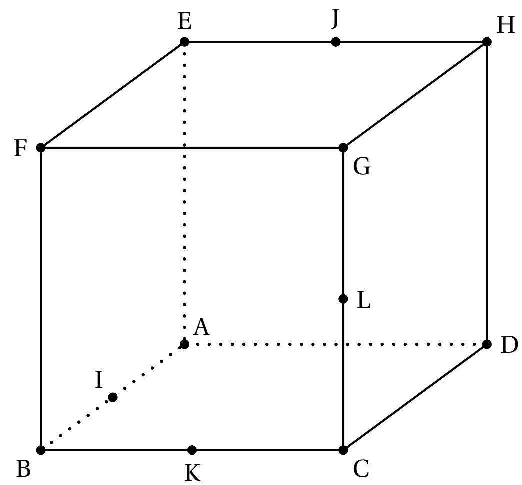
Algorithme 1
Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
Afficher k

Algorithme 2 (à compléter)
Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$

∽ Baccalauréat S Liban 27 mai 2015 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

ABCDEFGH est un cube.



I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. **a.** Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.
4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.
5. Calculer le volume du tétraèdre FIJK.
6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?*

EXERCICE 2 **6 points**

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :
pour tout entier naturel n, $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
   b. En déduire la valeur exacte de u_1.
3. **a.** Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables :	i et n sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur …
Traitement :	Pour i variant de 1 à …
	|Affecter à u la valeur …
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

   b. À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,693 1	0,306 9	0,193 1	0,140 2	0,109 8	0,090 2	0,047 5	0,009 9	0,005 0

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

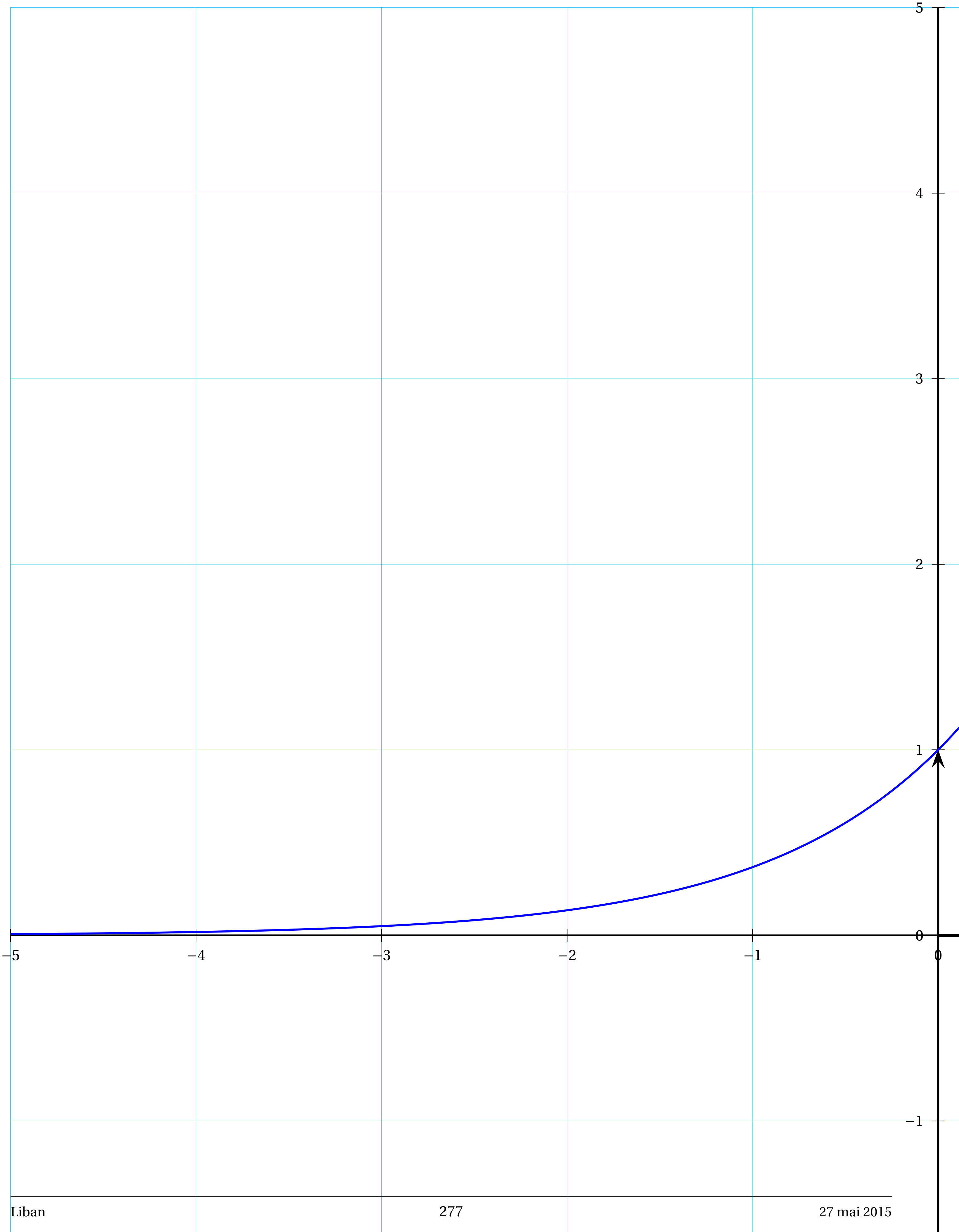
4. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

   b. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

5. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $\ell = 0$.*

EXERCICE 3 **3 points**

On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \mathrm{e}^x$, tracée ci-dessous.



5
4
3
2
1
0
−1
−5
−4
−3
−2
−1
0

Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1. Dans cette question, on choisit $m = \text{e}$.
   Démontrer que la droite $\mathscr{D}_\text{e}$, d'équation $y = \text{e}x$, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.
2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}_m$.
3. Démontrer cette conjecture.*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.
Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :
- A l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- B l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- V l'évènement « La personne interrogée dit la vérité ».

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
2. **a.** Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
   b. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.
3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est $0,529$.
4. L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :

52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat A.
*estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1 200 personnes.

   Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut- il croire en sa victoire ?
5. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est $0,4$.
   L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1 200 réponses.
   Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :
- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On appelle p_n la probabilité de ne pas fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et q_n, la probabilité de fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer.
On suppose que $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$.

1. Calculer p_1 et q_1.
2. On utilise un tableur pour automatiser le calcul des termes successifs des suites (p_n) et (q_n). Une copie d'écran de cette feuille de calcul est fournie ci-dessous :

	A	B	C	D
1	n	p_n	q_n	
2	0	0	1	
3	1			
4	2			
5	3			

Dans la colonne A figurent les valeurs de l'entier naturel n.

Quelles formules peut-on écrire dans les cellules B3 et C3 de façon qu'en les recopiant vers le bas, on obtienne respectivement dans les colonnes B et C les termes successifs des suites $\left(p_n\right)$ et $\left(q_n\right)$?

3. On définit les matrices M et, pour tout entier naturel n, X_n par

$$M = \begin{pmatrix}0,9 & 0,4\\0,1 & 0,6\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_n = \begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}.$$

On admet que $X_{n+1} = M \times X_n$ et que, pour tout entier naturel n,
$Xn = M^n \times X_0$.

On définit les matrices A et B par $A = \begin{pmatrix}0,8 & 0,8\\0,2 & 0,2\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}0,2 & -0,8\\-0,2 & 0,8\end{pmatrix}$.

a. Démontrer que $M = A + 0,5B$.

b. Vérifier que $A^2 = A$, et que $A \times B = B \times A = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.

On admet dans la suite que, pour tout entier naturel n strictement positif, $A^n = A$ et $B^n = B$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $M^n = A + 0,5^n B$.

d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n$.

e. À long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer ?*

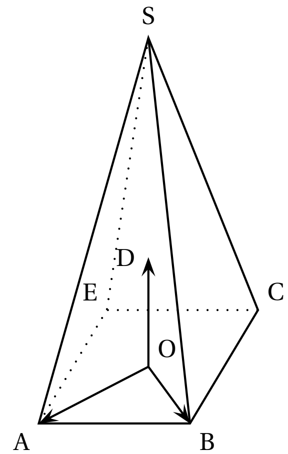
Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Nord 2 juin 2015

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace, on considère une pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O. Soit D le point de l'espace tel que $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}\right)$ soit un repère orthonormé. Le point S a pour coordonnées (0 ; 0 ; 3) dans ce repère.



Partie A

1. Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure jointe en **annexe 1, (à rendre avec la copie)**.
2. Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure jointe en **annexe 1, (à rendre avec la copie)**.
3. Soit K le point de coordonnées $\left(\frac{5}{6}\ ;\ -\frac{1}{6}\ ;\ 0\right)$.

   Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze AUVE.

Partie B

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère AUVE est $\frac{5\sqrt{43}}{18}$.

1. On admet que le point U a pour coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ 1\right)$.

   Vérifier que le plan (EAU) a pour équation $3x-3y+5z-3=0$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EAU) passant par le point S.
3. Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU).
4. Le plan (EAU) partage la pyramide (SABCE) en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?*

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x_0 & = & -3 \\ y_0 & = & 4 \end{array}\right. \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 0,8x_n-0,6y_n \\ y_{n+1} & = & 0,6x_n+0,8y_n \end{array}\right.$$

1. **a.** Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2.

b. Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

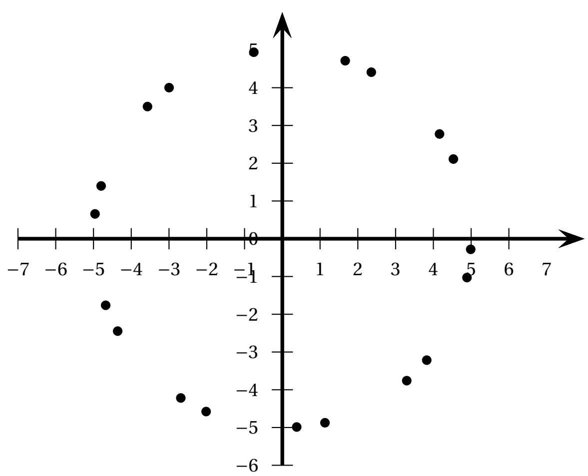
```
Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur −3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
        Construire le point de coordonnées (x ; y)
        t prend la valeur x
        x prend la valeur ....
        y prend la valeur ....
Fin Pour
```

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.

c. À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



Identifier les points A_0, A_1 et A_2. On les nommera sur la figure jointe en **annexe 2, (à rendre avec la copie)**.
Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel?

2. Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel.
Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + \text{i}y_n$ l'affixe du point A_n.

a. Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat?

b. On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos(\theta) = 0,8$ et $\sin(\theta) = 0,6$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, $\text{e}^{\text{i}\theta} z_n = z_{n+1}$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = \text{e}^{\text{i}n\theta} z_0$.

d. Montrer que $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0.

e. Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n.
Représenter θ sur la figure jointe en **annexe 2, (à rendre avec la copie).**
Expliquer, pour tout entier naturel n, comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.*

Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Déterminer la matrice M^2. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.

2. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.

3. En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \dfrac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right)$.

Partie B Étude d'un cas particulier

On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A(1 ; 1), B(−1 ; −1) et C(2 ; 5).

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que

$$M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

Partie C Retour au cas général

Les nombres a, b, c, p, q, r sont des entiers.
Dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A(1 ; p), B(−1 ; q) et C(2 ; r).
On cherche des valeurs de p, q et r pour qu'il existe une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par A, B et C.

1. Démontrer que si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ avec a, b et c entiers, alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} -3p + q + 2r & \equiv & 0\,[6] \\ 3p - 3q & \equiv & 0\,[6] \\ 6p + 2q - 2r & \equiv & 0\,[6] \end{array}\right.$$

2. En déduire que $\left\{\begin{array}{lcl} q - r & \equiv & 0\,[3] \\ p - q & \equiv & 0\,[2] \end{array}\right.$.

3. Réciproquement, on admet que si $\left\{\begin{array}{lcl} q - r & \equiv & 0\,[3] \\ p - q & \equiv & 0\,[2] \\ \multicolumn{3}{l}{\text{A, B, C ne sont pas alignés}} \end{array}\right.$

alors il existe trois entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.

a. Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $2r + q - 3p = 0$.

b. On choisit $p = 7$. Déterminer des entiers q, r, a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.*

Exercice 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.

Partie A Contrôle avant la mise sur le marché

Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Elle est donc mise sur le marché si sa masse est comprise entre 98 et 102 grammes.
La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de σ.

1. Calculer la probabilité de l'évènement M : « la tablette est mise sur le marché ».

2. On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet évènement atteigne 0,97.
Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'évènement « la tablette est mise sur le marché » soit égale à 0,97.

Partie B Contrôle à la réception

Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7 %. On dit alors que la fève est conforme.
L'entreprise a trois fournisseurs différents :
le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième 30 % et le dernier apporte 20 % du stock.
Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux d'humidité; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de fèves non conformes.
On choisit au hasard une fève dans le stock reçu. On note F_i l'évènement « la fève provient du fournisseur i », pour i prenant les valeurs 1, 2 ou 3, et C l'évènement « la fève est conforme ».

1. Déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme. Le résultat sera arrondi à 10^{-2}.
2. Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion de fèves non conformes, L'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % de fèves qu'elle achète soient conformes.
   Quelle proportion p de fèves doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif?*

Exercice 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C

Soit $\mathcal{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

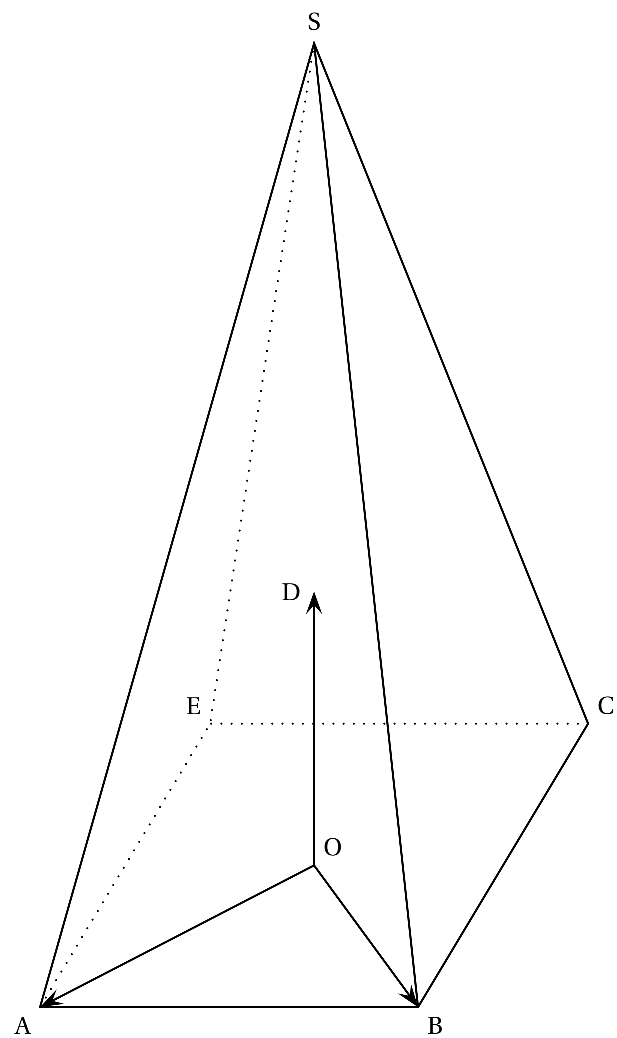
1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.
   En déduire que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.
2. On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

   $$H(x) = \frac{1}{2}[\ln(x)]^2$$

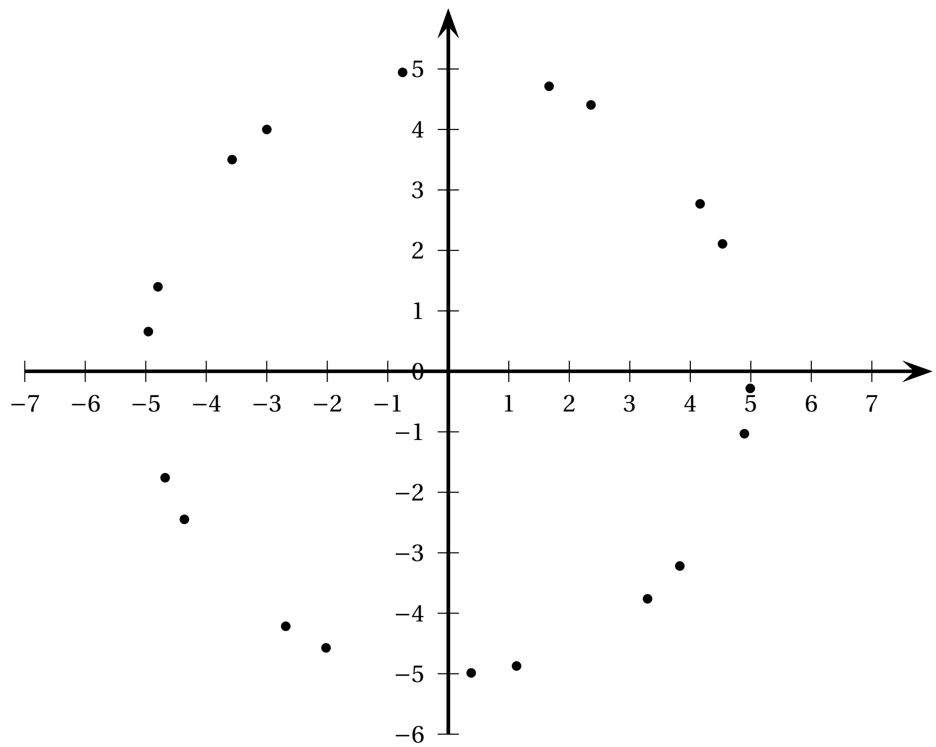
   est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par
   $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
   Calculer $I = \displaystyle\int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.*

Annexe

Annexe 1 (Exercice 1)



Annexe 2 (Exercice 2)



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Centres étrangers ∾ 10 juin 2015

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont *premier prix*, et les autres sont *haut de gamme*. Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

Partie A

1. Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas *haut de gamme*, il n'y a pas plus de 3 % de cadenas défectueux dans sa production. Le responsable du magasin de bricolage désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock ; à cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *haut de gamme*, et en trouve 19 qui sont défectueux.

   Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux ?
   On pourra pour cela utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.
2. Le responsable du magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas *premier prix*. Pour cela il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *premier prix*, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux.

   Donner un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95 %.

Partie B

D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre X de cadenas *premier prix* vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

1. Calculer $P(725 \leqslant X \leqslant 775)$.
2. Le responsable du magasin veut connaître le nombre n de cadenas *premier prix* qu'il doit avoir en stock en début de mois, pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0,05. *On ne réalimente pas le stock en cours de mois.*

   Déterminer la plus petite valeur de l'entier n remplissant cette condition.

Partie C

On admet maintenant que, dans le magasin :

- 80 % des cadenas proposés à la vente sont *premier prix*, les autres *haut de gamme* ;
- 3 % des cadenas *haut de gamme* sont défectueux ;
- 7 % des cadenas sont défectueux.

On prélève au hasard un cadenas dans le magasin. On note :

- p la probabilité qu'un cadenas *premier prix* soit défectueux ;
- H l'évènement : « le cadenas prélevé est *haut de gamme* » ;
- D l'évènement : « le cadenas prélevé est défectueux ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Exprimer en fonction de p la probabilité $P(D)$. En déduire la valeur du réel p.
   Le résultat obtenu est-il cohérent avec celui de la question A - 2. ?
3. Le cadenas prélevé est en bon état. Déterminer la probabilité que ce soit un cadenas *haut de gamme*.*

Exercice 2 **4 points**

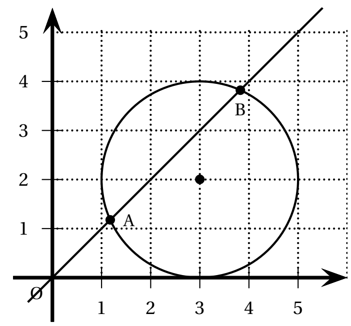
Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les deux conditions :

$$|z-1| = |z-\mathrm{i}| \quad \text{et} \quad |z-3-2\mathrm{i}| \leqslant 2.$$

Sur la figure ci-contre, on a représenté le cercle de centre le point de coordonnées $(3\,;\,2)$ et de rayon 2, et la droite d'équation $y = x$.
Cette droite coupe le cercle en deux points A et B.



Affirmation 1 : l'ensemble S est le segment [AB].
2. Affirmation 2 : le nombre complexe $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{1515}$ est un réel.

Pour les questions 3 *et* 4*, on considère les points* E(2; 1; - 3), F(1 ; −1 ; 2) *et* G(−1 ; 3 ; 1) *dont les coordonnées sont définies dans un repère orthonormé de l'espace.*
3. Affirmation 3 : une représentation paramétrique de la droite (EF) est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{l c r}x &=& 2t\\ y &=& -3+4t, \quad t \in \mathbb{R}.\\ z &=& 7-10t\end{array}\right.$$

4. Affirmation 4 : une mesure en degré de l'angle géométrique $\widehat{\text{FEG}}$, arrondie au degré, est 50°.*

Exercice 3 **7 points**

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel fixé non nul.
Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}\left(\mathrm{e}^{u_n} - 1\right)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - x.$$

   a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\left(2\mathrm{e}^x + 1\right)$.
   b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
   c. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g\left(u_n\right)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.
   a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.
   b. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
   c. Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
   La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.
   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.
L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur $0,02$ n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que … … … Fin tant que
Sortie	Afficher n

a. Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.*

Exercice 4 5 points

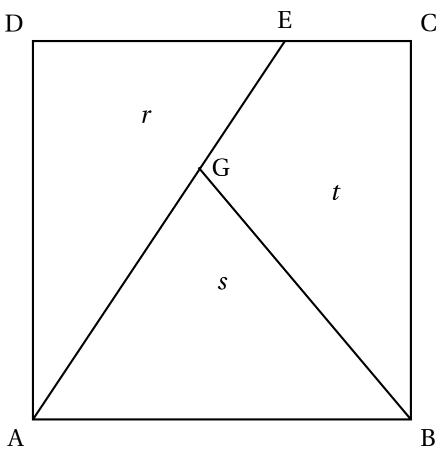
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

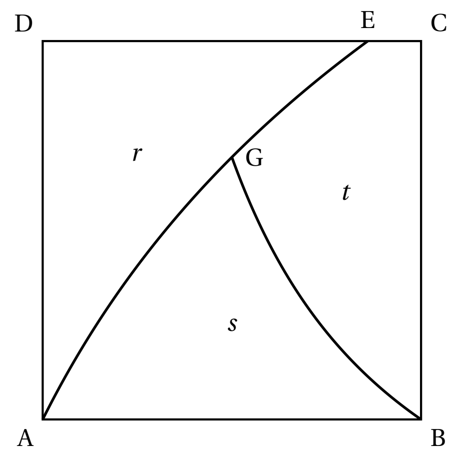
Le fabricant de cadenas de la marque « K » désire imprimer un logo pour son entreprise.
Ce logo a la forme d'une lettre majuscule K stylisée, inscrite dans un carré ABCD, de côté une unité de longueur, et respectant les conditions C1 et C2 suivantes :

- Condition C1 : la lettre K doit être constituée de trois lignes :
  - une des lignes est le segment [AD] ;
  - une deuxième ligne a pour extrémités le point A et un point E du segment [DC] ;
  - la troisième ligne a pour extrémité le point B et un point G situé sur la deuxième ligne.
- Condition C2 : l'aire de chacune des trois surfaces délimitées par les trois lignes dessinées dans le carré doit être comprise entre $0,3$ et $0,4$, l'unité d'aire étant celle du carré. Ces aires sont notées r, s, t sur les figures ci-après.

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right)$.

Partie A : étude de la proposition A

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = \dfrac{1}{3}$.

Déterminer les coordonnées des points E et G.

Partie B : étude de la proposition B

Cette proposition est caractérisée par les deux modalités suivantes :

- la ligne d'extrémités A et E est une portion de la représentation graphique de la fonction f définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par : $f(x) = \ln(2x+1)$;
- la ligne d'extrémités B et G est une portion de la représentation graphique de la fonction g définie pour tout réel $x > 0$ par : $g(x) = k\left(\dfrac{1-x}{x}\right)$, où k est un réel positif qui sera déterminé.

1. **a.** Déterminer l'abscisse du point E.

   b. Déterminer la valeur du réel k, sachant que l'abscisse du point G est égale à 0,5.
2. **a.** Démontrer que la fonction f admet pour primitive la fonction F définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par :

$$F(x) = (x+0,5) \times \ln(2x+1) - x.$$

   b. Démontrer que $r = \dfrac{\mathrm{e}}{2} - 1$.
3. Déterminer une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $]0~:~+\infty[$.
4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que
   $s = [\ln(2)]^2 + \dfrac{\ln(2)-1}{2}$.
   La proposition B remplit-elle les conditions imposées par le fabricant ?*

Exercice 4 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls $(x,~y,~z)$ tels que

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Ces triplets seront nommés « triplets pythagoriciens » en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et notés en abrégé « TP ».
Ainsi (3, 4, 5) est un TP car $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

Partie A : généralités

1. Démontrer que, si $(x,~y,~z)$ est un TP, et p un entier naturel non nul, alors le triplet $(px,~py,~pz)$ est lui aussi un TP.
2. Démontrer que, si $(x,~y,~z)$ est un TP, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.
3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair :
   $n = 2^\alpha \times k$ où α est un entier naturel (éventuellement nul) et k un entier naturel impair.
   L'écriture $n = 2^\alpha \times k$ est nommée *décomposition* de n.
   Voici par exemple les *décompositions* des entiers 9 et 120 : $9 = 2^0 \times 9$,
   $120 = 2^3 \times 15$.

   a. Donner la décomposition de l'entier 192.

   b. Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont $x = 2^\alpha \times k$ et $z = 2^\beta \times m$.
   Écrire la *décomposition* des entiers naturels $2x^2$ et z^2.

   c. En examinant l'exposant de 2 dans la *décomposition* de $2x^2$ et dans celle de z^2, montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x,~z)$ tels que $2x^2 = z^2$.

   On admet que la question **A - 3.** permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels x, y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP $(x,~y,~z)$, les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant :

$$x < y < z.$$

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 2 015 puis, en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x,\ y,\ 2015)$.
2. On admet que, pour tout entier naturel n,
   $(2n+1)^2+\left(2n^2+2n\right)^2=\left(2n^2+2n+1\right)^2$.
   Déterminer un TP de la forme $(2015,\ y,\ z)$.
3. **a.** En remarquant que $403^2 = 169 \times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que : $z^2 - x^2 = 403^2$, avec $x < 403$.

   b. En déduire un TP de la forme $(x,\ 2015,\ z)$.*

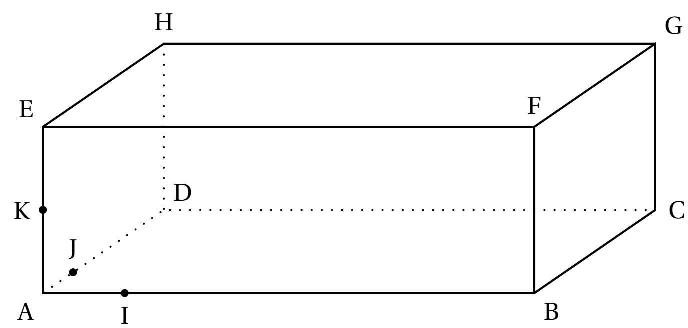
∽ Baccalauréat S Polynésie ∾
12 juin 2015

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, pour lequel AB = 6, AD = 4 et AE = 2.

I, J et K sont les points tels que $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$.



On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AI}},\,\overrightarrow{\mathrm{AJ}},\,\overrightarrow{\mathrm{AK}}\right)$.

1. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\2\\-9\end{pmatrix}$ est normal au plan (IJG).
2. Déterminer une équation du plan (IJG).
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).
4. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJG). Ce tracé sera réalisé sur la figure donnée en **annexe à rendre avec la copie)**. On ne demande pas de justification.*

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
   Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.
2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.
   Montrer que OAB est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathscr{E}$.*

EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans un pays, la taille en centimètres des femmes de 18 à 65 ans peut être modélisée par une variable aléatoire X_1 suivant la loi normale d'espérance $\mu_1 = 165$ cm et d'écart-type$\sigma_1 = 6$ cm, et celle des hommes de 18 à 65 ans, par une variable aléatoire X_2 suivant la loi normale d'espérance $\mu_2 = 175$ cm et d'écart-type $\sigma_2 = 11$ cm.

Dans cet exercice tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

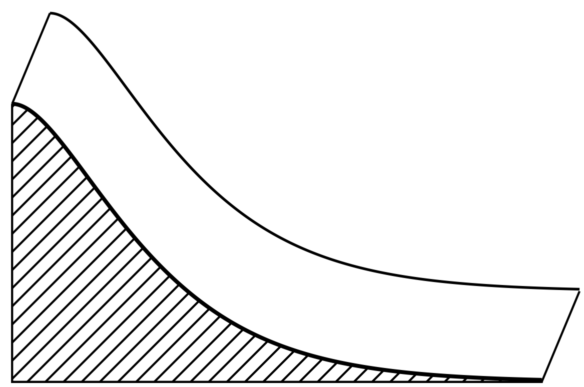
1. Quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce pays mesure entre 1,53 mètre et 1,77 mètre ?
2. **a.** Déterminer la probabilité qu'un homme choisi au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre.

   b. De plus, on sait que dans ce pays les femmes représentent 52 % de la population des personnes dont l'âge est compris entre 18 et 65 ans. On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans. Elle mesure plus de 1,70 m. Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?*

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.
Voici ce schéma :

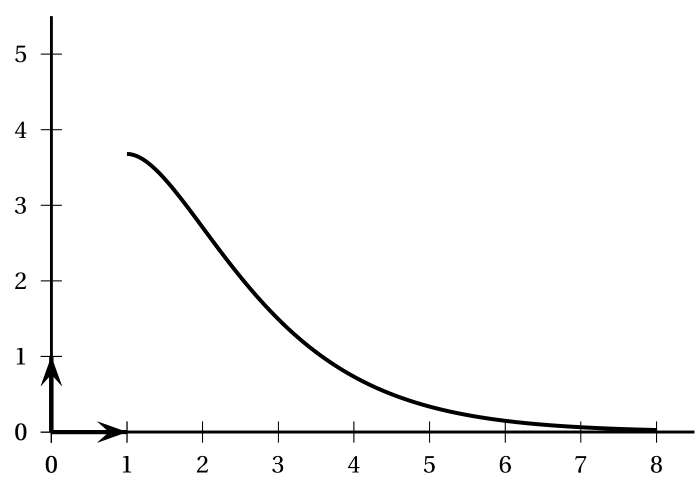


Partie A Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 8]$ par

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux entiers naturels.}$$

La courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.
   Déterminer la valeur de l'entier b.
2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut.
   Déterminer la valeur de l'entier a.

Partie B Un aménagement pour les visiteurs

On admet dans la suite que la fonction f introduite dans la partie A est définie pour tout réel $x \in [1~;~8]$ par

$$f(x) = 10x\mathrm{e}^{-x}.$$

Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en début d'exercice. Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

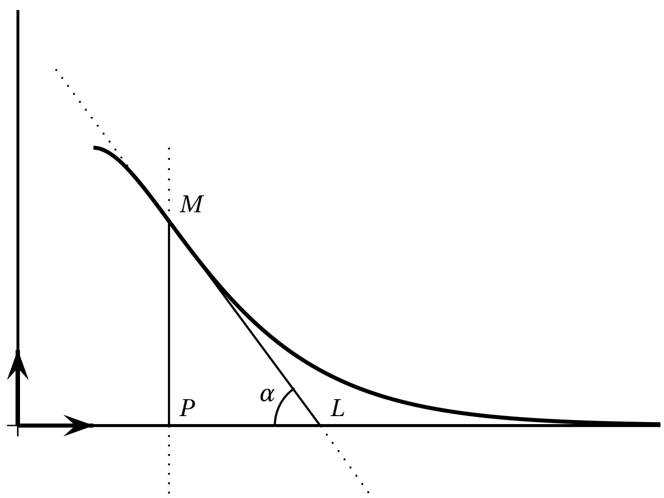
1. Soit g la fonction définie sur $[1\,;\,8]$ par

$$g(x) = 10(-x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

   Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.
2. Quel est le montant du devis de l'artiste ?

Partie C Une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.
On considère un point M de la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.
La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,8]$. On admet que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,8]$, $f'(x) = 10(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1\,;\,8]$.
2. Soit x un réel de l'intervalle $]1\,;\,8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}$. Justifier que $\tan\alpha = \left|f'(x)\right|$.
3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?*

EXERCICE 5 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Soit (v_n) la suite définie par

$$v_1 = \ln(2) \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } v_{n+1} = \ln\left(2-\mathrm{e}^{-v_n}\right).$$

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul.
On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel n non nul par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (S_n).

Partie A – Conjectures à l'aide d'un algorithme

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur :

Variables :	n, k entiers
	S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n
	v prend la valeur ...
	S prend la valeur ...
Traitement :	Pour k variant de ... à ... faire
	... prend la valeur ...
	... prend la valeur ...
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2. À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
S_n	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n).

Partie B – Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$.

1. Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.
2. Calculer u_2, u_3 et u_4. Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Partie C – Étude de (Sn)

1. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n, puis v_n en fonction de n.
2. Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.
3. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (S_n).*

EXERCICE 5 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. On appelle I la matrice identité d'ordre 2.
Vérifier que $A^2 = A + 2I$.
2. En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme
$\alpha A + \beta I$ où α et β sont des réels.
3. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\left\{\begin{array}{lcl} r_{n+1} & = & r_n + s_n \\ s_{n+1} & = & 2r_n \end{array}\right.$$

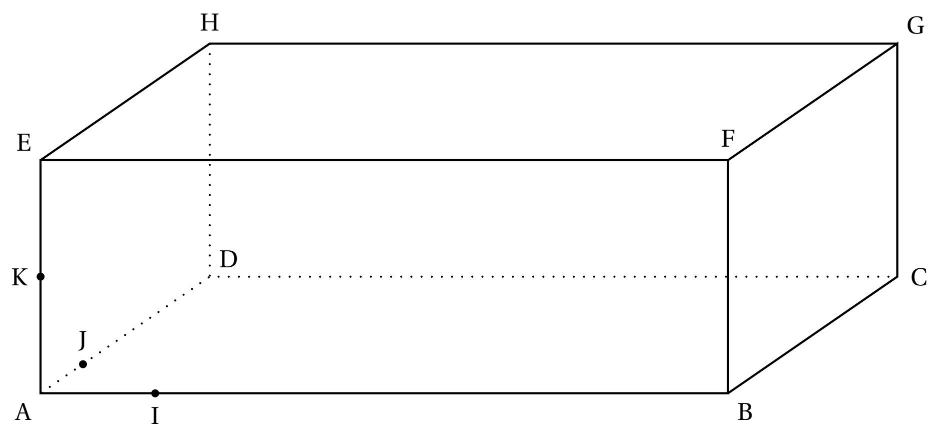
Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = r_n A + s_n I$.
4. Démontrer que la suite (k_n) définie pour tout entier naturel n par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison -1.
En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de k_n en fonction de n.

5. On admet que la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par
$t_n = r_n + \dfrac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison 2.
En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de t_n en fonction de n.
6. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n.
7. En déduire alors, pour tout entier naturel n, une expression des coefficients de la matrice A^n.*

Annexe

À rendre avec la copie

EXERCICE 1



∽ Baccalauréat S Asie 16 juin 2015 ∾

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes. Les probabilités seront arrondies au millième.

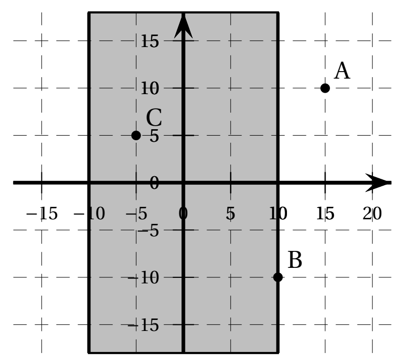
Partie A

Un concurrent participe à un concours de tir à l'arc, sur une cible circulaire. À chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est égale à 0,8.

1. Le concurrent tire quatre flèches. On considère que les tirs sont indépendants. Déterminer la probabilité qu'il atteigne au moins trois fois la cible.
2. Combien de flèches le concurrent doit-il prévoir pour atteindre en moyenne la cible douze fois ?

Partie B

Entre deux phases du concours, pour se perfectionner, le concurrent travaille sa précision latérale sur une autre cible d'entraînement, représentée ci-contre. Pour cela, il tire des flèches pour essayer d'atteindre une bande verticale, de largeur 20 cm (en grisé sur la figure), le plus près possible de la ligne verticale centrale.
On munit le plan contenant la bande verticale d'un repère : la ligne centrale visée est l'axe des ordonnées.
On note X la variable aléatoire qui, à toute flèche tirée atteignant ce plan, associe l'abscisse de son point d'impact.



Ainsi, par exemple :
- si la flèche atteint le point A, le tireur a raté la bande, et X prend la valeur 15 ;
- si elle atteint le point B, l'impact est à la limite de la bande, et X prend la valeur 10 ;
- si elle atteint le point C, l'impact est dans la bande et X prend la valeur -5.

On suppose que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 10.

1. Lorsque la flèche atteint le plan, déterminer la probabilité que son point d'impact soit situé hors de la bande grisée.
2. Comment modifier les bords de la bande grisée pour faire en sorte que, lorsque la flèche atteint le plan, son point d'impact soit situé à l'intérieur de la bande avec une probabilité égale à 0,6 ?

Partie C

La durée de vie (exprimée en heures) du panneau électrique affichant le score des concurrents est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$ (exprimé en h^{-1}).

1. Quelle est la probabilité que le panneau fonctionne au moins pendant 2 000 heures ?
2. *Restitution organisée des connaissances*
Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.
On rappelle que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, est définie par : $\mathrm{E}(T) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.
   a. On considère la fonction F, définie pour tout réel t par : $F(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   Démontrer que la fonction F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie pour tout réel t par : $f(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   b. En déduire que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.
   Quelle est l'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents ?*

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Dans les questions 1 et 2, on munit l'espace d'un repère orthonormé, et on considère les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives $x+y+z-5=0$ et $7x-2y+z-2=0$.

1. **Affirmation 1 :** les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.
2. **Affirmation 2 :** les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ se coupent suivant la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l c r}x &=& t\\ y &=& 2t+1,\\ z &=& -3t+4\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}.$$

3. Un joueur de jeux vidéo en ligne adopte toujours la même stratégie. Sur les 312 premières parties jouées, il en gagne 223. On assimile les parties jouées à un échantillon aléatoire de taille 312 dans l'ensemble des parties.

   On souhaite estimer la proportion de parties que va gagner le joueur, sur les prochaines parties qu'il jouera, tout en conservant la même stratégie.

   Affirmation 3 : au niveau de confiance de 95 %, la proportion de parties gagnées doit appartenir à l'intervalle $[0{,}658\,;\,0{,}771]$.
4. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES	a, b sont deux nombres réels tels que $a<b$ x est un nombre réel f est une fonction définie sur l'intervalle $[a\,;\,b]$

TRAITEMENT	Lire a et b
	Tant que $b-a>0,3$
	    x prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
	    Si $f(x)f(a)>0$, alors a prend la valeur x
	            sinon b prend la valeur x
	    Fin Si
	Fin Tant que
	Afficher $\dfrac{a+b}{2}$

   Affirmation 4 : si l'on entre $a=1$, $b=2$ et $f(x)=x^2-3$, alors l'algorithme affiche en sortie le nombre 1,687 5.*

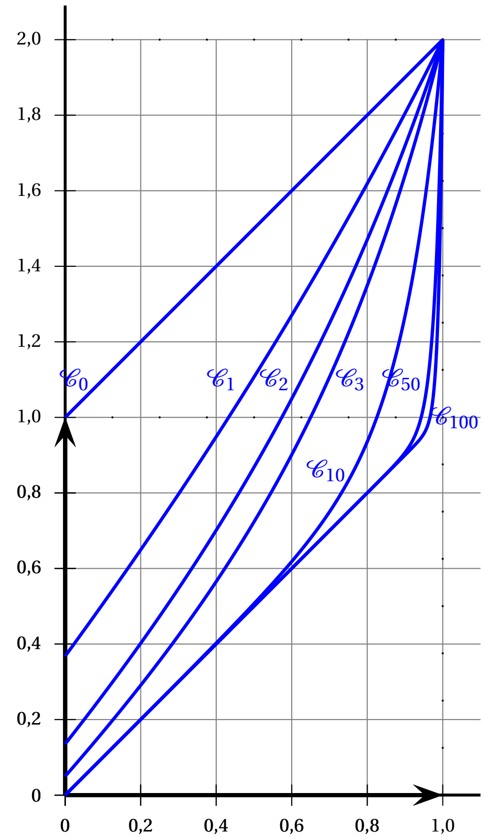
Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{n(x-1)}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Quelques-unes des courbes $\mathscr{C}_n$ sont représentées ci-contre.



Partie A : généralités sur les fonctions f_n

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
2. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_n$ ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.
3. À l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes $\mathscr{C}_n$ pour les grandes valeurs de n ?

   Démontrer cette conjecture.

Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0\,;\,1]$. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = f_n(x)$.

1. Dans cette question, on suppose que $x = 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).
2. Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant x < 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie C : aire sous les courbes $\mathscr{C}_n$

Pour tout entier naturel n, on note A_n l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
À partir des représentations graphiques, conjecturer la limite de la suite (A_n) lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, puis démontrer cette conjecture.*

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

   b. Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.

3. Démontrer les égalités suivantes :

a. $j^3 = 1$;

b. $j^2 = -1 - j$.

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = j(c - b)$.

2. En déduire que AC = BC .

3. Démontrer l'égalité : $a - b = j^2(b - c)$.

4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.*

Exercice 4 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que : $N = 1 + 2 + \ldots + n$.
Par exemple, 10 est un nombre triangulaire car $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.
Le but de ce problème est de déterminer des nombres triangulaires qui sont les carrés d'un entier.

On rappelle que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Partie A : nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. Montrer que 36 est un nombre triangulaire, et qu'il est aussi le carré d'un entier.

2. a. Montrer que le nombre $1 + 2 + \ldots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $n^2 + n - 2p^2 = 0$.

b. En déduire que le nombre $1 + 2 + \ldots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $(2n + 1)^2 - 8p^2 = 1$.

Partie B : étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne

$$x^2 - 8y^2 = 1,$$

où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solution de (E).

2. Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x ; y)$ est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

Partie C : lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

2. Déterminer la matrice A^{-1}, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.

3. Démontrer que $(x ; y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x' ; y')$ est solution de (E).

4. On considère les suites (x_n) et $\left(y_n\right)$ définies par $x_0 = 3,\ y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$. On admet que, ainsi définis, les nombres x_n et y_n sont des entiers naturels pour toute valeur de l'entier n.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ est solution de (E).

Partie D : retour au problème initial

À l'aide des parties précédentes, déterminer un nombre triangulaire supérieur à 2 015 qui est le carré d'un entier.*

Baccalauréat S Antilles-Guyane 22 juin 2015

EXERCICE 1 **6 POINTS**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln x$.
Pour tout réel a strictement positif, on définit sur $]0\,;\,+\infty[$ la fonction g_a par
$g_a(x) = ax^2$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et Γ_a celle de la fonction g_a dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a.

Partie A

On a construit en **annexe 1** (*à rendre avec la copie*) les courbes $\mathscr{C}$, $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.

1. Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.
2. Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a.

Partie B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$h_a(x) = \ln x - ax^2.$$

1. Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a si et seulement si $h_a(x) = 0$.
2. **a.** On admet que la fonction h_a est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, et on note h'_a la dérivée de la fonction h_a sur cet intervalle.
   Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-dessous.
   Justifier, par le calcul, le signe de $h'_a(x)$ pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$h'_a(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h_a(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{-1-\ln(2a)}{2}$	↘	

   b. Rappeler la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. En déduire la limite de la fonction h_a en $+\infty$.
   On ne demande pas de justifier la limite de h_a en 0.
3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que
   $a = 0,1$.
   a. Justifier que, dans l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$, l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet une unique solution.
   On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{0,2}}\,;\,+\infty\right[$.
   b. Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{0,1}$?
4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que
   $a = \frac{1}{2\mathrm{e}}$.
   a. Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$.
   b. En déduire le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$. Justifier.
5. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection ?
   Justifier.*

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B

Partie A

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
On rappelle que, pour tout réel a strictement positif,

$$P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, et définie par

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\left(t + \dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que

$$\int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1\right).$$

2. En déduire que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

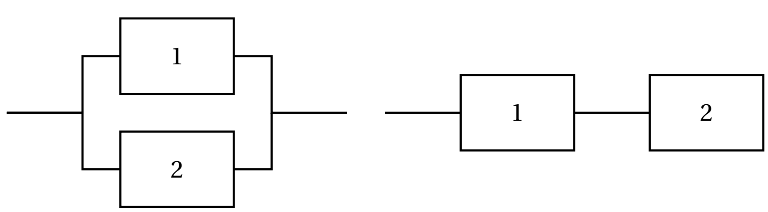
Partie B

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe 2**.

1. Sur le graphique de l'annexe 2 (à rendre avec la copie) :
   a. Représenter la probabilité $P(X \leqslant 1)$.
   b. Indiquer où se lit directement la valeur de λ.
2. On suppose que $E(X) = 2$.
   a. Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?
   b. Calculer la valeur de λ.
   c. Calculer $P(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près.
   Interpréter ce résultat.
   d. Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux évènements D_1 et D_2 sont indépendants et que
$P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.*

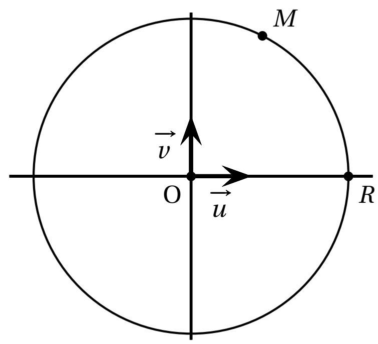
EXERCICE 3 **4 POINTS**

Commun à tous les candidats

Partie A

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ on a placé un point M d'affixe z appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe $\left[\text{O}\,;\,\vec{u}\right)$.



1. Exprimer l'affixe du point R en fonction de z.
2. Soit le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z + |z|}{2}\right).$$

Reproduire la figure sur la copie et construire le point M'.

Partie B

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0.

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif?
2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif?
3. On suppose désormais que z_0n'est pas un nombre réel.
   - **a.** Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?
   - **b.** Démontrer cette conjecture, puis conclure.*

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5
	Pour k variant de 1 à p
	Affecter à u la valeur $0,5u+0,5(k-1)-1,5$
	Fin de pour
Sortie :	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour $p=2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0=5$ et, pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1}=0,5u_n+0,5n-1,5.$$

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.
2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p=4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	$-0,5$	$-0,75$	$-0,375$

   Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ?
   Justifier.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1}>u_n$.
   Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n=0,1u_n-0,1n+0,5$.
   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.
5. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n=10\times 0,5^n+n-5.$$

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).*

EXERCICE 4 **5 POINTS**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

Pour deux entiers naturels non nuls a et b, on note $r(a,\ b)$ le reste dans la division euclidienne de a par b.
On considère l'algorithme suivant :

Variables :	c est un entier naturel
	a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrées :	Demander a
	Demander b
Traitement :	Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	Tant que $c\neq 0$
	Affecter à a le nombre b
	Affecter à b la valeur de c
	Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher b

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a=26$ et $b=9$ en indiquant les valeurs de a, b et c à chaque étape.

2. Cet algorithme donne en sortie le PGCD des entiers naturels non nuls a et b.
Le modifier pour qu'il indique si deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux ou non.

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :
Étape 1 : on choisit deux entiers naturels p et q compris entre 0 et 25.
Étape 2 : à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus.
Étape 3 : on calcule l'entier x' défini par les relations

$$x' \equiv px+q \quad [26] \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x' \leqslant 25.$$

Étape 4 : à l'entier x', on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Dans cette question, on choisit $p=9$ et $q=2$.

a. Démontrer que la lettre V est codée par la lettre J.

b. Citer le théorème qui permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9u+26v=1$. Donner sans justifier un couple $(u,\ v)$ qui convient.

c. Démontrer que $x' \equiv 9x+2 \quad [26]$ équivaut à $x \equiv 3x'+20 \quad [26]$.

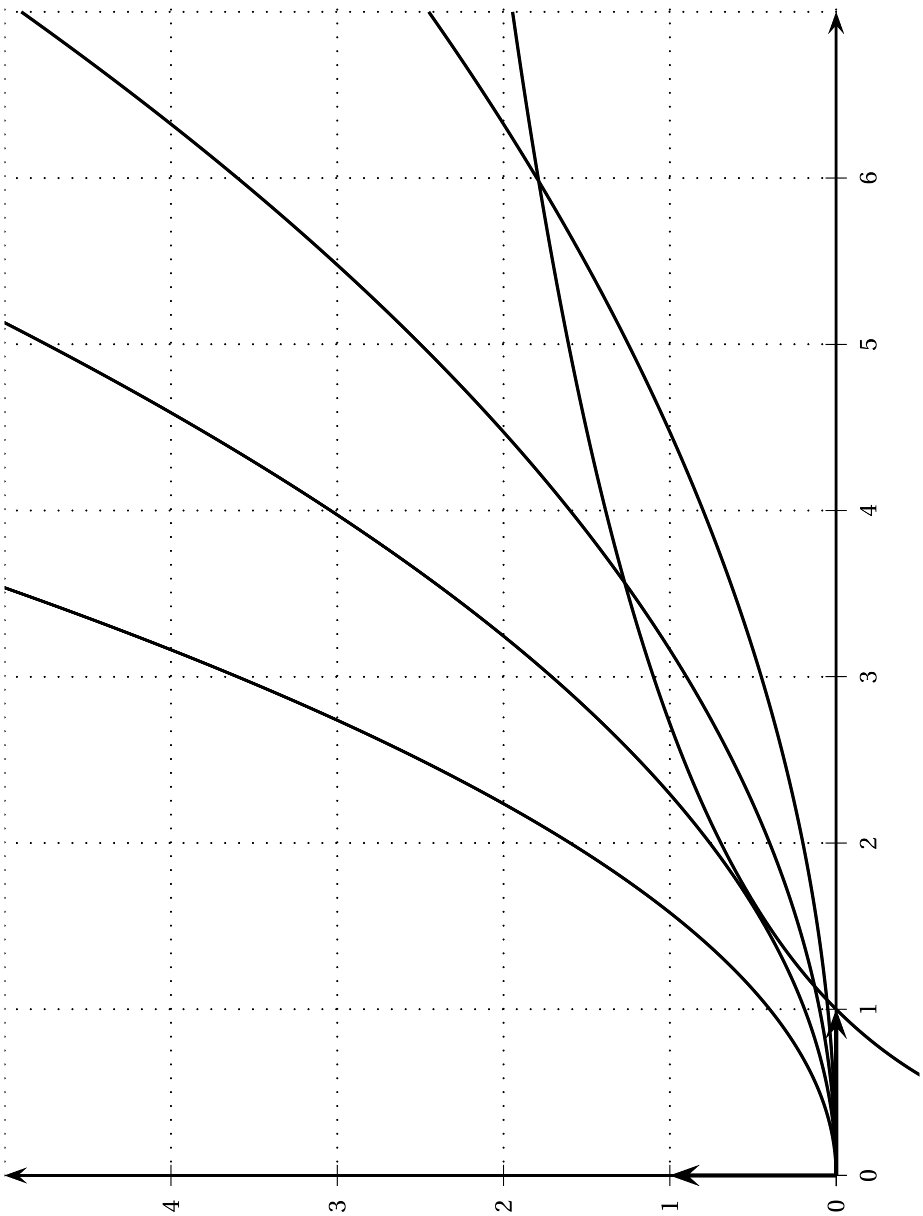
d. Décoder la lettre R.

2. Dans cette question, on choisit $q=2$ et p est inconnu. On sait que J est codé par D.
Déterminer la valeur de p (on admettra que p est unique).

3. Dans cette question, on choisit $p=13$ et $q=2$. Coder les lettres B et D. Que peut-on dire de ce codage ?*

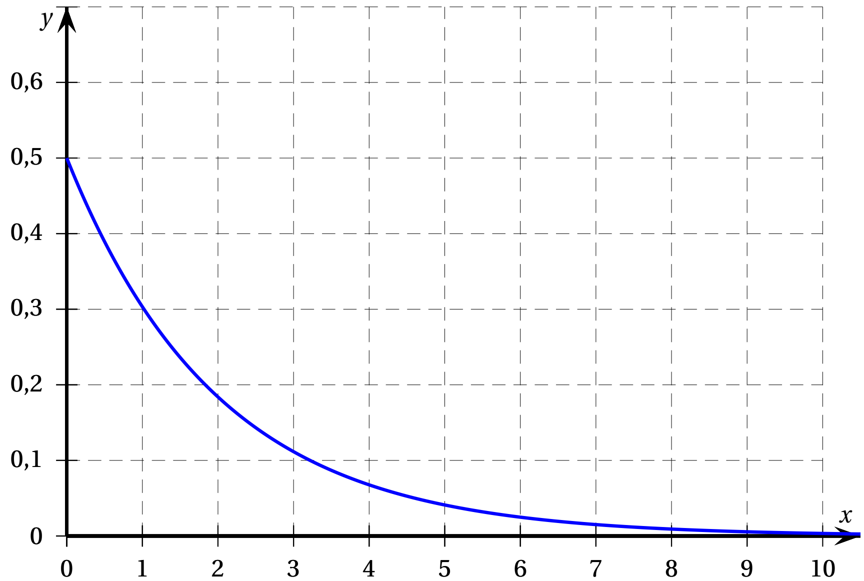
À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 1 de l'exercice 1



À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 2 de l'exercice 2



Baccalauréat S Métropole 22 juin 2015

EXERCICE 1 **6 POINTS**
Commun à tous les candidats

Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} *près.*

Partie 1

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif donné.
   On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

   a. Soit c et d deux réels tels que $0 \leqslant c < d$.
   Démontrer que la probabilité $P(c \leqslant X \leqslant d)$ vérifie
   $P(c \leqslant X \leqslant d) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$.

   b. Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X > 20)$ soit égale à 0,05.

   c. Donner l'espérance de la variable aléatoire X

   Dans la suite de l'exercice on prend $\boldsymbol{\lambda = 0,15}$.

   d. Calculer $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$.

   e. Calculer la probabilité de l'évènement $(X > 18)$.

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type $1,95$.

   a. Calculer la probabilité de l'évènement $(20 \leqslant Y \leqslant 21)$.

   b. Calculer la probabilité de l'évènement $(Y < 11) \cup (Y > 21)$.

Partie 2

Une chaîne de magasins souhaite fidéliser ses clients en offrant des bons d'achat à ses clients privilégiés. Chacun d'eux reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant.
Les bons d'achats sont distribués de façon à avoir, dans chaque magasin, un quart de bons rouges et trois quarts de bons verts.
Les bons d'achat verts prennent la valeur de 30 euros avec une probabilité égale à $0,067$ ou des valeurs comprises entre 0 et 15 euros avec des probabilités non précisées ici.
De façon analogue, les bons d'achat rouges prennent les valeurs 30 ou 100 euros avec des probabilités respectivement égales à $0,015$ et $0,010$ ou des valeurs comprises entre 10 et 20 euros avec des probabilités non précisées ici.

1. Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.
2. Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut $0,057$.

   Pour la question suivante, on utilise cette valeur.
3. Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 €.

   Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achats dans les différents magasins de la chaîne.
   Ses doutes sont-ils justifiés ?*

EXERCICE 2 **3 POINTS**
Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A$(0\ ;\ -1\ ;\ 5)$,
B$(2\ ;\ -1\ ;\ 5)$, C$(11\ ;\ 0\ ;\ 1)$, D$(11\ ;\ 4\ ;\ 4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.
Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.

On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées : $M_t(t\,;\,-1\,;\,5)$ et
$N_t(11\,;\,0,8t\,;\,1+0,6t)$.

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

1. **a.** La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?
   b. La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathscr{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathscr{P}$.
   c. Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathscr{P}$, coupe ce plan au point E$(11\,;\,-1\,;\,5)$.
   d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?
2. **a.** Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.
   b. À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?*

EXERCICE 3 **5 POINTS**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4\text{i}\sqrt{3}$, $b = 4 - 4\text{i}\sqrt{3}$ et $c = 8\text{i}$.
   a. Calculer le module et un argument du nombre a.
   b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b.
   c. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle ce de centre O dont on déterminera le rayon.
   d. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

   Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question **2. d.** complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.
3. On considère les points A$'$, B$'$ et C$'$ d'affixes respectives $a' = a\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.
   a. Montrer que $b' = 8$.
   b. Calculer le module et un argument du nombre a'.

   Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4\text{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4\text{i}$.
4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.
   a. On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A$'$B], [B$'$C] et [C$'$A]. Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + \text{i}\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.
   b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.*

EXERCICE 3 **5 POINTS**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}$:

$$7x - 5y = 1.$$

   a. Vérifier que le couple $(3\,;\,4)$ est solution de (E).
   b. Montrer que le couple d'entiers $(x\,;\,y)$ est solution de (E) si et seulement si $7(x-3) = 5(y-4)$.

c. Montrer que les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 5k+3 \\ y &=& 7k+4 \end{array}\right. \text{où } k \in \mathbb{Z}.$$

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. Sachant que $7x - 5y = 1$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?

Dans la suite, on supposera qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts.

3. On considère la marche aléatoire suivante d'un pion sur un triangle ABC. À chaque étape, on tire au hasard un des jetons parmi les 25, puis on le remet dans la boîte.

- Lorsqu'on est en A :

Si le jeton tiré est rouge, le pion va en B. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en A.

- Lorsqu'on est en B :

Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en B.

- Lorsqu'on est en C :

Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en B. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en C.

Au départ, le pion est sur le sommet A.

Pour tout entier naturel n, on note a_n, b_n et c_n les probabilités que le pion soit respectivement sur les sommets A, B et C à l'étape n.

On note X_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ et T la matrice $\begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}$.

Donner la matrice ligne X_0 et montrer que, pour tout entier naturel n,
$X_{n+1} = X_n T$.

4. On admet que $T = PDP^{-1}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{37}{110} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}$.

a. À l'aide de la calculatrice, donner les coefficients de la matrice P. On pourra remarquer qu'ils sont entiers.

b. Montrer que $T^n = PD^nP^{-1}$.

c. Donner sans justification les coefficients de la matrice D^n.

On note α_n, β_n, γ_n les coefficients de la première ligne de la matrice T^n ainsi :

$$T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

On admet que $\alpha_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0,6^n$ et $\beta_n = \dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$.

On ne cherchera pas à calculer les coefficients de la deuxième ligne ni ceux de la troisième ligne.

5. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0 T^n$.

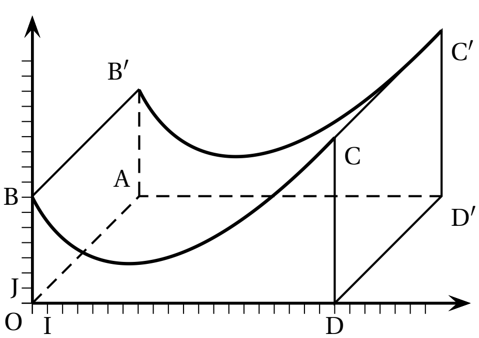
a. Déterminer les nombres a_n, b_n, à l'aide des coefficients α_n et β_n. En déduire c_n.

b. Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

c. Sur quel sommet a-t-on le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations de cette marche aléatoire ?*

EXERCICE 4 **6 POINTS**

Commun à tous les candidats



Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.
Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères OAD′D, DD′C′C, et OAB′B sont des rectangles.
Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, DD′ = 10, sa longueur OD est de 20 mètres.

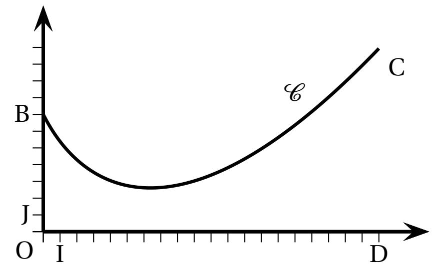
Le but dit problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J).

Partie 1



1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,20]$, on a $f'(x) = \ln(x+1) - 2$.
2. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ et dresser son tableau de variation.
3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.
Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,20]$.

Partie 2

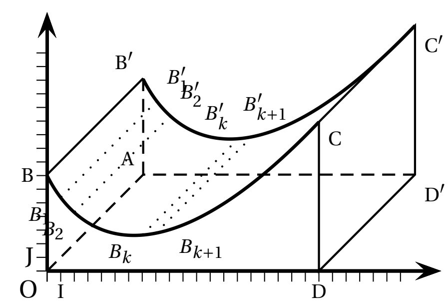
Les trois questions de cette partie sont indépendantes

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes? Justifier les réponses.

   P_1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.

   P_2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

2. On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre.
   Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.



3. On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.
Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k\,;\,f(k))$ pour k variant de 0 à 20.
Ainsi, $B_0 = \text{B}$.

On décide d'approcher l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_kB_{k+1}]$.
Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_kB_{k+1}B'_{k+1}B'_k$ (voir figure).

a. Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19,
$B_kB_{k+1} = \sqrt{1 + [f(k+1) - f(k)]^2}$.

b. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables Fonction	S : réel K : entier f : définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de … à … S prend pour valeur …… Fin Pour
Sortie	Afficher …

*

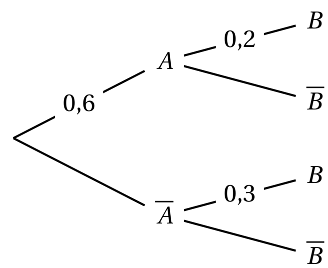
☙ Baccalauréat S Métropole–La Réunion ☙
9 septembre 2015

EXERCICE 1 **5 POINTS**
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1 *point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.*

Question 1

On considère l'arbre de probabilités ci-contre :



Quelle est la probabilité de l'évènement B ?

a. 0,12 **b.** 0,2 **c.** 0,24 **d.** 0,5

Question 2
Le césium 137 est un élément radioactif qui constitue une des principales sources de radioactivité des déchets des réacteurs nucléaires. Le temps T, en années, durant lequel un atome de césium 137 reste radioactif peut être assimilé à une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{\ln 2}{30}$.

Quelle est la probabilité qu'un atome de césium 137 reste radioactif durant au moins 60 ans ?

a. 0,125 **b.** 0,25 **c.** 0,75 **d.** 0,875

Question 3
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type $\sigma = 25$.
Quelle est la valeur arrondie au millième de la probabilité $P(X \geqslant 135)$?

a. 0,159 **b.** 0,317 **c.** 0,683 **d.** 0,841

Question 4
On lance une pièce de monnaie bien équilibrée 100 fois de suite.
Lequel des intervalles ci-dessous est un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'apparition de la face pile de cette pièce ?

a. [0,371 ; 0,637] **b.** [0,480 ; 0,523] **c.** [0,402 ; 0,598] **d.** [0,412 ; 0,695]

Question 5
Une entreprise souhaite obtenir une estimation de la proportion de personnes de plus de 60 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05.
Quel est le nombre minimum de clients à interroger ?

a. 400 **b.** 800 **c.** 1 600 **d.** 3 200

EXERCICE 2 **7 POINTS**
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ telle que :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}$$

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.
La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe, **à rendre avec la copie**.

Partie A

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\text{d}x$.

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $\text{e}^x - x \geqslant \dfrac{\text{e}^x}{2}$.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2x\text{e}^{-x}\,\text{d}x$.
   b. Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ telle que :
   $$H(x) = (-x-1)\text{e}^{-x}$$
   Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant 2$.
3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Partie B

On considère l'algorithme suivant dans lequel les variables sont
- K et i des entiers naturels, K étant non nul ;
- A, x et h des réels.

Entrée :	Saisir K entier naturel non nul
Initialisation	Affecter à A la valeur 0 Affecter à x la valeur 0 Affecter à h la valeur $\dfrac{1}{K}$

Traitement	Pour i variant de 1 à K
	    Affecter à A la valeur $A + h \times f(x)$
	    Affecter à x la valeur $x + h$
	Fin Pour

Sortie	Afficher A

1. Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $K = 4$. Les valeurs successives de A seront arrondies au millième.

i	A	x
1		
2		
3		
4		

2. En l'illustrant sur l'annexe **à rendre avec la copie**, donner une interprétation graphique du résultat affiché par cet algorithme pour $K = 8$.
3. Que donne l'algorithme lorsque K devient grand ?*

EXERCICE 3 **5 POINTS**
Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :
- les points A$(0~;~1~;~-1)$ et B$(-2~;~2~;~-1)$.

- la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c r} x & = & -2+t\\ y & = & 1+t\\ z & = & -1-t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

2. **a.** Montrer que les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles.

b. Montrer que les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas sécantes.

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel.
On considère le point M de la droite $\mathcal{D}$ de coordonnées $(-2+u\ ;\ 1+u\ ;\ -1-u)$.

3. Vérifier que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y-z-3u=0$ est orthogonal à la droite $\mathcal{D}$ et passe par le point M.

4. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées $(-4+6u\ ;\ 3-3u\ ;\ -1)$.

5. **a.** Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$.

b. Existe-t-il une valeur du nombre réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?

6. **a.** Exprimer MN^2 en fonction de u.

b. En déduire la valeur du réel u pour laquelle la distance MN est minimale.*

EXERCICE 3 — 5 POINTS

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation (E) : $15x-26k=m$ où x et k désignent des nombres entiers relatifs et m est un paramètre entier non nul.

1. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ tel que $15u-26v=1$.
Trouver un tel couple.

2. En déduire une solution particulière $(x_0\ ;\ k_0)$ de l'équation (E).

3. Montrer que $(x\ ;\ k)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si
$15(x-x_0)-26(k-k_0)=0$.

4. Montrer que les solutions de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\ ;\ k)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 26q+7m\\ k & = & 15q+4m \end{array}\right. \quad \text{où } q \in \mathbb{Z}.$$

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un système de codage :

- à chaque lettre de l'alphabet, on associe l'entier x correspondant,
- on associe ensuite à x l'entier y qui est le reste de la division euclidienne de $15x+7$ par 26,
- on associe à y la lettre correspondante.

Ainsi, par cette méthode, la lettre E est associée à 4, 4 est transformé en 15 et 15 correspond à la lettre P et donc la lettre E est codée par la lettre P.

1. Coder le mot **MATHS**.

2. Soit x le nombre associé à une lettre de l'alphabet à l'aide du tableau initial et y le reste de la division euclidienne de $15x+7$ par 26.

a. Montrer alors qu'il existe un entier relatif k tel que $15x-26k=y-7$.

b. En déduire que $x \equiv 7y+3 \pmod{26}$.

c. En déduire une description du système de décodage associé au système de codage considéré.

3. Expliquer pourquoi la lettre W dans un message codé sera décodée par la lettre B.
   Décoder le mot WHL.
4. Montrer que, par ce système de codage, deux lettres différentes sont codées par deux lettres différentes.*

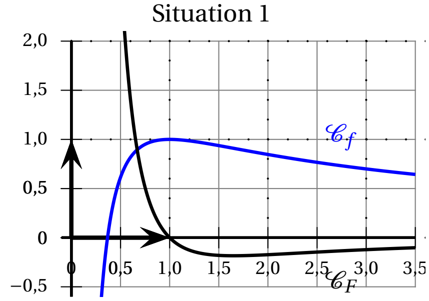
EXERCICE 4 **3 POINTS**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

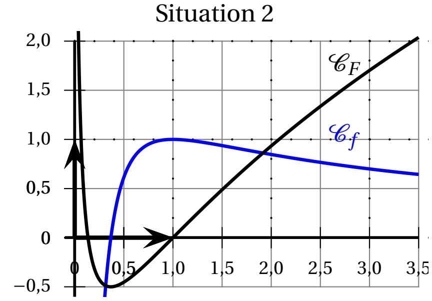
$$f(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x)$$

1. Dans les trois situations suivantes, on a dessiné, dans un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et une courbe $\mathscr{C}_F$. Dans une seule situation, la courbe $\mathscr{C}_F$ est la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f. Laquelle ? Justifier la réponse.

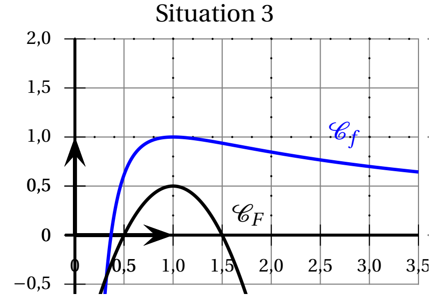
Situation 1



Situation 2



Situation 3



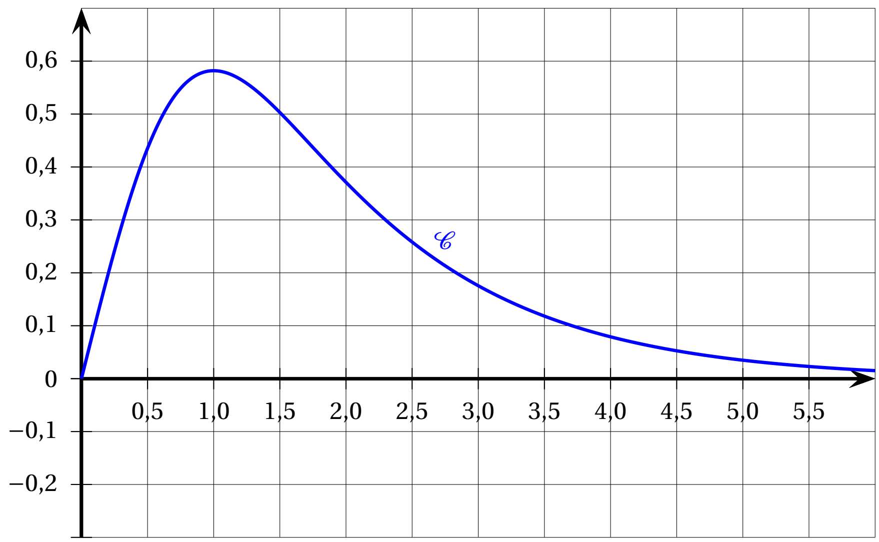
2. Dans la situation retenue à la question 1, on appelle :
   - K le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses et $\mathscr{D}$ la droite passant par K et parallèle à l'axe des ordonnées ;
   - L le point d'intersection de $\mathscr{C}_F$ et de l'axe des abscisses, ayant une abscisse supérieure à $\frac{1}{2}$ et Δ la droite passant par L et parallèle à l'axe des ordonnées.

   a. Déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine du plan délimité par les droites $\mathscr{D}$ et Δ, par la courbe $\mathscr{C}_f$ et par l'axe des abscisses.

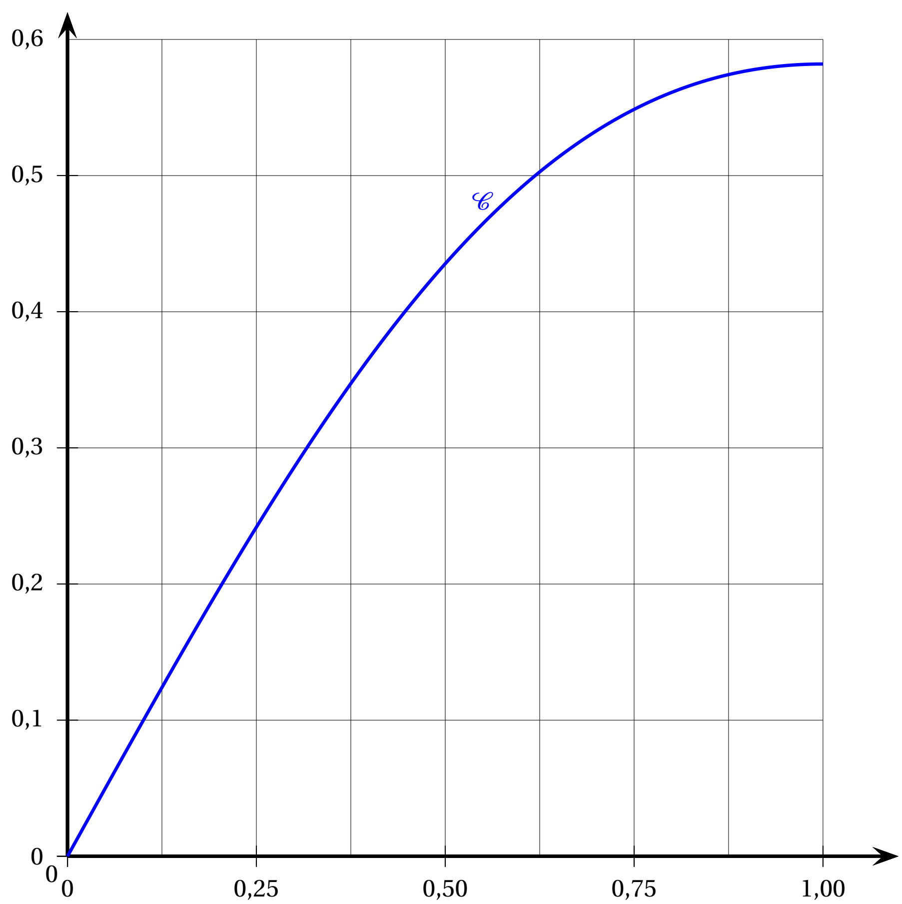
   b. Peut-on déterminer la valeur exacte de cette aire ?

ANNEXE Exercice 2
À rendre avec la copie

Courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f sur [0 ; 6]



Courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f sur [0 ; 1]



Baccalauréat S (spécialité) Polynésie
9 septembre 2015

EXERCICE 1 **7 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On rappelle que la partie réelle d'un nombre complexe z est notée $\Re(z)$.

1. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe $u = 1 - \mathrm{i}$.
2. Déterminer, pour tout réel θ, la forme algébrique et l'écriture exponentielle du nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1 - \mathrm{i})$.
3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ,
   $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Partie B

Dans cette partie, on admet que, pour tout réel θ, $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On définit la fonction h sur $[0~;~+\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.
Les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données, en annexe, dans un repère orthogonal.

1. Conjecturer :
   a. les limites des fonctions f et g en $+\infty$;
   b. la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$;
   c. la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est maximal.
2. Justifier que $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
3. Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4. **a.** On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$,
   $h'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1\right]$.
   b. Justifier que, sur l'intervalle $\left[0~;~\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$ et que, sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}~;~2\pi\right]$,
   $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0$.
   c. En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0~;~2\pi]$.
5. On admet que, sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, la fonction H définie par

$$H(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}[-2 + \cos(x) - \sin(x)]$$

   est une primitive de la fonction h.
   On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_{\{}$ et $\mathscr{C}_{\}}$, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2\pi$.
   Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire.*

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

On étudie une maladie dans la population d'un pays. On a constaté que le taux, en nanogrammes par millilitre $\left(\mathrm{ng.mL}^{-1}\right)$, d'une substance Gamma présente dans le sang est plus élevé chez les personnes atteintes de cette maladie que chez les personnes qui n'en sont pas atteintes.

1. Le taux de cette substance Gamma dans la population des personnes qui ne sont pas atteintes par la maladie est modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 40$ et d'écart-type $\sigma = 8$.
   On choisit au hasard une personne parmi celles qui ne sont pas atteintes par la maladie étudiée.
   Calculer la probabilité que le taux dans le sang de la substance Gamma soit supérieur à 60 ng.mL^{-1}.
2. Des études ont mis en évidence que le taux moyen de la substance Gamma chez les personnes atteintes par la maladie étudiée est de 50 ng.mL^{-1} et que 10 % d'entre elles ont un taux de substance Gamma inférieur à 43 ng.mL^{-1}.
   On appelle T' la variable aléatoire qui modélise le taux de la substance Gamma en ng.mL^{-1} chez une personne atteinte par la maladie étudiée.
   On admet que T' suit la loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'.
   Préciser la valeur de μ' et déterminer la valeur de σ'.

Partie B

Pour dépister chez une personne la maladie étudiée, on effectue une prise de sang. On considère que le dépistage est positif si le taux de la substance Gamma est supérieur ou égal à 45 ng.mL^{-1}.
Une personne étant choisie au hasard dans la population, on appelle :

- M l'évènement « le patient est atteint par la maladie étudiée » ;
- D l'évènement « le patient a un dépistage positif ».

On admet que :

- 82 % des personnes atteintes par la maladie étudiée ont un dépistage positif ;
- 73 % des personnes non atteintes par cette maladie ont un dépistage négatif.

On sait de plus que 10 % de la population étudiée est atteinte par cette maladie.

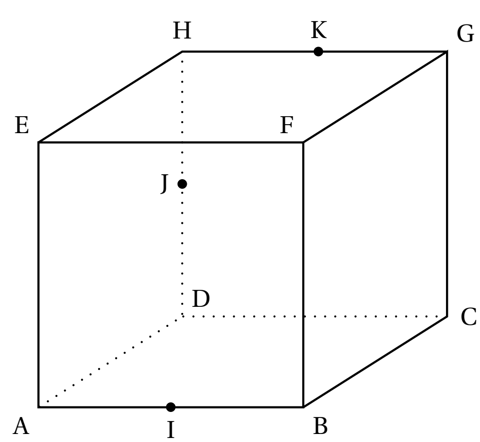
1. Démontrer que la probabilité qu'un patient ait un dépistage positif est de $0,325$.
2. Calculer $P_{\overline{D}}(M)$. Interpréter ce résultat.
3. Un patient a un dépistage positif. Le médecin le rassure en lui indiquant qu'il n'a qu'une chance sur quatre d'avoir contracté la maladie. Qu'en pensez- vous ?

Partie C

Lors du dépistage précédent, la prise de sang est effectuée chez des sujets à jeun.
Les données montrent que 82 % des patients malades ont un dépistage positif.
Pour améliorer le confort des personnes susceptibles de subir cet examen sanguin, on souhaite vérifier si le fait d'être à jeun est une condition indispensable dans le protocole.
On considère un groupe de 300 personnes malades sur lesquelles la prise de sang n'est pas effectuée à jeun.
Le dépistage se révèle positif pour 74 % d'entre elles.
Ce dépistage peut-il être effectué sur des personnes qui ne sont pas à jeun ?*

EXERCICE 3 **3 points**
Commun à tous les candidats

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB], J est le milieu de [HD] et K est le milieu de [HG].
On se place dans le repère $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.



1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{CE}}$ est un vecteur normal au plan (IJK).
2. Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

3. Soit M un point de la droite (CE). Quelle est la position du point M sur la droite (CE) pour laquelle le plan (BDM) est parallèle au plan (IJK) ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.

1. Vérifier que $S(6) = 12$ et calculer $S(7)$.

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $S(n) \geqslant 1 + n$.

b. Quels sont les entiers naturels n tels que $S(n) = 1 + n$?

3. On suppose dans cette question que n s'écrit $p \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts.

a. Démontrer que $S(n) = (1 + p)(1 + q)$.

b. On considère la proposition suivante :
« Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts,
$S(n \times m) = S(n) \times S(m)$ ».
Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

4. On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit p^k, où p est un nombre premier et k un nombre entier naturel non nul.

a. Quels sont les diviseurs de n ?

b. En déduire que $S(n) = \dfrac{1 - p^{k+1}}{1 - p}$.

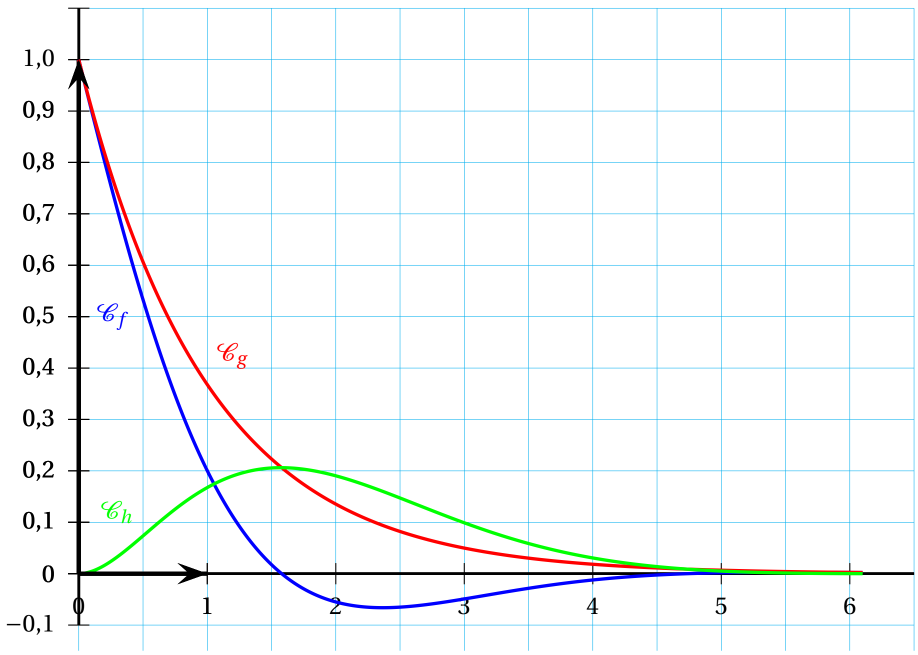
5. On suppose dans cette question que n s'écrit $p^{13} \times q^7$, où p et q sont des nombres premiers distincts.

a. Soit m un entier naturel.
Démontrer que m divise n si, et seulement si, il existe deux nombres entiers s et t avec $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$ tels que $m = p^s \times q^t$.

b. Démontrer que $S(n) = \dfrac{1 - p^{14}}{1 - p} \times \dfrac{1 - q^8}{1 - q}$.*

Annexe

Exercice 1



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane 9 septembre 2015

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_n(x) = x^2 e^{-2nx}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie A : Étude de la fonction f_1

1. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2 e^{-2x}$.
   On admet que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f_1' sa dérivée.
   a. Justifier que pour tout réel x, $f_1'(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$.
   b. Étudier les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
   c. Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.
   d. Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \left(\dfrac{x}{e^x}\right)^2$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
2. En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par $F_1(x) = -e^{-2x}\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right)$.
   En déduire la valeur exacte de I_1.

Partie B : Étude de la suite (I_n)

1. Soit n un entier naturel non nul.
   a. Interpréter graphiquement la quantité I_n.
   b. Émettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite (I_n). Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.
2. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$,
   $$f_{n+1}(x) = e^{-2x} f_n(x).$$
   b. En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$,
   $$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x).$$
   c. Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n).
3. Soit n un entier naturel non nul.
   a. Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$,
   $$0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx}.$$
   b. En déduire un encadrement de la suite (I_n), puis sa limite.*

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0 ; 1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :
R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur exacte de x.
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
   Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On en donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

Partie C

Un fournisseur assure que 90 % des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2 % de pulpe. Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 766 bouteilles présentent moins de 2 % de pulpe.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe au seuil de 95 %.
2. Que penser de l'affirmation du fournisseur ?*

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les trois questions sont indépendantes.

Toute réponse doit être justifiée.

1. On définit une suite (u_n) de réels strictement positifs par

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - 1.$$

   La suite (u_n) est-elle géométrique ?
2. Soit (v_n) une suite à termes strictement positifs.
   On définit la suite (w_n) par, pour tout entier naturel n, $w_n = 1 - \ln(v_n)$.
   La proposition $(\mathscr{P})$ suivante est-elle vraie ou fausse ?

$$(\mathscr{P}) : \text{si la suite } (v_n) \text{ est majorée alors la suite } (w_n) \text{ est majorée.}$$

3. La suite (z_n) de nombres complexes est définie par

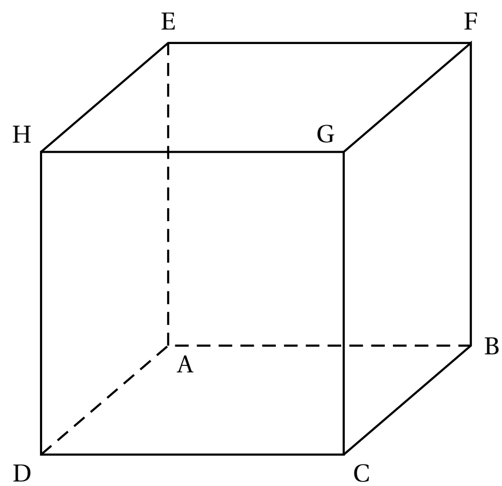
$$z_0 = 2 + 3\text{i et, pour tout entier naturel } n \text{ par } z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \text{i}\frac{\sqrt{6}}{4}\right) z_n.$$

   Pour quelles valeurs de n, $|z_n|$ est-il inférieur ou égal à 10^{-20} ?*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit ABCDEFGH le cube ci-dessous.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. **a.** Montrer que la droite (DB) admet pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & s\\ y & = & 1-s, \\ z & = & 0\end{array}\right. \text{ où } s \text{ décrit l'ensemble } \mathbb{R} \text{ des nombres réels.}$$

   b. Montrer que les points de la droite (AG) sont les points de coordonnées $(t\,;\ t\,;\ t)$ où t est un réel.

2. Soit M un point quelconque de la droite (DB) et N un point quelconque de la droite (AG).
   Démontrer que la droite (MN) est perpendiculaire aux deux droites (AG) et (DB) si et seulement si M et N ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}\,;\ \frac{1}{2}\,;\ 0\right)$ et $\left(\frac{1}{3}\,;\ \frac{1}{3}\,;\ \frac{1}{3}\right)$.

3. Soit s et t deux réels quelconques. On note $M(s\,;\ 1-s\,;\ 0)$ un point de la droite (DB) et $N(t\,;\ t\,;\ t)$ un point de la droite (AG).

   a. Montrer que $MN^2 = 3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$.

   b. En déduire la position des points M et N pour laquelle la distance MN est minimale.
   Que peut-on dire de la droite (MN) dans ce cas ?*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation

$$51x - 26y = 1$$

où x et y sont des nombres entiers relatifs.

1. Justifier, en énonçant un théorème du cours, que cette équation admet au moins un couple solution.
2. **a.** Donner un couple solution $(x_0\,;\ y_0)$ de cette équation.

   b. Déterminer l'ensemble des couples solutions de cette équation.

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Afin de coder une lettre de l'alphabet, correspondant à un entier x compris entre 0 et 25, on définit une fonction de codage f par $f(x) = y$, où y est le reste de la division euclidienne de $51x + 2$ par 26.
La lettre de l'alphabet correspondant à l'entier x est ainsi codée par la lettre correspondant à l'entier y.

1. Coder la lettre N.
2. En utilisant la partie A, déterminer l'entier a tel que $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $51a \equiv 1\ [26]$.
3. Démontrer que si la lettre correspondant à un entier x est codée par une lettre correspondant à un entier y, alors x est le reste de la division euclidienne de $ay + 2$ par 26.
4. Déterminer alors la lettre qui est codée par la lettre N.
5. On applique 100 fois de suite la fonction de codage f à un nombre x correspondant à une certaine lettre. Quelle lettre obtient-on?*

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ∾ 19 novembre 2015

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles. Lorsque le taux de calcium dans une bouteille est inférieur à 6,5 mg par litre, on dit que l'eau de cette bouteille est très peu calcaire.

Dans cet exercice les résultats approchés seront arrondis au millième.

Partie A

L'eau minérale provient de deux sources, notées « source A » et « source B ».
La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A soit très peu calcaire est $0,17$. La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B soit très peu calcaire est $0,10$.

La source A fournit 70 % de la production quotidienne totale des bouteilles d'eau et la source B le reste de cette production.

On prélève au hasard une bouteille d'eau dans la production totale de la journée. On considère les évènements suivants :
A : « La bouteille d'eau provient de la source A »
B : « La bouteille d'eau provient de la source B »
S : « L'eau contenue dans la bouteille d'eau est très peu calcaire ».

1. Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap S$.
2. Montrer que la probabilité de l'évènement S vaut $0,149$.
3. Calculer la probabilité que l'eau contenue dans une bouteille provienne de la source A sachant qu'elle est très peu calcaire.
4. Le lendemain d'une forte pluie, l'usine prélève un échantillon de 1 000 bouteilles provenant de la source A. Parmi ces bouteilles, 211 contiennent de l'eau très peu calcaire.

   Donner un intervalle permettant d'estimer au seuil de 95 % la proportion de bouteilles contenant de l'eau très peu calcaire sur l'ensemble de la production de la source A après cette intempérie.

Partie B

On note X la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A, associe le taux de calcium de l'eau qu'elle contient. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 8 et d'écart-type $1,6$.
On note Y la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B, associe le taux de calcium qu'elle contient. On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 9 et d'écart-type σ.

1. Déterminer la probabilité pour que le taux de calcium mesuré dans une bouteille prise au hasard dans la production d'une journée de la source A soit compris entre $6,4$ mg et $9,6$ mg.
2. Calculer la probabilité $p(X \leqslant 6,5)$.
3. Déterminer σ sachant que la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B contienne de l'eau très peu calcaire est $0,1$.

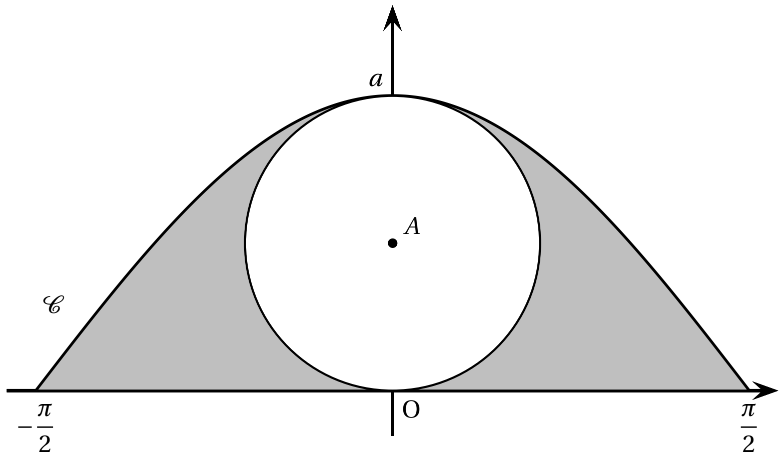
Partie C

Le service commercial a adopté pour les étiquettes des bouteilles la forme représentée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.
La forme de ces étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = a\cos x$ avec $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ et a un réel strictement positif.

Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs. On considère le disque de centre le point A de coordonnées $\left(0 ; \frac{a}{2}\right)$ et de rayon $\frac{a}{2}$. On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe $\mathscr{C}$ pour des valeurs de a inférieures à $1,4$.

1. Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$, et la courbe $\mathscr{C}$ est égale à $2a$ unités d'aire.

2. Pour des raisons esthétiques, on souhaite que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée. Quelle valeur faut-il donner au réel a pour respecter cette contrainte ?*



EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2x + \mathrm{e}^a.$$

1. Montrer que pour tour réel a, la fonction f_a possède un minimum.

2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soient x, y et z trois nombres réels. On considère les implications (P_1) et (P_2) suivantes :

$$(P_1) \qquad (x+y+z=1) \Rightarrow \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right)$$

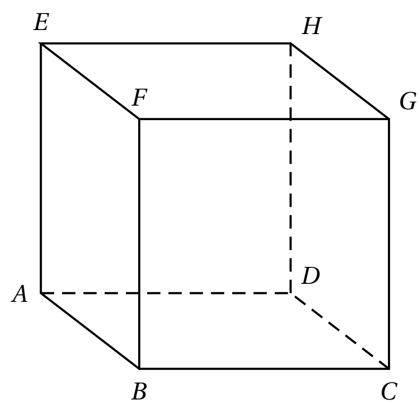
$$(P_2) \qquad \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right) \Rightarrow (x+y+z=1)$$

Partie A

L'implication (P_2) est-elle vraie ?

Partie B

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$, représenté ci-dessous, et on définit le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.



1. **a.** Vérifier que le plan d'équation $x+y+z=1$ est le plan (BDE).
   b. Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).
   c. Montrer que l'intersection de la droite (AG) avec le plan (BDE) est le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.
2. Le triangle BDE est-il équilatéral ?
3. Soit M un point de l'espace.
   a. Démontrer que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 = AK^2 + MK^2$.
   b. En déduire que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 \geqslant AK^2$.
   c. Soient x, y et z des réels quelconques. En appliquant le résultat de la question précédente au point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$, montrer que l'implication (P_1) est vraie.*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$,
$a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$

$$\left\{\begin{array}{lcl} d_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{array}\right.$$

1. Calculer d_1 et a_1.
2. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.

   L'algorithme suivant est proposé :

Variables :	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n

Traitement :	Pour k variant de 1 à n
	    D prend la valeur $\dfrac{D}{2}+100$
	    A prend la valeur $\dfrac{A}{2}+\dfrac{D}{2}+70$
	Fin pour

Sortie :	Afficher D Afficher A

a. Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?
Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question **1.** ?

b. Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3. a. Pour tout entier naturel n, on pose $e_n = d_n - 200$.
Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

c. La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.

4. On admet que pour tout entier naturel n,

$$a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

a. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

b. Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,
$2^n \geqslant n^2$.

c. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,
$0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}$.

d. Étudier la convergence de la suite (a_n).*

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un organisme propose un apprentissage de langues étrangères en ligne. Deux niveaux sont présentés : débutant ou avancé. Au début de chaque mois, un internaute peut s'inscrire, se désinscrire ou changer de niveau.
On souhaite étudier l'évolution sur le long terme, de la fréquentation du site à partir d'un mois noté 0.
Des relevés de la fréquentation du site ont conduit aux observations suivantes :

- Au début du mois 0, il y avait 300 internautes au niveau débutant et 450 au niveau avancé.
- Chaque mois, la moitié des débutants passe au niveau avancé, l'autre moitié reste au niveau débutant et la moitié des avancés ayant terminé leur formation, se désinscrit du site.
- Chaque mois, 100 nouveaux internautes s'inscrivent en débutant et 70 en avancé.

On modélise cette situation par deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n). Pour tour entier naturel n, d_n et a_n sont respectivement des approximations du nombre de débutants et du nombre d'avancés au début du mois n.

Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

On pose $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$

$$\left\{\begin{array}{l c l} d_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{array}\right.$$

1. **a.** Justifier l'égalité $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}d_n + \dfrac{1}{2}a_n + 70$ dans le contexte de l'exercice.

   b. Déterminer les matrices A et B telles que pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = AU_n + B.$$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$A^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT) \quad \text{où } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. **a.** Déterminer la matrice C qui vérifie l'égalité $C = AC + B$.

   b. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $V_n = U_n - \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}$.

   Montrer que pour tout entier naturel n,

$$V_{n+1} = AV_n.$$

   c. On admet que pour tout entier $n \geqslant 1$, $V_n = A^n V_0$.

   En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$U_n = \begin{pmatrix} 100\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 200 \\ 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 110\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix}$$

4. **a.** On admet que pour tout entier $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

   En déduire que pour tout entier $n \geqslant 4$,

$$0 \leqslant 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{100}{n}.$$

   b. En utilisant les questions précédentes, que peut-on prévoir pour l'évolution de la fréquentation du site sur le long terme ?*

∽ Baccalauréat S Amérique du Sud ∾
24 novembre 2015

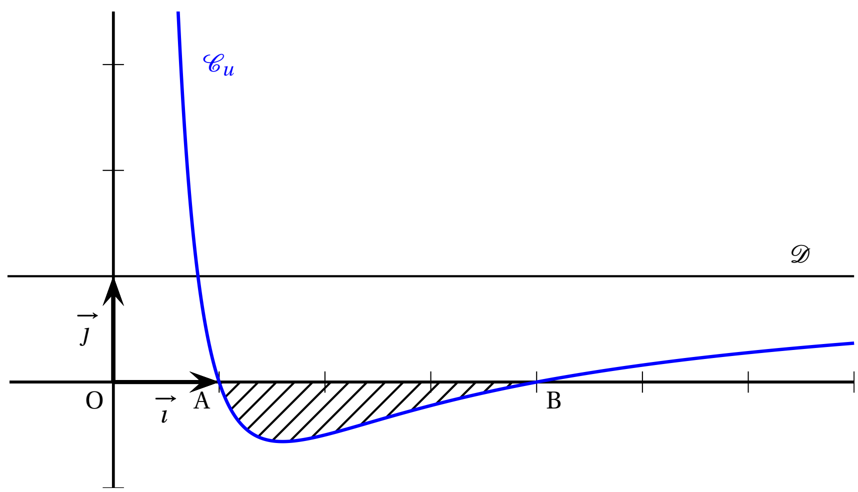
EXERCICE 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on désigne par $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où a, b et c sont des réels fixés.
On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_u$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$.



On précise que la courbe $\mathscr{C}_u$ passe par les points A(1 ; 0) et B(4 ; 0) et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_u$.

1. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.
2. Donner $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a.
3. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $u(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 5\ln x - \frac{4}{x}.$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0. On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = u(x)$.
   En déduire le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs particulières.

Partie C

1. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré sur le graphique de la **partie A**.

2. Pour tout réel λ supérieur ou égal à 4, on note $\mathscr{A}_\lambda$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine formé par les points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ telles que

$$4 \leqslant x \leqslant \lambda \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant u(x).$$

Existe-t-il une valeur de λ pour laquelle $\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A}$?
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. Les points A, B, C sont définis par leurs coordonnées :

$$\text{A}(3\,;\,-1\,;\,4),\quad \text{B}(-1\,;\,2\,;\,-3),\quad \text{C}(4\,;\,-1\,;\,2).$$

Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $2x-3y+2z-7=0$.

La droite Δ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+4t\\ y &=& 4-t\\ z &=& -8+2t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 1 : Les droites Δ et (AC) sont orthogonales.
Affirmation 2 : Les points A, B et C déterminent un plan et ce plan a pour équation cartésienne $2x+5y+z-5=0$.
Affirmation 3 : Tous les points dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont données par
$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+s-2s'\\ y &=& 1-2s+s'\\ z &=& 1-4s+2s'\end{array}\right.$, $s \in \mathbb{R}$, $s' \in \mathbb{R}$ appartiennent au plan $\mathscr{P}$.
Affirmation 4 : Il existe un plan parallèle au plan $\mathscr{P}$ qui contient la droite Δ.*

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

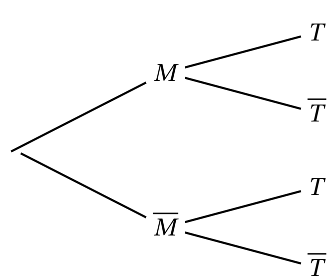
Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :
- la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de $0,98$;
- la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de $0,01$.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :
- M l'évènement : « L'individu choisi est atteint du chikungunya »
- T l'évènement : « Le test de l'individu choisi est positif »

On notera $\overline{M}$ $\left(\text{respectivement } \overline{T}\right)$ l'évènement contraire de l'évènement M (respectivement T).
On note p $(0 \leqslant p \leqslant 1)$ la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1. **a.** Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



b. Exprimer $P(M \cap T)$, $P\left(\overline{M} \cap T\right)$ puis $P(T)$ en fonction de p.

2. **a.** Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(p) = \frac{98p}{97p+1}.$$

b. Étudier les variations de la fonction f.

3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à $0,95$.
En utilisant les résultats de la question **2.**, à partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable ?

Partie B

En juillet 2014, l'institut de veille sanitaire d'une île, en s'appuyant sur les données remontées par les médecins, publie que 15 % de la population est atteinte par le virus.
Comme certaines personnes ne consultent pas forcément leur médecin, on pense que la proportion est en réalité plus importante.
Pour s'en assurer, on se propose d'étudier un échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard dans cette île. La population est suffisamment importante pour considérer qu'un tel échantillon résulte de tirages avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard, fait correspondre le nombre de personnes atteintes par le virus et par F la variable aléatoire donnant la fréquence associée.

1. **a.** Sous l'hypothèse $p = 0,15$, déterminer la loi de X.

b. Dans un échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard dans l'île, on dénombre 197 personnes atteintes par le virus.
Quelle conclusion peut-on tirer de cette observation à propos du chiffre de 15 % publié par l'institut de veille sanitaire ?
Justifier. (On pourra s'aider du calcul d'un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.)

2. On considère désormais que la valeur de p est inconnue.
En utilisant l'échantillon de la question **1. b.**, proposer un intervalle de confiance de la valeur de p, au niveau de confiance de 95 %.

Partie C

Le temps d'incubation, exprimé en heures, du virus peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant une loi normale d'écart type $\sigma = 10$.
On souhaite déterminer sa moyenne μ.
La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de T est donnée en annexe.

1. **a.** Conjecturer, à l'aide du graphique, une valeur approchée de μ.

b. On donne $p(T < 110) = 0,18$. Hachurer sur le graphique un domaine dont l'aire correspond à la probabilité donnée.

2. On note T' la variable aléatoire égale à $\dfrac{T-\mu}{10}$.

a. Quelle loi la variable aléatoire T' suit-elle ?

b. Déterminer une valeur approchée à l'unité près de la moyenne μ de la variable aléatoire T et vérifier la conjecture de la question 1.*

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010 + n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010 + n$, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

Partie A

1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n.

2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).
Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, recopiées vers le bas, permettent d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	n	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875
5	3	70,706	49,294
6	4	66,100	53,900
7	5	62,185	57.815
8	6	58,857	61,143
9	7	56,029	63,971
10	8	53,625	66,375
11	9	51,581	68,419
12	10	49,844	70,156
13	11	48,367	71,633
14	12	47,112	72,888
15	13	46,045	73,955
16	14	45,138	74,862
17	15	44,368	75,632
18	16	43,713	76,287
19	17	43,156	76,844
20	18	42,682	77,318
21	19	42,280	77,720
22	20	41,938	78,062
	…	…	…
59	57	40,005	79,995
60	58	40,004	79,996
61	59	40,003	79,997
62	60	40,003	79,997
63	61	40,002	79,998

3. Quelles conjectures peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?

Partie B

On admet dans cette partie que, pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = 0,85u_n + 6$.

1. a. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

b. On admet que u_n est positif pour tout entier naturel n.
Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) ?

2. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n \geqslant 0$.

a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.

b. En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.

c. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question **3.** de la **partie A**.

4. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 90
Traitement :	Tant que $u \geqslant 120 - u$ faire
	$\quad$ n prend la valeur $n + 1$
	$\quad$ u prend la valeur $0,85 \times u + 6$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

a. Que fait cet algorithme?

b. Quelle valeur affiche-t-il?*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- R_n l'effectif de la population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010+n$,
- C_n l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010+n$.

On a donc $R_0 = 90$ et $C_0 = 30$.

1. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix}0,9 & 0,05\\0,1 & 0,95\end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix}R_n\\C_n\end{pmatrix}$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$.

b. Calculer U_1. En déduire le nombre de ruraux et le nombre de citadins en 2011.

2. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de M^n et de U_0.

3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P et on la notera P^{-1}.

4. a. On pose $\Delta = P^{-1}MP$. Calculer Δ à l'aide de la calculatrice.

b. Démontrer que : $M = P\Delta P^{-1}$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$M^n = P\Delta^n P^{-1}.$$

5. a. On admet que le calcul matriciel précédent donne :

$$M^n = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 0,85^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times 0,85^n\\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 0,85^n & \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times 0,85^n\end{pmatrix}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, $R_n = 50\times 0,85^n + 40$ et déterminer l'expression de C_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de R_n et de C_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Que peut-on en conclure pour la population étudiée?

6. a. On admet que (R_n) est décroissante et que (C_n) est croissante.

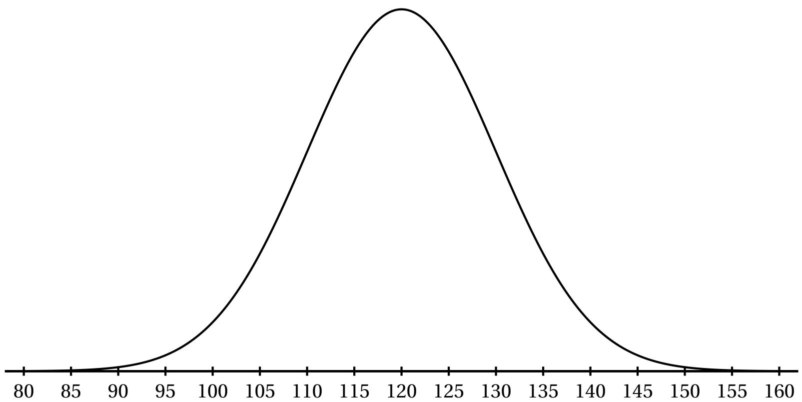
Compléter l'algorithme donné en annexe afin qu'il affiche le nombre d'années au bout duquel la population urbaine dépassera la population rurale.

b. En résolvant l'inéquation d'inconnue n, $50\times 0,85^n + 40 < 80 - 50\times 0,85^n$, retrouver la valeur affichée par l'algorithme. *

Annexe

Exercice 3 Partie C Question 1
(à compléter et à remettre avec la copie)

Courbe représentative de la fonction densité de la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ 10^2\right)$



Exercice 4 Spécialité
Question 6 (à compléter et à remettre avec la copie)

Entrée :	n, R et C sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	Rprend la valeur 90
	C prend la valeur 30
Traitement :	Tant que ...... faire
	n prend la valeur ...
	R prend la valeur $50 \times 0,85^n + 40$
	C prend la valeur ...
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

*

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2016

EXERCICE 1 **7 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une boite contient 200 médailles souvenir dont 50 sont argentées, les autres dorées.
Parmi les argentées 60 % représentent le château de Blois, 30 % le château de Langeais, les autres le château de Saumur.
Parmi les dorées 40 % représentent le château de Blois, les autres le château de Langeais.
On tire au hasard une médaille de la boite. Le tirage est considéré équiprobable et on note :

A l'évènement « la médaille tirée est argentée » ;

D l'évènement « la médaille tirée est dorée » ;

B l'évènement « la médaille tirée représente le château de Blois » ;

L l'évènement « la médaille tirée représente le château de Langeais » ;

S l'évènement « la médaille tirée représente le château de Saumur ».

1. Dans cette question, on donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.
   a. Calculer la probabilité que la médaille tirée soit argentée et représente le château de Langeais.
   b. Montrer que la probabilité que la médaille tirée représente le château de Langeais est égale à $\frac{21}{40}$.
   c. Sachant que la médaille tirée représente le château de Langeais, quelle est la probabilité que celle-ci soit dorée ?
2. Sachant que la médaille tirée représente le château de Saumur, donner la probabilité que celle-ci soit argentée.

Partie B

Une médaille est dite conforme lorsque sa masse est comprise entre 9,9 et 10,1 grammes.
On dispose de deux machines M_1 et M_2 pour produire les médailles.

1. Après plusieurs séries de tests, on estime qu'une machine M_1 produit des médailles dont la masse X en grammes suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,06.
   On note C l'évènement « la médaille est conforme ».
   Calculer la probabilité qu'une médaille produite par la machine M_1 ne soit pas conforme. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} près.
2. La proportion des médailles non conformes produites par la machine M_1 étant jugée trop importante, on utilise une machine M_2 qui produit des médailles dont la masse Y en grammes suit la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type σ.
   a. Soit Z la variable aléatoire égale à $\frac{Y-10}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par la variable Z ?
   b. Sachant que cette machine produit 6 % de pièces non conformes, déterminer la valeur arrondie au millième de σ.*

EXERCICE 2 **3 points**
Commun à tous les candidats

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0 ; 16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère du plan $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.
Ces courbes sont données en **annexe 1**.
Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique. *

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Dans le repère orthonormé $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan P_m d'équation

$$\frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0.$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m le point A(1 ; 1 ; 1) appartient-il au plan P_m ?

2. Montrer que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique

$$(d)\left\{\begin{array}{lcr} x &=& 12-2t\\ y &=& 9-2t\\ z &=& t\end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$

3. a. Montrer que l'intersection entre P_0 et (d) est un point noté B dont on déterminera les coordonnées.

b. Justifier que pour tout réel m, le point B appartient au plan P_m.

c. Montrer que le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m.

4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que

$$-10\leqslant m\leqslant 10 \quad \text{et} \quad -10\leqslant m'\leqslant 10.$$

On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

a. Vérifier que P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

b. Montrer que les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si

$$\left(\frac{mm'}{4}\right)^2+(m-1)\left(m'-1\right)+\frac{mm'}{4}=0.$$

c. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	m et m' entiers relatifs

Traitement :	Pour m allant de -10 à 10 :
	  Pour m' allant de -10 à 10 :
	    Si $\left(mm'\right)^2+16(m-1)\left(m'-1\right)+4mm'=0$
	      Alors Afficher $\left(m\ ;\ m'\right)$
	  Fin du Pour
	Fin du Pour

Quel est le rôle de cet algorithme ?

d. Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4\ ;\ 1)$, $(0\ ;\ 1) et (5\ ;\ -4)$.

Écrire les six couples dans l'ordre d'affichage de l'algorithme.

*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par

$$z_0=1 \quad \text{et} \quad z_{n+1}=\left(1+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ de l'annexe 2.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1. a. Vérifier que $1+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}.$$

b. Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a. Interpréter géométriquement d_n.

b. Calculer d_0.

c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n).$$

d. En déduire que la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

4. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.

d. Justifier cette construction.*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine.
Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit x le nombre associé à la lettre à coder. On détermine le reste y de la division euclidienne de $7x+5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine).
Exemple :
M correspond à $x = 12$
$7 \times 12 + 5 = 89$
Or $89 \equiv 11\ [26]$ et 11 correspond à la lettre L, donc la lettre M est codée par la lettre L.

1. Coder la lettre L.
2. **a.** Soit k un entier relatif. Montrer que si $k \equiv 7x\ [26]$ alors $15k \equiv x\ [26]$.

   b. Démontrer la réciproque de l'implication précédente.

   c. En déduire que $y \equiv 7x+5\ [26]$ équivaut à $x \equiv 15y+3\ [26]$.
3. À l'aide de la question précédente décoder la lettre F.

Partie B

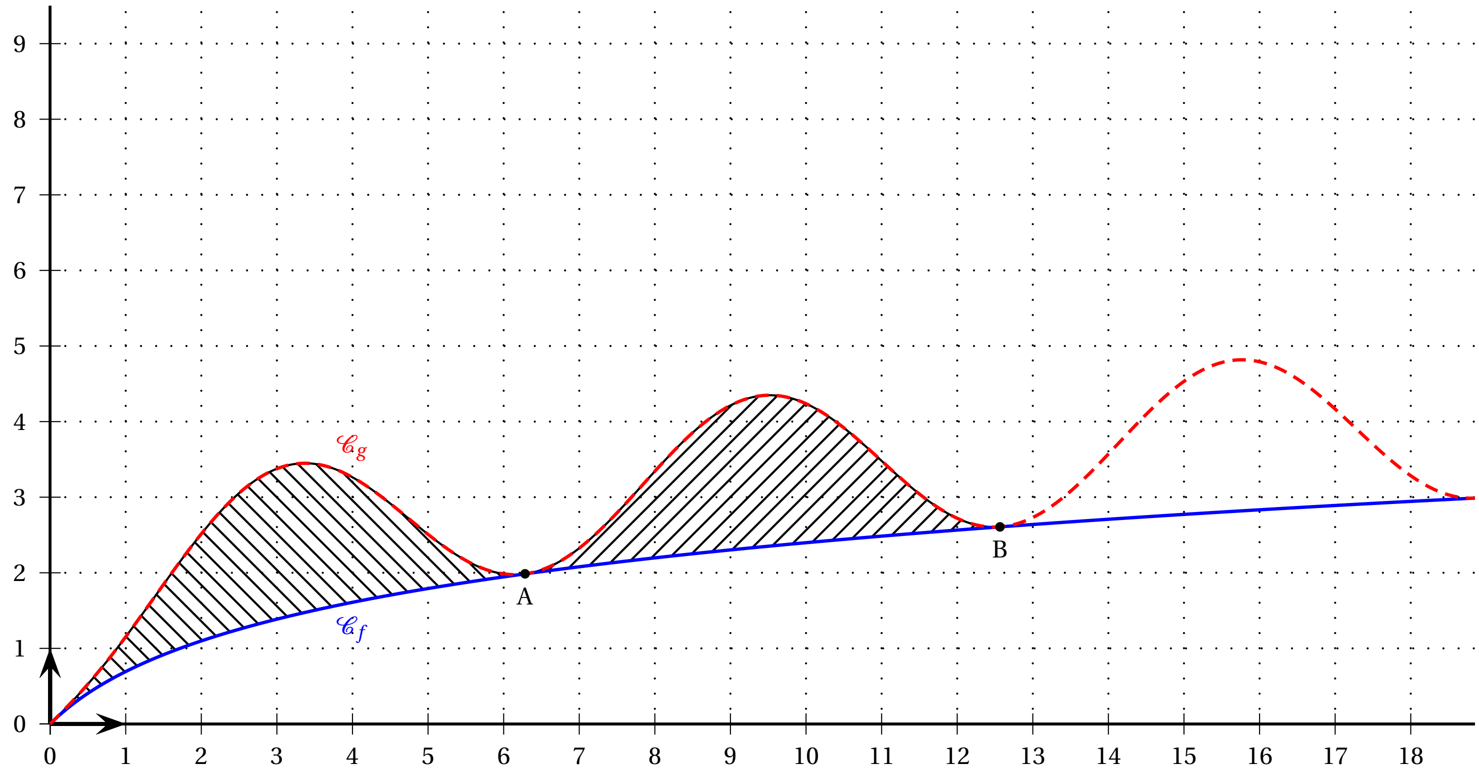
On considère les suites (a_n) et (b_n) telles que a_0 et b_0 sont des entiers compris entre 0 et 25 inclus et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 7a_n + 5$ et $b_{n+1} = 15b_n + 3$.
Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n = \left(a_0 + \dfrac{5}{6}\right) \times 7^n - \dfrac{5}{6}$.

On admet pour la suite du problème que pour tout entier naturel n,
$b_n = \left(b_0 + \dfrac{3}{14}\right) \times 15^n - \dfrac{3}{14}$.

Partie C

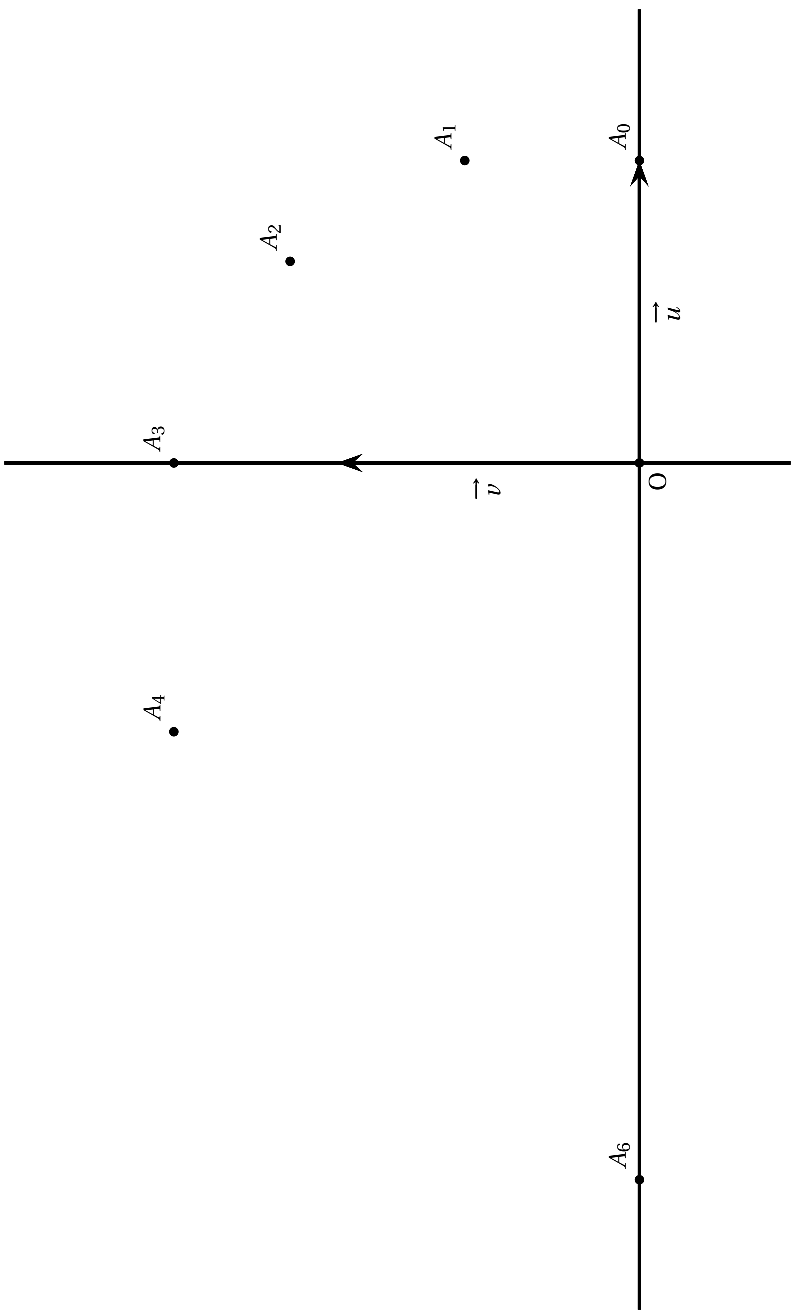
Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté (on peut tester les 312 couples de coefficients possibles). Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie A.
Par exemple pour coder le mot MATH avec la clé 2-2-5-6, on applique « 2 » fois le chiffrement affine à la lettre M (cela donne E), « 2 » fois le chiffrement à la lettre A, « 5 » fois le chiffrement à la lettre T et enfin « 6 » fois le chiffrement à la lettre H.
Dans cette partie, on utilisera la clé 2-2-5-6.
Décoder la lettre Q dans le mot IYYQ. *

ANNEXE 1 de l'exercice 2



À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 2 de l'exercice 4


A_0
A_1
A_2
A_3
A_4
A_6
$\vec{u}$
$\vec{v}$
O

Baccalauréat S Pondichéry 8 avril 2014

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.
   On sait que $P(X \leqslant 2) = 0,15$.
   Déterminer la valeur exacte du réel λ.

Dans la suite de l'exercice on prendra $0,081$ pour valeur de λ.

2. **a.** Déterminer $P(X \geqslant 3)$.
   b. Montrer que pour tous réels positifs t et h, $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$.
   c. Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?
   d. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.
3. **Dans la suite de cet exercice, on donnera des valeurs arrondies des résultats à $\mathbf{10^{-3}}$**
   L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1 %. Afin de vérifier cette affirmation 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux.
   Le résultat de ce test remet-il en question l'annonce de l'entreprise A ? Justifier. On pourra s'aider d'un intervalle de fluctuation. *

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1**
   Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.
2. g est la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par

$$g(x) = 2x\ln(2x+1).$$

   Proposition 2
   Sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$.
   Proposition 3
   Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est : $1+\ln 4$.
3. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
   $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont les plans d'équations respectives : $2x+3y-z-11=0$ et
   $x+y+5z-11=0$.
   Proposition 4
   Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ se coupent perpendiculairement.*

EXERCICE 3 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\text{i}\right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\text{i}$.

2. a. Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b. En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

c. Que dire de la longueur $\text{O}A_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P

Traitement	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $R > P$
	  n prend la valeur $n+1$
	  R prend la valeur $\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$
	Fin tant que

Sortie	Afficher n

a. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?

b. Pour $P = 0,01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

4. a. Démontrer que le triangle $\text{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}.

b. On admet que $z_n = r_n\text{e}^{\text{i}\frac{n\pi}{6}}$.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

c. Compléter la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.
Les traits de construction seront apparents.

*

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi la spécialité

Chaque jeune parent utilise chaque mois une seule marque de petits pots pour bébé. Trois marques X, Y et Z se partagent le marché.
Soit n un entier naturel.

On note : X_n l'évènement « la marque X est utilisée le mois n »,
Y_n l'évènement « la marque Y est utilisée le mois n »,
Z_n l'évènement « la marque Z est utilisée le mois n ».

Les probabilités des évènements X_n, Y_n, Z_n sont notées respectivement x_n, y_n, z_n.
La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition.
Un acheteur de la marque X le mois n, a le mois suivant :

50 % de chance de rester fidèle à cette marque,

40 % de chance d'acheter la marque Y,

10 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Y le mois n, a le mois suivant :

30 % de chance de rester fidèle à cette marque,

50 % de chance d'acheter la marque X,

20 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Z le mois n, a le mois suivant :

70 % de chance de rester fidèle à cette marque,

10 % de chance d'acheter la marque X,

20 % de chance d'acheter la marque Y.

1. **a.** Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.
On admet que :
$y_{n+1} = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2z_n$ et que $z_{n+1} = 0,1x_n + 0,2y_n + 0,7z_n$.

b. Exprimer z_n en fonction de x_n et y_n. En déduire l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2. On définit la suite (U_n) par $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

On admet que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$.

Au début de l'étude statistique (mois de janvier 2014 : $n = 0$), on estime que $U_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$.

On considère l'algorithme suivant :

Variables	n et i des entiers naturels. A, B et U des matrices
Entrée et initialisation	Demander la valeur de n i prend la valeur 0 A prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ B prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$

Traitement	Tant que $i < n$
	    U prend la valeur $A \times U + B$
	    i prend la valeur $i + 1$
	Fin de Tant que

Sortie	Afficher U

a. Donner les résultats affichés par cet algorithme pour $n = 1$ puis pour $n = 3$.

b. Quelle est la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril ?
Dans la suite de l'exercice, on cherche à déterminer une expression de U_n en fonction de n.
On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I - A$.

3. On désigne par C une matrice colonne à deux lignes.

a. Démontrer que $C = A \times C + B$ équivaut à $N \times C = B$.

b. On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{45}{23} & \dfrac{20}{23} \\ \dfrac{10}{23} & \dfrac{30}{23} \end{pmatrix}$.

En déduire que $C = \begin{pmatrix} \dfrac{17}{46} \\ \dfrac{7}{23} \end{pmatrix}$.

4. On note V_n la matrice telle que $V_n = U_n - C$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = A \times V_n$.

b. On admet que $U_n = A^n \times (U_0 - C) + C$.
Quelles sont les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai ? *

EXERCICE 4 **7 points**

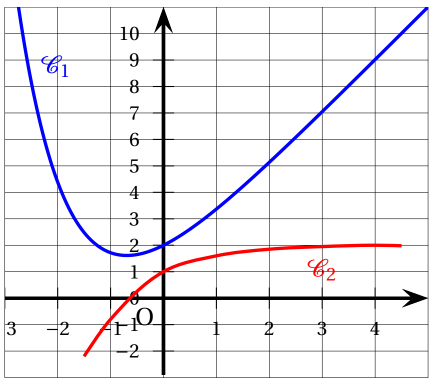
Commun à tous les candidats

Partie A

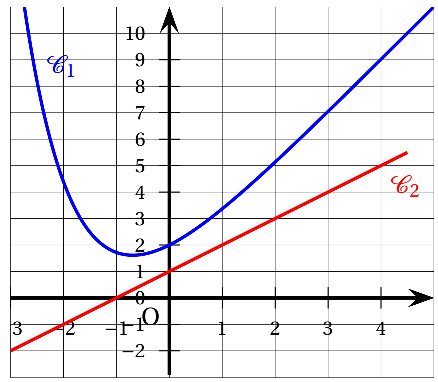
f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f.
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f'.
Le point A de coordonnées $(0\,;\,2)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_1$.
Le point B de coordonnées $(0\,;\,1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_2$.

1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de la fonction f. Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathscr{C}_2$ de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.

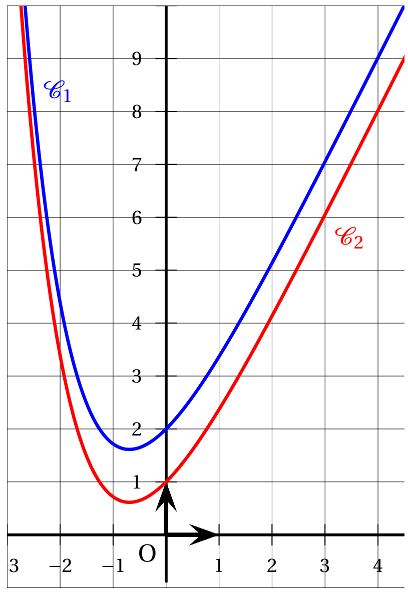
Situation 1



Situation 2 ($\mathscr{C}_2$ est une droite)



Situation 3



2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ en A.

3. On sait que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.

  a. Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.

  b. Prouver que $a = 2$.

4. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B

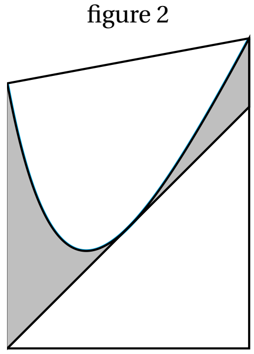
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x + 2)$.

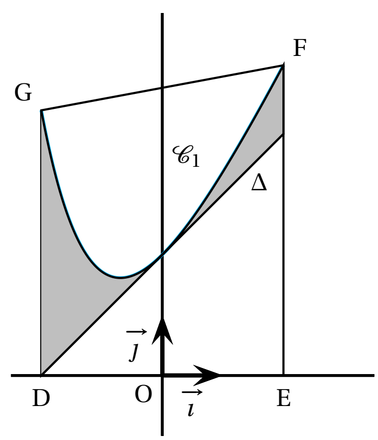
1. **a.** Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.

  b. En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_1$ par rapport à la droite Δ.

La figure 2 ci-dessous représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe $\mathscr{C}_1$ et de la droite Δ, comme l'indique la figure ci-dessous. Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.

figure 2





Le contour du logo est représenté par le trapèze DEFG où :

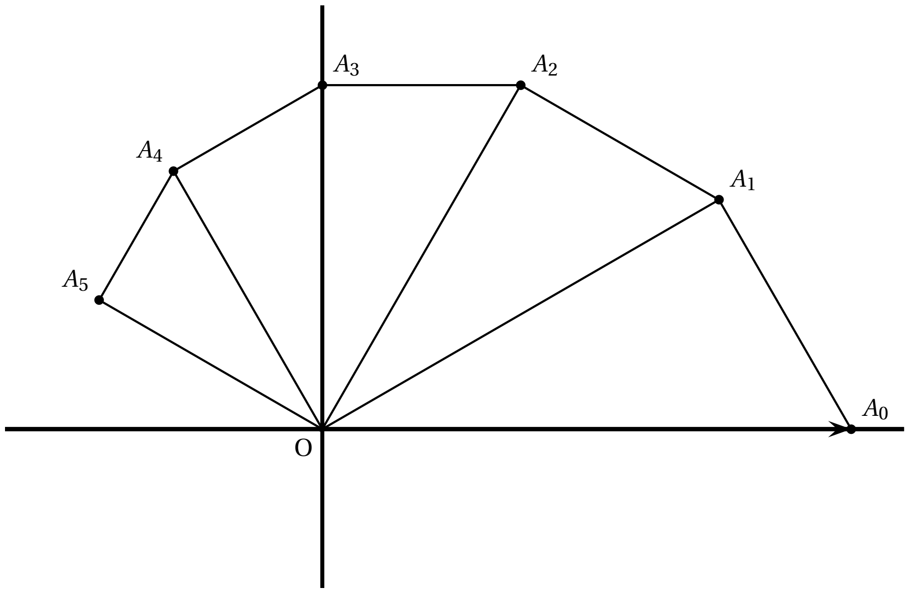
- D est le point de coordonnées $(-2\ ;\ 0)$,
- E est le point de coordonnées $(2\ ;\ 0)$,
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe $\mathscr{C}_1$,
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe $\mathscr{C}_2$.

La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}_1$, la droite d'équation $x = -2$ et la droite d'équation $x = 2$.

2. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} du résultat).*

ANNEXE EXERCICE 3

À compléter et à rendre avec la copie



∽ Baccalauréat S Liban 27 mai 2014 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.
Les probabilités seront arrondies au dix millième.

Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8 h 00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

Partie A

L'élève part tous les jours à 7 h 40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée. Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.
Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4 % des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5 % des cas.
On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'évènement « L'élève se rend au lycée à vélo », B l'évènement « l'élève se rend au lycée en bus » et R l'évènement « L'élève arrive en retard au lycée ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement $V \cap R$.
3. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est 0,0192
4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

Partie B : le vélo

On suppose dans cette partie que l'élève utilise le vélo pour se rendre à son lycée.
Lorsqu'il utilise le vélo, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T qui suit le loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.

1. Déterminer la probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée.
2. Il part de son domicile à vélo à 7 h 40. Quelle est la probabilité qu'il soit en retard au lycée ?
3. L'élève part à vélo. Avant quelle heure doit-il partir pour arriver à l'heure au lycée avec une probabilité de 0,9 ? Arrondir le résultat à la minute près.

Partie C : le bus

Lorsque l'élève utilise le bus, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T' qui suit la loi normale d'espérance $\mu' = 15$ et d'écart-type σ'.
On sait que la probabilité qu'il mette plus de 20 minutes pour se rendre à son lycée en bus est de 0,05.
On note Z' la variable aléatoire égale à $\dfrac{T' - 15}{\sigma'}$

1. Quelle loi la variable aléatoire Z' suit-elle ?
2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'écart-type σ' de la variable aléatoire T'.*

EXERCICE 2 **5 points**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - y + 3z + 1 = 0$
et la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{l}x = \quad 2t\\ y = \quad 1 + t \quad , \quad t \in \mathbb{R}\\ z = -5 + 3t\end{array}\right.$$

On donne les points $A(1~;~1;~0)$, $B(3~;0~;~-1)$ et $C(7~;1~;~-2)$

Proposition 1 :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\left\{\begin{array}{l}x = \quad 5 - 2t\\ y = -1 + \quad t \quad , t \in \mathbb{R}\\ z = -2 + \quad t\end{array}\right.$

Proposition 2 :
Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3 :
Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4 :
La droite $\mathscr{D}$ coupe le plan $\mathscr{P}$ au point E de coordonnées $(8~;~-3;~-4)$.

Proposition 5 :
Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles.*

EXERCICE 3 **5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Partie A

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;~+\infty[$.
   Pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, calculer $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

Partie B

Soit $\mathscr{A}$ la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ de la façon suivante : pour tout réel t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $\mathscr{A}(t)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathscr{A}$.
2. On admet que l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Que peut-on en déduire pour la fonction $\mathscr{A}$?
3. On cherche à prouver l'existence d'un nombre réel α tel que la droite d'équation $x = \alpha$ partage le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, en deux parties de même aire, et à trouver une valeur approchée de ce réel.
   a. Démontrer que l'équation $\mathscr{A}(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$
   b. Sur le graphique fourni en **annexe (*à rendre avec la copie*)** sont tracées la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que la courbe Γ représentant la fonction $\mathscr{A}$.
   Sur le graphique de l'**annexe**, identifier les courbes $\mathscr{C}$ et Γ, puis tracer la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$. En déduire une valeur approchée du réel α. Hachurer le domaine correspondant à $\mathscr{A}(\alpha)$.
4. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0;~+\infty[$ par

$$g(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

   a. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
   Pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, calculer $g'(x)$.
   b. En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, une expression de $\mathscr{A}(t)$.
   c. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathscr{A}(6)$.*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1 + \mathrm{i})z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. Étant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.
   Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Variables	:	u est un réel
		p est un réel
		n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	
Sortie	:	

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1 + \mathrm{i}$.
   En déduire la forme exponentielle de z_1.
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population.
Un *individu sain* est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie.
Un *individu malade* est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri.
Un *individu guéri* est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri.
Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade.
Les premières observations nous montrent que, d'un jour au jour suivant :

- 5 % des individus tombent malades ;
- 20 % des individus guérissent.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'individus sains n jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades n jours après le début de l'expérience, et c_n celle d'individus guéris n jours après le début de l'expérience.
On suppose qu'au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est à dire que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.

2. **a.** Quelle est la proportion d'individus sains qui restent sains d'un jour au jour suivant ? En déduire a_{n+1} en fonction de a_n.

b. Exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

On admet que $c_{n+1} = 0{,}2b_n + c_n$.

Pour tout entier naturel n, on définit $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On admet qu'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1} \times A \times P$ et que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

3. **a.** Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$.

On admet que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n \times U_0$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$D^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On admet que $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}\left(0{,}95^n - 0{,}8^n\right) & 0{,}8^n & 0 \\ \frac{1}{3}\left(3 - 4 \times 0{,}95^n + 0{,}8^n\right) & 1 - 0{,}8^n & 1 \end{pmatrix}$

4. **a.** Vérifier que pour tout entier naturel n, $b_n = \frac{1}{3}\left(0{,}95^n - 0{,}8^n\right)$

b. Déterminer la limite de la suite (b_n).

c. On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours, puis décroit.

On souhaite déterminer le pic épidémique, c'est à dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum.

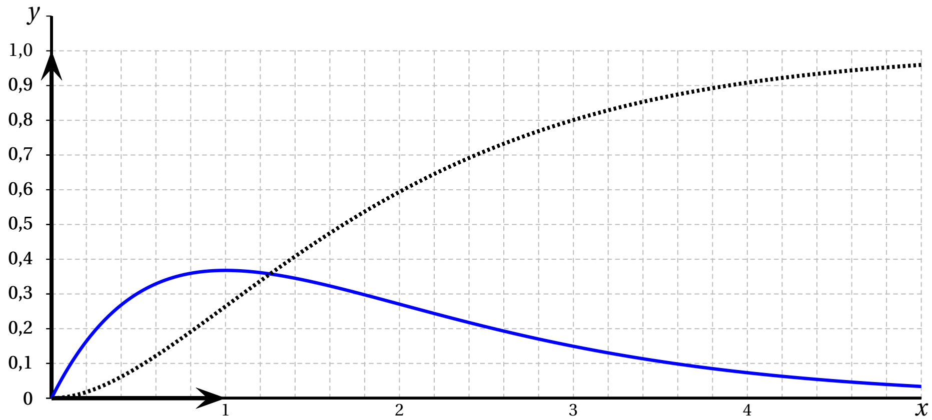
À cet effet, on utilise l'algorithme donné en **annexe 2 (*à rendre avec la copie*)**, dans lequel on compare les termes successifs de la suite (b_n).

Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le rang du jour où le pic épidémique est atteint et compléter le tableau fourni en **annexe 2**.

Conclure.*

Annexe 1
À rendre avec la copie

EXERCICE 3
Représentations graphiques des fonctions f et $\mathscr{A}$



Annexe 2
À rendre avec la copie

EXERCICE 4
Algorithme et tableau à compléter

Variables	:	$b,\ b',\ x,\ y$ sont des réels
		k est un entier naturel
Initialisation	:	Affecter à b la valeur 0
		Affecter à b' la valeur 0,05
		Affecter à k la valeur 0
		Affecter à x la valeur 0,95
		Affecter à y la valeur 0,8
Traitement	:	Tant que $b < b'$ faire :
		Affecter à k la valeur $k+1$
		Affecter à b la valeur b'
		Affecter à x la valeur $0{,}95x$
		Affecter à y la valeur $0{,}80y$
		Affecter à b' la valeur $\cdots\cdots$
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher $\cdots\cdots$

	k	b	x	y	b'	Test : $b < b'$?
Après le 7$^{\text{e}}$ passage dans la boucle Tant que	7	0,1628	0,6634	0,1678	0,1652	VRAI
Après le 8$^{\text{e}}$ passage éventuel dans la boucle Tant que						
Après le 9$^{\text{e}}$ passage éventuel dans la boucle Tant que						

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Amérique du Nord ∾
30 mai 2014

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante.

Partie A : Conditionnement des pots

Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème sous un conditionnement de 50 mL et dispose pour ceci de pots de contenance maximale 55 mL.
On dit qu'un pot de crème est non conforme s'il contient moins de 49 mL de crème.

1. Plusieurs séries de tests conduisent à modéliser la quantité de crème, exprimée en mL, contenue dans chaque pot par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.
   Calculer la probabilité qu'un pot de crème soit non conforme.
2. La proportion de pots de crème non conformes est jugée trop importante. En modifiant la viscosité de la crème, on peut changer la valeur de l'écart-type de la variable aléatoire X, sans modifier son espérance $\mu = 50$. On veut réduire à 0,06 la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme.
   On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{X-50}{\sigma'}$
   a. Préciser la loi que suit la variable aléatoire Z.
   b. Déterminer une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leqslant u) = 0,06$.
   c. En déduire la valeur attendue de σ'.
3. Une boutique commande à son fournisseur 50 pots de cette nouvelle crème.
   On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d'atteindre l'objectif fixé et donc que la proportion de pots non conformes dans l'échantillon est 0,06.
   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 50 pots reçus.
   a. On admet que Y suit une loi binomiale. En donner les paramètres.
   b. Calculer la probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes.

Partie B : Campagne publicitaire

Une association de consommateurs décide d'estimer la proportion de personnes satisfaites par l'utilisation de cette crème.
Elle réalise un sondage parmi les personnes utilisant ce produit. Sur 140 personnes interrogées, 99 se déclarent satisfaites.
Estimer, par intervalle de confiance au seuil de 95 %, la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.*

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

1. Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $g(x) > 0$.
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1. Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
   Pour tout x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, calculer $g'(x)$.
3. Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ que l'on déterminera.
   En donner une interprétation graphique.

Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction $\mathscr{A}$ définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$\mathscr{A}(x) = \int_0^x [f(t) - (t - 3)]\,\mathrm{d}t.$$

1. Hachurer sur le graphique donné en **annexe 1 (à rendre avec la copie)** le domaine dont l'aire est donnée par $\mathscr{A}(2)$.
2. Justifier que la fonction $\mathscr{A}$ est croissante sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
3. Pour tout réel x strictement positif, calculer $\mathscr{A}(x)$.
4. Existe-t-il une valeur de x telle que $\mathscr{A}(x) = 2$? *

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFCH donné en annexe 2 (à rendre avec la copie).
On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que
$\overrightarrow{\text{HP}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{HG}}$.

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
   Construire le point L
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}\,,\overrightarrow{\text{AD}}\,,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
2. Déterminer les coordonnées du point L.
3. On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1\,;\,1\,;\,\frac{5}{8}\right)$.
   Le triangle TPN est-il rectangle en T? *

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.
Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1 400 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + 330$.
3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100.
   Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables	:	n est un entier naturel
		a est un réel
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à a la valeur 800
Traitement	:	Tant que $a < 1100$, faire :
		Affecter à a la valeur ...
		Affecter à n la valeur ...
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher n

4. Pour tout entier naturel n, on note $u_n = a_n - 1320$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. Exprimer u_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.
   Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.*

Exercice 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.
Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de deux pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 1 100 m^3 d'eau et le bassin B contient 1 100 m^3 d'eau ;

- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin B est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin du bassin A est transféré vers le bassin B, et pour des raisons de maintenance, on transfère également 5 m^3 du bassin A vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 1\,100$ et $b_0 = 1\,100$.
Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Traduire la conservation du volume total d'eau du circuit par une relation liant a_n et b_n.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution du volume d'eau dans les bassins.
Donner les formules à écrire et à recopier vers le bas dans les cellules B3 et C3 permettant d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	Jour n	Volume bassin A	Volume bassin B
2	0	1 100,00	1 100,00
3	1		
4	2	1 187,50	1 012,50
5	3	1 215,63	984,38
6	4	1 236,72	963,28
7	5	1 252,54	947,46
8	6	1 264,40	935,60
9	7	1 273,30	926,10
10	8	1 279,98	920,02
11	9	1 234,98	915,02
12	10	1 288,74	911,26
13	11	1 291,55	908,45
14	12	1 293,66	906,34
15	13	1 295,25	904,75
16	14	1 296,44	903,56
17	15	1 297,33	902,67
18	16	1 298,00	902,00
19	17	1 298,50	901,50
20	18	1 298,87	901,13

3. Quelles conjectures peut-on faire sur l'évolution du volume d'eau dans chacun des bassins ?

Partie B

On considère la matrice carrée $M = \begin{pmatrix}0,9 & 0,15\\0,1 & 0,85\end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $R = \begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$.
On admet que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n + R$.

1. On note $S = \begin{pmatrix}1300\\900\end{pmatrix}$.
Vérifier que $S = MS + R$.
En déduire que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} - S = M(X_n - S)$.

   Dans la suite, on admettra que, pour tout entier naturel n, $X_n - S = M^n(X_0 - S)$ et que
   $M^n = \begin{pmatrix}0,6+0,4\times 0,75^n & 0,6-0,6\times 0,75^n\\0,4-0,4\times 0,75^n & 0,4+0,6\times 0,75^n\end{pmatrix}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix}1300 - 200 \times 0,75^n\\ 900 + 200 \times 0,75^n\end{pmatrix}$.
3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question 3. de la partie A.
4. On considère que le processus est stabilisé lorsque l'entier naturel n vérifie

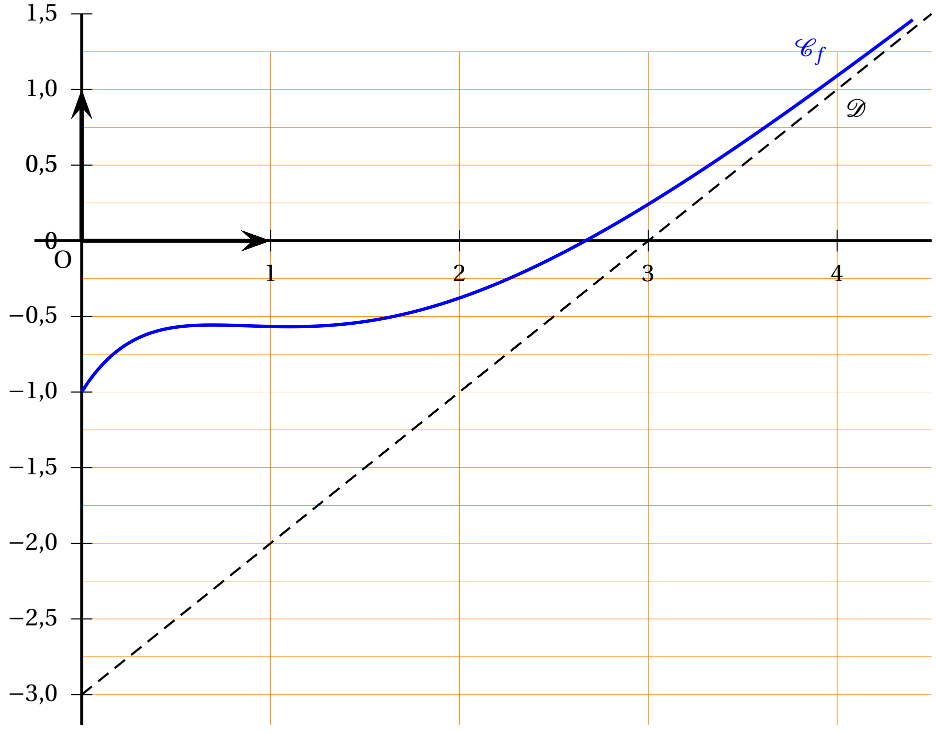
$$1300 - a_n < 1,5 \quad \text{et} \quad b_n - 900 < 1,5.$$

Déterminer le premier jour pour lequel le processus est stabilisé.*

Annexe 1

À rendre avec la copie

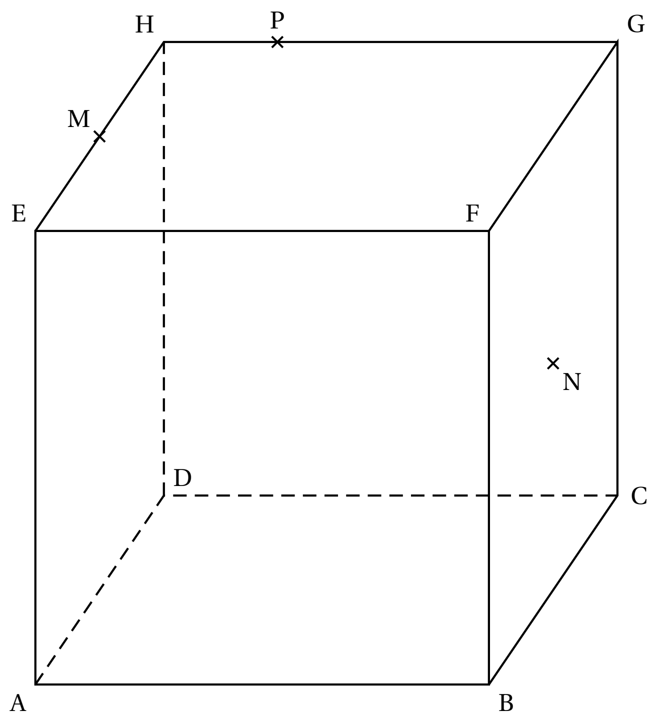
EXERCICE 2



Annexe 2

À rendre avec la copie

EXERCICE 3



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Centres étrangers ∾
12 juin 2014

Dans l'ensemble du sujet, et pour chaque question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes.
Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1

Dans un hypermarché, 75 % des clients sont des femmes. Une femme sur cinq achète un article au rayon bricolage, alors que sept hommes sur dix le font.
Une personne, choisie au hasard, a fait un achat au rayon bricolage. La probabilité que cette personne soit une femme a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750 **b.** 0,150 **c.** 0,462 **d.** 0,700

Question 2

Dans cet hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à $0,3$. On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle.
La probabilité qu'exactement trois d'entre eux aient acheté un ordinateur de ce modèle a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,900 **b.** 0,092 **c.** 0,002 **d.** 0,267

Question 3

Cet hypermarché vend des téléviseurs dont la durée de vie, exprimée en année, peut être modélisée par une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. La durée de vie moyenne d'un téléviseur est de huit ans, ce qui se traduit par : $\lambda = \dfrac{1}{8}$.
La probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750 **b.** 0,250 **c.** 0,472 **d.** 0,528

Question 4

Cet hypermarché vend des baguettes de pain dont la masse, exprimée en gramme, est une variable aléatoire réelle qui suit une loi normale de moyenne 200 g.
La probabilité que la masse d'une baguette soit comprise entre 184 g et 216 g est égale à $0,954$.
La probabilité qu'une baguette prise au hasard ait une masse inférieure à 192 g a pour valeur arrondie au centième :

a. 0,16 **b.** 0,32 **c.** 0,84 **d.** 0,48

*

Exercice 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_0 & = & 16 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. **a.** Calculer z_1, z_2 et z_3.

   b. Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique de l'**annexe, à rendre avec la copie**.

   c. Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ sous forme trigonométrique.

   d. Démontrer que le triangle $\mathrm{O}A_0A_1$ est isocèle rectangle en A_1.

2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   La suite (r_n) est-elle convergente ?

   Interpréter géométriquement le résultat précédent.

   On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.

   Ainsi $L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.

   b. Donner une expression de L_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).*

Exercice 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de $0,01$ pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».
Une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.
Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée
$0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

   a. Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

   b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$, à l'aide du graphique donné en annexe, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles.

   Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_2(x) = \ln[1+(\mathrm{e}-1)x].$$

On admet que f_2 est une fonction de retouche.
On définit sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

a. Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$: $g'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}-2)-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x}$;

b. Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est $0,12$.

c. Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.
On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à $0,05$.

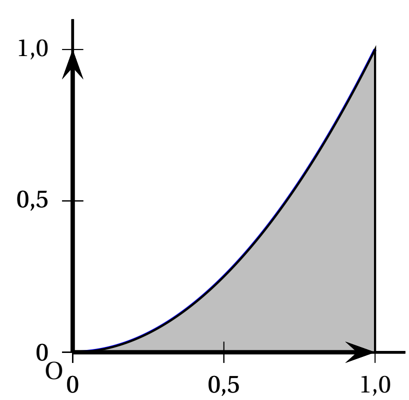
1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche.
Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables :	x (nuance initiale)
	y (nuance retouchée)
	E (écart)
	c (compteur)
	k
Initialisation :	c prend la valeur 0
Traitement :	Pour k allant de 0 à 100, faire
	x prend la valeur $\frac{k}{100}$
	y prend la valeur $f(x)$
	E prend la valeur $\lvert y-x\rvert$
	Si $E \geqslant 0,05$, faire
	c prend la valeur $c+1$
	Fin si
	Fin pour
Sortie :	Afficher c

2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la **partie A** ?

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-a-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) \leqslant x$.
On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire $\mathscr{A}_f$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :



$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{\left(x^2-1\right)} \qquad f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

1. a. Calculer $\mathscr{A}_{f_1}$.

b. Calculer $\mathscr{A}_{f_2}$

2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?*

Exercice 4 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(1\,;\,2\,;\,7),\quad B(2\,;\,0\,;\,2),\quad C(3\,;\,1\,;\,3),\quad D(3\,;\,-6\,;\,1) \text{ et } E(4\,;\,-8\,;\,-4).$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit $\overrightarrow{u}\,(1\,;\,b\,;\,c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.

a. Déterminer les valeurs de b et c telles que $\overrightarrow{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :
$x-2y+z-4=0$.

c. Le point D appartient-il au plan (ABC) ?

3. On considère la droite $\mathscr{D}$ de l'espace dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 2t+3 \\ y & = & -4t+5 \\ z & = & 2t-1 \end{array}\right. \text{ où } t \text{ est un nombre réel.}$$

a. La droite $\mathscr{D}$ est-elle orthogonale au plan (ABC) ?

b. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (ABC).

4. Étudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).*

Exercice 4 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A : préliminaires

1. a. Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que :

$$n^2 \equiv N-1 \quad \text{modulo } N.$$

Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1 \quad \text{modulo } N$.

b. Déduire de la question précédente un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1 \quad \text{modulo } 26$.
On admettra que l'unique entier k tel que : $0 \leqslant k \leqslant 25$ et $5k \equiv 1 \quad \text{modulo } 26$ vaut 21.

2. On donne les matrices : $A=\begin{pmatrix}4&1\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice $6A-A^2$.

b. En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1}, peut s'écrire sous la forme $A^{-1}=\alpha I+\beta A$, ou α et β sont deux réels que l'on déterminera.

c. Vérifier que : $B=5A^{-1}$.

d. Démontrer que si $AX=Y$, alors $5X=BY$.

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

- Le mot à coder est remplacé par la matrice $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.
- La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.
- Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple : « OU »(mot à coder) $\to X \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \to R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \to$ « YE » (mot codé).

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

1. Démontrer que : $\left\{\begin{array}{rcr} 5x_1 & = & 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 & = & -3y_1 + 4y_2 \end{array}\right.$.

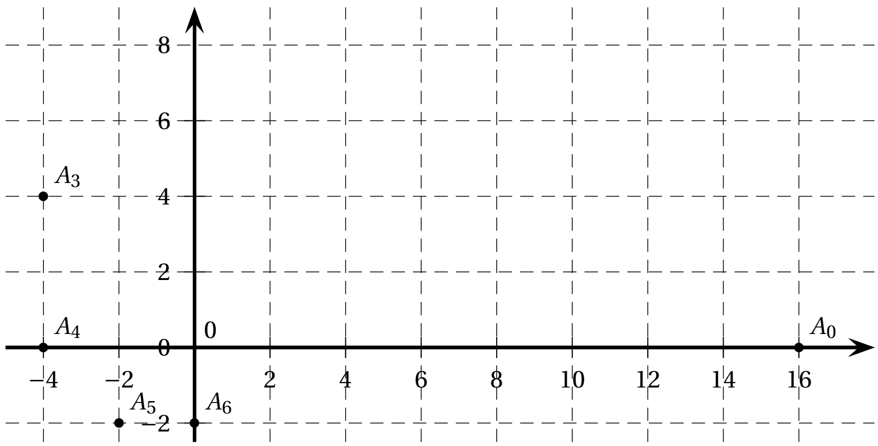
2. En utilisant la question 1. b. de la **partie A**, établir que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & \equiv & 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 & \equiv & 15y_1 + 6y_2 \end{array}\right. \quad \text{modulo } 26$$

3. Décoder le mot « QP ». *

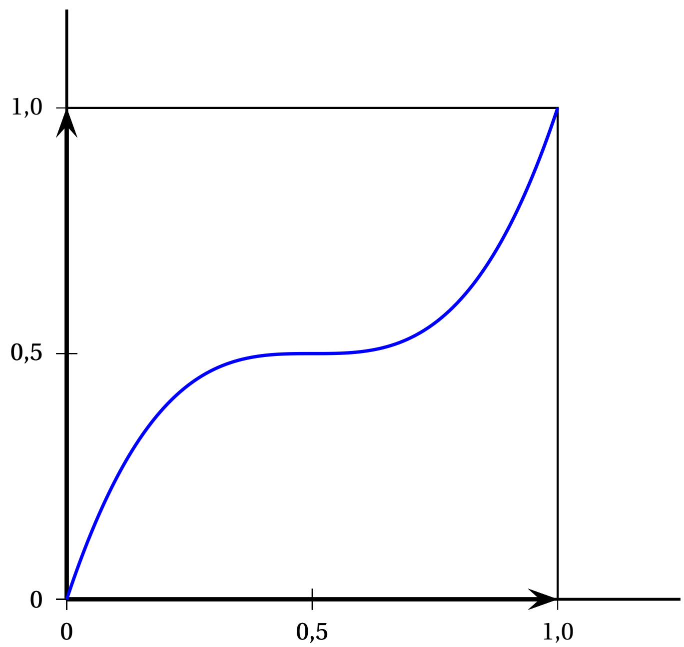
A4 **Annexe à rendre avec la copie**

Annexe relative à l'exercice 2



Annexe relative à l'exercice 3

Courbe représentative de la fonction f_1



Baccalauréat S Polynésie 13 juin 2014

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(5\ ;\ -5\ ;\ 2), B(-1\ ;\ 1\ ;\ 0), C(0\ ;\ 1\ ;\ 2) \quad \text{et } D(6\ ;\ 6\ ;\ -1).$$

1. Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.

4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (BCD).

5. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, *où* $\mathcal{B}$ *est l'aire d'une base du tétraèdre et* h *la hauteur correspondante.*

6. On admet que $AB = \sqrt{76}$ et $AC = \sqrt{61}$.

Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.*

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

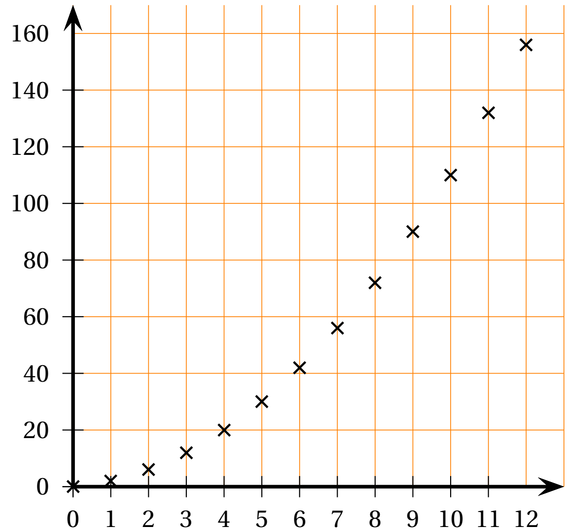
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1		**Algorithme 2**	
Variables :	n est un entier naturel	**Variables :**	n est un entier naturel
	u est un réel		u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n	**Entrée :**	Saisir la valeur de n
Traitement :	u prend la valeur 0	**Traitement :**	u prend la valeur 0
	Pour i allant de 1 à n :		Pour i allant de 0 à $n-1$:
	u prend la valeur $u+2i+2$		u prend la valeur $u+2i+2$
	Fin Pour		Fin Pour
Sortie :	Afficher u	**Sortie :**	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
Démontrer cette conjecture.

b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2 + bn + c$.
Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = (n+1)(n+2)$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.*

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance, le rang du mois dans l'année.
Par exemple, pour une personne née le 14 mai, le numéro du jour de naissance est 14 et le numéro du mois de naissance est 5.

Partie A

Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant :
« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ».
Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1er août ! ».

1. Vérifier que pour une personne née le 1er août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.

2. **a.** Pour un spectateur donné, on note j le numéro de son jour de naissance, m celui de son mois de naissance et z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).
Exprimer z en fonction de j et de m et démontrer que z et m sont congrus modulo 12.

b. Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul (A).

Partie B

Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m, le magicien demande de calculer le nombre z défini par $z = 12j + 31m$.

Dans les questions suivantes, on étudie différentes méthodes permettant de retrouver la date d'anniversaire du spectateur.

1. Première méthode :
   On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :    j et m sont des entiers naturels
Traitement :   Pour m allant de 1 à 12 faire :
                 Pour j allant de 1 à 31 faire :
                   z prend la valeur 12j + 31m
                   Afficher z
                 Fin Pour
               Fin Pour
```

   Modifier cet algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que $12j+31m=503$.

2. Deuxième méthode :
   a. Démontrer que $7m$ et z ont le même reste dans la division euclidienne par 12.
   b. Pour m variant de 1 à 12, donner le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12.
   c. En déduire la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).

3. Troisième méthode :
   a. Démontrer que le couple $(-2\ ;\ 17)$ est solution de l'équation $12x+31y=503$.
   b. En déduire que si un couple d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation $12x+31y=503$, alors $12(x+2)=31(17-y)$.
   c. Déterminer l'ensemble de tous les couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$, solutions de l'équation $12x+31y=503$.
   d. Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ tel que $1 \leqslant y \leqslant 12$.
   En déduire la date d'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).*

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre.
   Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas.
   Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à $0,6$.
   Affirmation n° 1 :
   « Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »
2. Dans l'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B.
   Affirmation n° 2 :
   « Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants. »
3. On modélise le temps d'attente, exprimé en minutes, à un guichet, par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,7$.
   Affirmation n° 3 :
   « La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes à ce guichet est $0,7$ environ. »
   Affirmation n° 4 :
   « Le temps d'attente moyen à ce guichet est de sept minutes. »
4. On sait que 39 % de la population française est du groupe sanguin A+.
   On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.
   On interroge 183 donneurs de sang et parmi eux, 34 % sont du groupe sanguin A+.
   Affirmation n° 5 :
   « On ne peut pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A+ parmi les donneurs de sang est de 39 % comme dans l'ensemble de la population. » *

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.

2. Étude de la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

- **a.** Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.
- **b.** Justifier que, pour tout réel $x \neq 0$, $h(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$.

  En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.
- **c.** On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

  Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.
- **d.** Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
- **e.** En déduire que, pour tout réel x, $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.
- **f.** Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ ?

3. Étude de la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

- **a.** Pour tout réel x, développer l'expression $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.
- **b.** Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

4. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.*

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane 19 juin 2014

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} *près*

Partie A

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huîtres : « la plate » et « la japonaise ». Chaque année, les huîtres plates représentent 15 % de sa production.
Les huîtres sont dites de calibre n° 3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g.
Seulement 10 % des huîtres plates sont de calibre n° 3, alors que 80 % des huîtres japonaises le sont.

1. Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l'ostréiculteur. On suppose que toutes les huitres ont la même chance d'être choisies.
   On considère les évènements suivants :
   - J : « l'huître prélevée est une huître japonaise »,
   - C : « l'huître prélevée est de calibre n° 3 ».

   a. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.

   b. Calculer la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n° 3.

   c. Justifier que la probabilité d'obtenir une huître de calibre n° 3 est 0,695.

   d. Le service sanitaire a prélevé une huître de calibre n° 3. Quelle est la probabilité que ce soit une huître plate ?

2. La masse d'une huître peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

   a. Donner la probabilité que l'huître prélevée dans la production de l'ostréiculteur ait une masse comprise entre 87 g et 89 g.

   b. Donner $P(X \geqslant 91)$.

Partie B

Cet ostréiculteur affirme que 60 % de ses huîtres ont une masse supérieure à 91 g.
Un restaurateur souhaiterait lui acheter une grande quantité d'huîtres mais il voudrait, auparavant, vérifier l'affirmation de l'ostréiculteur.

Le restaurateur achète auprès de cet ostréiculteur 10 douzaines d'huîtres qu'on considèrera comme un échantillon de 120 huîtres tirées au hasard. Sa production est suffisamment importante pour qu'on l'assimile à un tirage avec remise.
Il constate que 65 de ces huîtres ont une masse supérieure à 91 g.

1. Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de 120 huîtres associe la fréquence de celles qui ont une masse supérieure à 91 g.
   Après en avoir vérifié les conditions d'application, donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire F.
2. Que peut penser le restaurateur de l'affirmation de l'ostréiculteur ? *

EXERCICE 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^{x}.$$

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).
En déduire le signe de $g(x)$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} g(x).$$

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.
6. **a.** Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
b. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.

Partie B

1. Soit H la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = (-x - 1)\mathrm{e}^{-x}.$$

Démontrer que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
2. On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite T et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$.*

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(1 ; 2 ; 5), B(−1 ; 6 ; 4), C(7 ; −10 ; 8) et D(−1 ; 3 ; 4).

1. **Proposition 1 :** Les points A, B et C définissent un plan.
2. On admet que les points A, B et D définissent un plan.
Proposition 2 : Une équation cartésienne du plan (ABD) est $x - 2z + 9 = 0$.
3. **Proposition 3 :** Une représentation paramétrique de la droite (AC) est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{3}{2}t - 5\\ y &=& -3t + 14 \qquad t \in \mathbb{R}\\ z &=& -\dfrac{3}{2}t + 2\end{array}\right.$$

4. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x - y + 5z + 7 = 0$ et $\mathscr{P}'$ le plan d'équation cartésienne $-3x - y + z + 5 = 0$.
Proposition 4 : Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles. *

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 &=& 2\\ \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} &=& \dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n.\end{array}\right.$$

1. **a.** Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

   b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. **a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n.$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

   c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).
   Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

   b. En déduire, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n)

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0,01$.

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que ...	(1)
	n prend la valeur ...	(2)
	u prend la valeur ...	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types d'hébergements :
L'hébergement A et l'hébergement B.
Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €.
Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438€.
On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B

1. **a.** Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et 9.

   b. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples $(x ; y)$ possibles.

Entrée :	x et y sont des nombres
Traitement :	Pour x variant de 0 ... (1)
	Pour y variant de 0 ... (2)
	Si ... (3)
	Afficher x et y
	Fin Si
	Fin Pour
	Fin Pour
Fin traitement	

2. Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.
3. **a.** Justifier que l'équation $8x+15y=1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

   b. Déterminer une telle solution.

   c. Résoudre l'équation (E) : $8x+15y=146$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.
4. Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A.

   Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B.

   Calculer ces nombres.*

∽ Baccalauréat S Asie 19 juin 2014 ∾

Exercice 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes.
Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal, on considère les points A(1 ; −1 ; −1), B(1 ; 1 ; 1), C(0 ; 3 ; 1) et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - z + 5 = 0$.

Question 1
Soit $\mathcal{D}_1$ la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$ passant par A.
Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$ est :

a. $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t\\ y &=& -1-t\\ z &=& 1-t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+2t\\ y &=& 1-\ t\\ z &=& 1+\ t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$

c. $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5+4t\\ y &=& -3-2t\\ z &=& 1+2t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4-2t\\ y &=& -2+t\\ z &=& 3-4t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$

Question 2

Soit $\mathcal{D}_2$ la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+\ t\\ y &=& -3-\ t\\ z &=& 2-2t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$.

a. La droite $\mathcal{D}_2$ et le plan $\mathcal{P}$ ne sont pas sécants
b. La droite $\mathcal{D}_2$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
c. La droite $\mathcal{D}_2$ et le plan $\mathcal{P}$ se coupent au point $\text{E}\left(\dfrac{1}{3}\,;\,-\dfrac{7}{3}\,;\,\dfrac{10}{3}\right)$.
d. La droite $\mathcal{D}_2$ et le plan $\mathcal{P}$ se coupent au point $\text{F}\left(\dfrac{4}{3}\,;\,-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{22}{3}\right)$.

Question 3
a. L'intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan (ABC) est réduite à un point.
b. Le plan $\mathcal{P}$ et le plan (ABC) sont confondus.
c. Le plan $\mathcal{P}$ coupe le plan (ABC) selon une droite.
d. Le plan $\mathcal{P}$ et le plan (ABC) sont strictement parallèles.

Question 4
Une mesure de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ arrondie au dixième de degré est égale à :

a. 22,2 ° **b.** 0,4 ° **c.** 67,8 ° **d.** 1,2 °

*

Exercice 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

Le taux d'hématocrite est le pourcentage du volume de globules rouges par rapport au volume total du sang. On note X la variable aléatoire donnant le taux d'hématocrite d'un adulte choisi au hasard dans la population française. On admet que cette variable suit une loi normale de moyenne $\mu = 45,5$ et d'écart-type σ.

Partie A

On note Z la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-45,5}{\sigma}$.

1. **a.** Quelle est la loi de la variable aléatoire Z ?
   b. Déterminer $P(X \leqslant \mu)$.
2. En prenant $\sigma = 3,8$, déterminer $P(37,9 \leqslant X \leqslant 53,1)$. Arrondir le résultat au centième.

Partie B

Une certaine maladie V est présente dans la population française avec la fréquence 1 %. On sait d'autre part que 30 % de la population française a plus de 50 ans, et que 90 % des porteurs de la maladie V dans la population française ont plus de 50 ans.

On choisit au hasard un individu dans la population française.
On note α l'unique réel tel que $P(X \leqslant \alpha) = 0,995$, où X est la variable aléatoire définie au début de l'exercice. On ne cherchera pas à calculer α.
On définit les évènements :

M « l'individu est porteur de la maladie V » ;

S « l'individu a plus de 50 ans » ;

H « l'individu a un taux d'hématocrite supérieur à α ».

Ainsi $P(M) = 0,01$, $P_M(S) = 0,9$ et $P(H) = P(X > \alpha)$.

D'autre part, une étude statistique a révélé que 60 % des individus ayant un taux d'hématocrite supérieur à α sont porteurs de la maladie V.

1. **a.** Déterminer $P(M \cap S)$.
   b. On choisit au hasard un individu ayant plus de 50 ans. Montrer que la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V est égale à 0,03.
2. **a.** Calculer la probabilité $P(H)$.
   b. L'individu choisi au hasard a un taux d'hématocrite inférieur ou égal à α. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V. Arrondir au millième.

Partie C

Le but de cette partie est d'étudier l'influence d'un gène sur la maladie V.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de la maladie V dans les échantillons de taille 1 000, prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble de la population française. On arrondira les bornes de l'intervalle au millième.
2. Dans un échantillon aléatoire de 1 000 personnes possédant le gène, on a trouvé 14 personnes porteuses de la maladie V.
   Au regard de ce résultat, peut-on décider, au seuil de 95 %, que le gène a une influence sur la maladie ?*

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-1 ; 1]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2a}\left(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}\right)$$

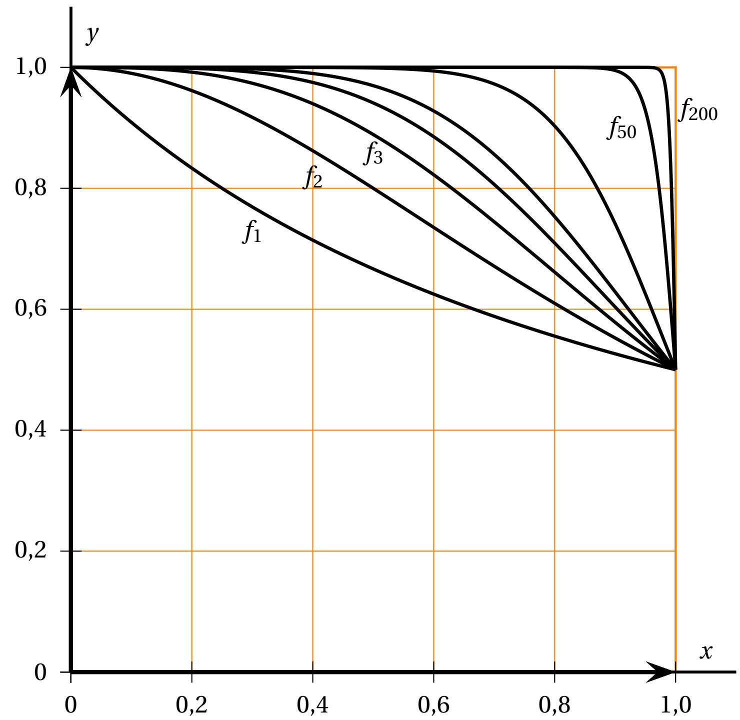
où a est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction g.

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation

$$(x-1)\mathrm{e}^{2x} - 1 - x = 0.$$

Dans la suite, on définit sur $[0 ; +\infty[$ la fonction f par $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{2x} - 1 - x$ pour tout réel $x \geqslant 0$.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.
   Vérifier que $f'(0) = -2$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.
2. On note f'' la fonction dérivée de f'.
   Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f''(x) = 4x\mathrm{e}^{2x}$.
3. Montrer que, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0.
4. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, puis montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; x_0]$.



b. Calculer $f(2)$.
En déduire que sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur.
Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.

5. On admet sans démonstration que la longueur L de la chaîne est donnée par l'expression

$$L = \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Calculer la longueur de la chaîne ayant une tension minimale aux extrémités, en prenant $1,2$ comme valeur approchée du nombre a.*

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.
En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Calculer la valeur exacte de I_1.

3. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $I_n \leqslant 1$.

4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}.$$

5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(1 - x^n\right)\,\mathrm{d}x$.
6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.
7. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n, p et k sont des entiers naturels
	x et I sont des réels
Initialisation :	I prend la valeur 0
Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 1$
	Demander un entier $p \geqslant 1$
	Pour k allant de 0 à $p-1$ faire :
	x prend la valeur $\dfrac{k}{p}$
	I prend la valeur $I + \dfrac{1}{1+x^n} \times \dfrac{1}{p}$
	Fin Pour
	Afficher I

a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n = 2$ et $p = 5$?
On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

b. Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n.*

Exercice 4 **5 points**
Candidats ayant choisi la spécialité mathématique

Partie A

Le but de celle partie est de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini en raisonnant par l'absurde.

1. On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers notés p_1, $p_2, \ldots, p_n$.
On considère le nombre E produit de tous les nombres premiers augmenté de 1 :

$$E = p_1 \times p_{\,2} \times \cdots \times p_n + 1.$$

Démontrer que E est un entier supérieur ou égal à 2, et que E est premier avec chacun des nombres p_1, $p_2, \ldots, p_n$.
2. En utilisant le fait que E admet un diviseur premier conclure.

Partie B

Pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on pose $M_k = 2^k - 1$.
On dit que M_k est le k-ième nombre de Mersenne.

1. **a.** Reproduire et compléter le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de M_k :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3								

   b. D'après le tableau précédent, si k est un nombre premier, peut-on conjecturer que le nombre M_k est premier?

2. Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

   a. Justifier l'égalité : $1+2^p+(2^p)^2+(2^p)^3+\cdots+(2^p)^{q-1} = \dfrac{(2^p)^q-1}{2^p-1}$.

   b. En déduire que $2^{pq}-1$ est divisible par 2^p-1.

   c. En déduire que si un entier k supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors M_k ne l'est pas non plus.

3. **a.** Prouver que le nombre de Mersenne M_{11} n'est pas premier.

   b. Que peut-on en déduire concernant la conjecture de la question 1. b. ?

Partie C

Le test de Lucas-Lehmer permet de déterminer si un nombre de Mersenne donné est premier. Ce test utilise la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2.$$

Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le test permet d'affirmer que le nombre M_n est premier si et seulement si $u_{n-2} \equiv 0 \quad \text{modulo } M_n$. Cette propriété est admise dans la suite.

1. Utiliser le test de Lucas-Lehmer pour vérifier que le nombre de Mersenne M_5 est premier

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
L'algorithme suivant, qui est incomplet, doit permettre de vérifier si le nombre de Mersenne M_n est premier, en utilisant le test de Lucas-Lehmer.

Variables :	u, M, n et i sont des entiers naturels
Initialisation :	u prend la valeur 4
Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 3$
	M prend la valeur ......
	Pour i allant de 1 à ... faire
	u prend la valeur ...
	Fin Pour
	Si M divise u alors afficher « M .... »
	sinon afficher « M .... »

Recopier et compléter cet algorithme de façon à ce qu'il remplisse la condition voulue. *

Baccalauréat S Métropole 19 juin 2014

EXERCICE 1 — **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x + \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Justifier que $\mathscr{C}_1$ passe par le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1. On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

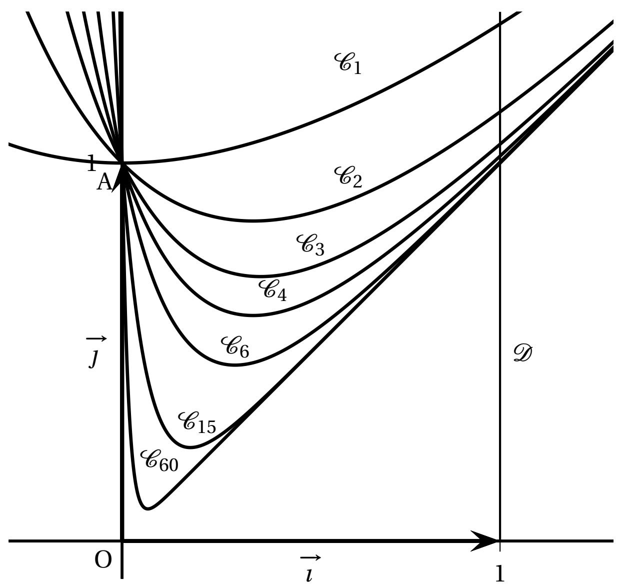
L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-nx}\right)\,\mathrm{d}x.$$

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{-nx}.$$

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathscr{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = 1$.



   a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.

   b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^{x}\right)\,\mathrm{d}x.$$

   En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).*

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est $0,99$;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est $0,001$.

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.

On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

a. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

b. Démontrer que la probabilité $p(T)$ de l'évènement T est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.

c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? Justifier la réponse.

Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à $0,95$. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.

À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant?

Partie B

La chaine de production du laboratoire fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.

1. Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\ \sigma^2\right)$, de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

a. Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme. On arrondira à 10^{-2}.

b. Déterminer l'entier positif h tel que $P(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h) \approx 0,99$ à 10^{-3} près.

2. La chaine de production a été réglée dans le but d'obtenir au moins 97 % de comprimés conformes. Afin d'évaluer l'efficacité des réglages, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de 1 000 comprimés dans la production. La taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1 000 tirages successifs avec remise.

Le contrôle effectué a permis de dénombrer 53 comprimés non conformes sur l'échantillon prélevé.

Ce contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire? On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %. *

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

On désigne par (E) l'équation

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.

Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\dfrac{\pi}{3}$.

Calculer a^2 sous forme algébrique.

En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.

3. Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x+\text{i}y$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in R$, le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = x - \text{i}y$.

Démontrer que :

- Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
- Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\overline{z}$ est également une solution de (E).

En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

*

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}~;~\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).

On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (DF).

a. Donner les coordonnées des points D et F.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

d. Calculer les coordonnées du point H.

e. Démontrer que l'angle $\widehat{\text{EHG}}$ est un angle droit.

2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{\text{D}M} = t\overrightarrow{\text{DF}}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{\text{E}M\text{G}}$.

Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.

a. Démontrer que $M\text{E}^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$.

b. Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.

En déduire que $M\text{E}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

c. Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.

En déduire que α est maximale si et seulement si $M\text{E}^2$ est minimal.

d. Conclure.*

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un pisciculteur dispose de deux bassins A et B pour l'élevage de ses poissons. Tous les ans à la même période :

- il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B ;
- la vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A.

  Par ailleurs, le pisciculteur achète en plus 200 poissons pour le bassin A et 100 poissons pour le bassin B.

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on note respectivement a_n et b_n les effectifs de poissons des bassins A et B au bout de n années.

En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est $a_0 = 200$ et celui du bassin B est $b_0 = 100$.

1. Justifier que $a_1 = 400$ et $b_1 = 300$ puis calculer a_2 et b_2.

2. On désigne par A et B les matrices telles que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$.

b. Déterminer les réels x et y tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.

c. Pour tout entier naturel n, on pose $Y_n = \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix}$.

Démontrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1} = AY_n$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = Y_{2n}$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = A^2 Z_n$. En déduire que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = 2Z_n$.

b. On admet que cette relation de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel n,

$$Y_{2n} = 2^n Y_0.$$

En déduire que $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$ puis démontrer que pour tout entier naturel n,

$$a_{2n} = 600 \times 2^n - 400 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400.$$

4. Le bassin A a une capacité limitée à 10 000 poissons.

a. On donne l'algorithme suivant.

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.

Traitement :	Si p est pair
	    Affecter à n la valeur $\dfrac{p}{2}$
	    Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$.
	Sinon
	    Affecter à n la valeur $\dfrac{p-1}{2}$
	    Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$.
	Fin de Si.

Sortie :	Afficher a.

Que fait cet algorithme ? Justifier la réponse.

b. Écrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A.*

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane 11 septembre 2014

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.

À l'issue des tests, il est noté que

- 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
- 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

- N l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;
- A l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

Partie A

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.
2. Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est 0,876 3.
3. Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage ...). On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que $P(D \leqslant 4) = 0,5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.
   Calculer la valeur exacte de λ.
2. On prendra ici $\lambda = 0{,}173\,3$.
   Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.
   Calculer la probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J, où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ. Il apparaît que $\mu = 358$ jours.

1. Soit $X = \dfrac{J - 358}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par X ?
2. On sait que $P(J \leqslant 385) = 0,975$. Déterminer la valeur de σ arrondie à l'entier le plus proche.*

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x\text{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0~;~+\infty[$.

On donne en **annexe** la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère du plan. La droite Δ d'équation $y = x$ a aussi été tracée.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Placer sur le graphique donné en **annexe**, en utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ, les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. Laisser les tracés explicatifs apparents.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $x\mathrm{e}^{-x} = x$.
Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.

Partie C

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Compléter l'algorithme donné en **annexe** afin qu'il calcule S_{100}.*

EXERCICE 3 **3 points**
Commun à tous les candidats

On considère l'équation (E_1) :

$$\mathrm{e}^x - x^n = 0$$

où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) :

$$\ln(x) - \frac{x}{n} = 0.$$

2. Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?*

EXERCICE 4 **5 points**
Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.
Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ par la fonction f.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
On laissera les traits de construction apparents.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$|f(z)-8|=3.$$

Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\;;\;0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
Tracer (F) sur le graphique.

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z=x+\mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.

a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

$$x^2-y^2+2x+9+\mathrm{i}(2xy+2y).$$

b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).*

EXERCICE 4 **5 points**
Réservé aux candidats ayant suivi la spécialité

Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y.
D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X est transférée à l'agence Y, et réciproquement. De plus, chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.

Soit n un entier naturel. On note x_n la quantité de fonds détenue par l'agence X, et y_n la quantité de fonds détenue par l'agence Y au 1er janvier de l'année $2014+n$, exprimées en millions d'euros.

On note U_n la matrice $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ et on note $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
On suppose que le 1er janvier de l'année 2014, l'agence X possède 50 millions d'euros et l'agence Y possède 10 millions d'euros.
L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation suivante :

$$U_{n+1}=AU_n+B,\text{ où } A=\begin{pmatrix}0,6&0,15\\0,2&0,4\end{pmatrix}\text{ et } B=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}.$$

1. Interpréter dans le contexte de l'exercice le coefficient 0,6 de la matrice A et le coefficient 3 de la matrice B.

2. Donner la matrice U_0 puis calculer la quantité de fonds détenue par chacune des agences X et Y en 2015, exprimée en millions d'euros.

3. On note $D=\begin{pmatrix}0,3&0\\0&0,7\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&3\\-2&2\end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix}0,25&-0,375\\0,25&0,125\end{pmatrix}$.

a. Donner sans détailler le calcul, la matrice PDQ.

b. Expliciter le calcul du coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne du produit matriciel QP. Dans la suite, on admettra que $QP=I$.

On admettra dans la suite de cet exercice que pour tout entier naturel non nul n,
$A^n=PD^nQ$.

4. On pose pour tout entier naturel n, $V_n=U_n-\begin{pmatrix}5\\20/3\end{pmatrix}$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1}=AV_n$.

b. Déterminer V_0 puis pour tout entier naturel n, donner l'expression de V_n en fonction de A, n et V_0.

5. Soit n un entier naturel. On admet que

$$A^n=\begin{pmatrix}0,25\times0,3^n+0,75\times0,7^n & 0,375\,(-0,3^n+0,7^n)\\ 0,5\,(-0,3^n+0,7^n) & 0,75\times0,3^n+0,25\times0,7^n\end{pmatrix}.$$

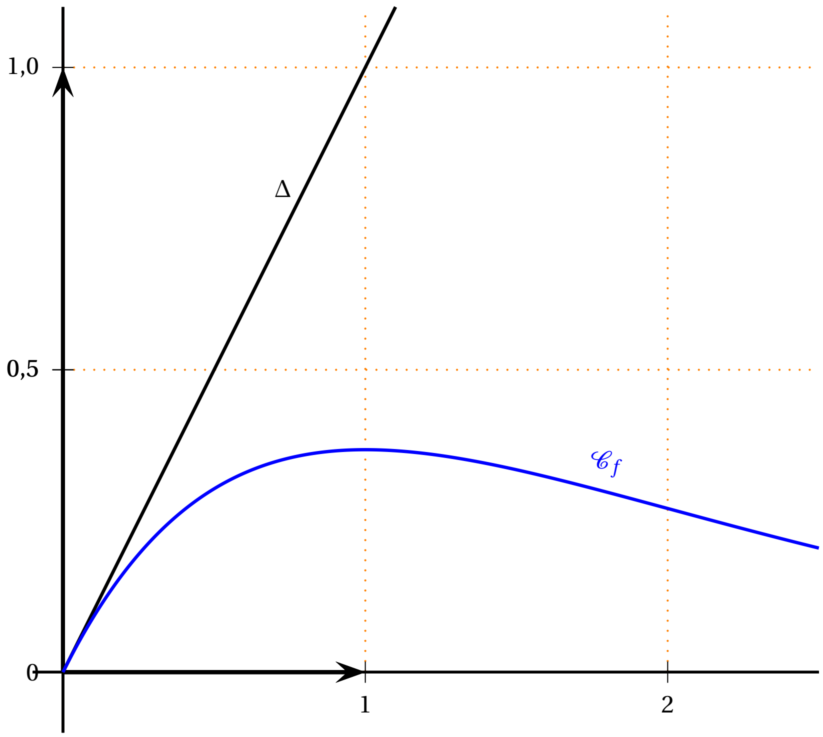
a. Déterminer le coefficient de la première ligne de la matrice V_n en détaillant les calculs.

b. En déduire l'expression de x_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le cadre du problème.*

Annexe de l'exercice 2 à rendre avec la copie

Partie B - Question 1



Partie C

Déclaration des variables :

S et u sont des nombres réels

k est un nombre entier

Initialisation :

u prend la valeur ......

S prend la valeur ......

Traitement :

Pour k variant de 1 à ....

u prend la valeur $u \times \text{e}^{-u}$

S prend la valeur ....

Fin Pour

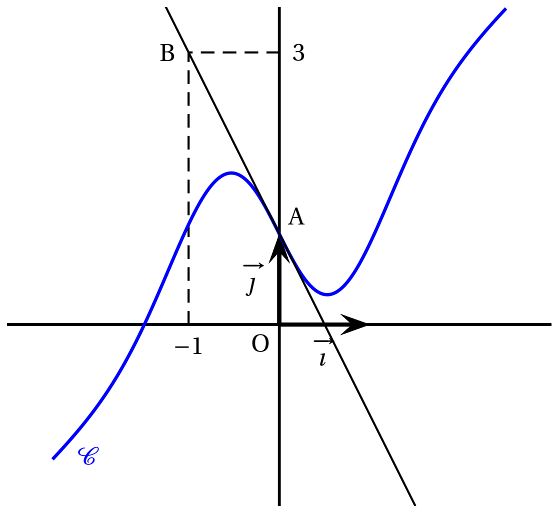
Afficher ......

Baccalauréat S Métropole–La Réunion 11 septembre 2014

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, une courbe $\mathscr{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives (0; 1) et (−1 ; 3).



On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$.
On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 + ax\mathrm{e}^{-x^2}.$$

1. **a.** Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A.

   b. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

   c. Démontrer que pour tout réel x,

   $$f'(x) = 1 - a\left(2x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

   d. On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
   Déterminer la valeur du réel a.

2. D'après la question précédente, pour tout réel x,

   $$f(x) = x + 1 - 3x\mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{et} \quad f'(x) = 1 + 3\left(2x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

   a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1 ; 0]$, $f(x) > 0$.

   b. Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1, $f'(x) > 0$.

   c. Démontrer qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2} ; -1\right]$ tel que $f(c) = 0$.

   Justifier que $c < -\frac{3}{2} + 2.10^{-2}$.

3. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine défini par :

   $$c \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

   a. Écrire $\mathscr{A}$ sous la forme d'une intégrale.

   b. On admet que l'intégrale $I = \int_{-\frac{3}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est une valeur approchée de $\mathscr{A}$ à 10^{-3} près.

   Calculer la valeur exacte de l'intégrale I. *

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants : sans réservation ou avec réservation préalable.

1. Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients.
   On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif. On rappelle que l'espérance mathématique de X est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.
   Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.
   a. Déterminer la valeur de λ.
   b. Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.
   c. Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.
2. Le deuxième restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à 0,8.
   On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.
   On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale.

   a. Préciser, en fonction de n, les paramètres de la loi de la variable aléatoire Y, son espérance mathématique $E(Y)$ et son écart-type $\sigma(Y)$.
   b. Dans cette question, on désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 64,8$ et d'écart-type $\sigma = 3,6$.
   Calculer la probabilité p_1 de l'évènement $\{Z \leqslant 71\}$ à l'aide de la calculatrice.
   c. On admet que lorsque $n = 81$, p_1 est une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $p(Y \leqslant 70)$ de l'évènement $\{Z \leqslant 70\}$.
   Le restaurant a reçu 81 réservations.
   Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas accueillir certains des clients qui ont réservé et se présentent ?*

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.
Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.
   a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   b. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.
   c. Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Justifier la réponse.
2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit.
   Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.
   Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute n.
   L algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

Variables :	n est un entier naturel.
	v est un nombre réel.
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10.
Traitement :	Pour n allant de 1 à 15
	Affecter à v la valeur $0,8 \times v$.
	Si $v < 5$ alors affecter à v la valeur $v + 4$
	Afficher v.
	Fin de boucle.

a. Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4					8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

b. Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?

c. On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.

Recopier l'algorithme précédent en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.

3. On programme la machine de façon que :

- à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
- toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.

Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

a. Justifier que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 0,8w_n + 1$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = w_n - 5$.

Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

d. Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?*

EXERCICE 4 — 5 POINTS

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le tétraèdre ABCD dont les sommets ont pour coordonnées :

$$\text{A}\left(1\,;\,-\sqrt{3}\,;\,0\right)\,;\ \text{B}\left(1\,;\,\sqrt{3}\,;\,0\right)\,;\ \text{C}(-2\,;\,0\,;\,0)\,;\ \text{D}\left(0\,;\,0\,;\,2\sqrt{2}\right).$$

1. Démontrer que le plan (ABD) a pour équation cartésienne $4x + z\sqrt{2} = 4$.

2. On note $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t\\ y &=& 0\\ z &=& t\sqrt{2}\end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}$$

a. Démontrer que $\mathscr{D}$ est la droite qui est parallèle à (CD) et passe par O.

b. Déterminer les coordonnées du point G, intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (ABD).

3. a. On note L le milieu du segment [AC].

Démontrer que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC).

b. Prouver que le triangle ABC est équilatéral et déterminer le centre de son cercle circonscrit.

4. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier c'est-à-dire un tétraèdre dont les six arêtes ont la même longueur.*

EXERCICE 4 — 5 POINTS

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le cadre d'une étude sur les interactions sociales entre des souris, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces compartiments est ouverte pendant dix minutes tous les jours à midi.

On étudie la répartition des souris dans les deux compartiments. On estime que chaque jour :

- 20 % des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après fermeture de la porte,
- 10 % des souris qui étaient dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après fermeture de la porte.

On suppose qu'au départ, les deux compartiments A et B contiennent le même effectif de souris. On pose $a_0 = 0,5$ et $b_0 = 0,5$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n et b_n les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B au bout de n jours, après fermeture de la porte. On désigne par U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Soit n un entier naturel.

a. Justifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}$.

b. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

c. En déduire que $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice que l'on précisera.
On admet sans démonstration que $U_n = M^n U_0$.

d. Déterminer la répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours.

2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer P^2. En déduire que P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{3}P$.

b. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
$M^n = PD^nP^{-1}$.
À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient

$$M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+2\times 0,7^n}{3} & \dfrac{1-0,7^n}{3} \\ \dfrac{2-2\times 0,7^n}{3} & \dfrac{2+0,7^n}{3} \end{pmatrix}.$$

3. En s'aidant des questions précédentes, que peut-on dire de la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B de la cage ? *

∽ Baccalauréat série S Amérique du Sud 17 novembre 2014 ∾

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise est spécialisée dans la fabrication de ballons de football. Cette entreprise propose deux tailles de ballons :

- une petite taille,
- une taille standard.

Les trois parties suivantes sont indépendantes.

Partie A

Un ballon de football est conforme à la réglementation s'il respecte, suivant sa taille, deux conditions à la fois (sur sa masse et sur sa circonférence).

En particulier, un ballon de taille standard est conforme à la réglementation lorsque sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle $[410 ; 450]$ et sa circonférence, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle $[68 ; 70]$.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise, associe sa masse en grammes.
   On admet que X suit la loi normale d'espérance 430 et d'écart type 10.
   Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité
   $P(410 \leqslant X \leqslant 450)$.
2. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise associe sa circonférence en centimètres.
   On admet que Y suit la loi normale d'espérance 69 et d'écart type σ.
   Déterminer la valeur de σ, au centième près, sachant que 97 % des ballons de taille standard ont une circonférence conforme à la réglementation.
   On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, alors $P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta) = 0,97$ pour $\beta \approx 2,17$.

Partie B

L'entreprise affirme que 98 % de ses ballons de taille standard sont conformes à la réglementation. Un contrôle est alors réalisé sur un échantillon de 250 ballons de taille standard. Il est constaté que 233 d'entre eux sont conformes à la réglementation.

Le résultat de ce contrôle remet-il en question l'affirmation de l'entreprise ? Justifier la réponse.

(On pourra utiliser l'intervalle de fluctuation)

Partie C

L'entreprise produit 40 % de ballons de football de petite taille et 60 % de ballons de taille standard.

On admet que 2 % des ballons de petite taille et 5 % des ballons de taille standard ne sont pas conformes à la réglementation. On choisit un ballon au hasard dans l'entreprise.

On considère les évènements :

A : « le ballon de football est de petite taille »,

B : « le ballon de football est de taille standard »,

C : « le ballon de football est conforme à la réglementation » et $\overline{C}$, l'évènement contraire de C.

1. Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Calculer la probabilité que le ballon de football soit de petite taille et soit conforme à la règlementation.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à $0,962$.
4. Le ballon de football choisi n'est pas conforme à la réglementation. Quelle est la probabilité que ce ballon soit de petite taille ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.*

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est correcte. Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'enlève pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

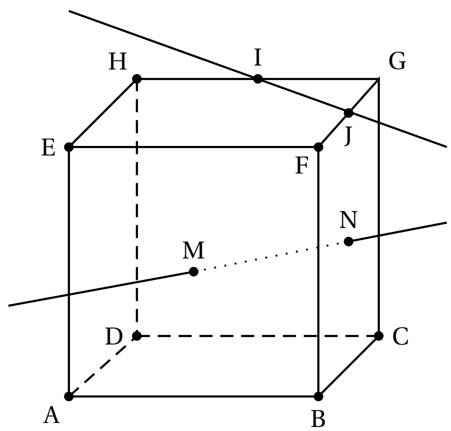
1. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points A(2 ; 5 ; −1), B(3; 2; 1) et C(1 ; 3 ; −2). Le triangle ABC est :
   a. rectangle et non isocèle
   b. isocèle et non rectangle
   c. rectangle et isocèle
   d. équilatéral
2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan P d'équation $2x - y + 3z - 1 = 0$ et le point A(2 ; 5 ; −1). Une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan P et passant par A est :

a. $\left\{\begin{array}{l c r} x & = & 2+2t \\ y & = & 5+t \\ z & = & -1+3t \end{array}\right.$ **b.** $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 2+2t \\ y & = & -1+5t \\ z & = & 3-t \end{array}\right.$ **c.** $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 6-2t \\ y & = & 3+t \\ z & = & 5-3t \end{array}\right.$ **d.** $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 1+2t \\ y & = & 4-t \\ z & = & -2+3t \end{array}\right.$

3. Soit A et B deux points distincts du plan. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est :

a. l'ensemble vide **b.** la médiatrice du segment [AB] **c.** le cercle de diamètre [AB] **d.** la droite (AB)

4. La figure ci-dessous représente un cube ABCDEFGH. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes [GH] et [FG]. Les points M et N sont les centres respectifs des faces ABFE et BCGF.



Les droites (IJ) et (MN) sont :
   a. perpendiculaires
   b. sécantes, non perpendiculaires
   c. orthogonales
   d. parallèles *

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par :
$v_n = u_n - 3$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n^2$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.
3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\dfrac{1}{2}v_n + 1\right)$.

   b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
4. Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite (v_n) converge ?
5. On note ℓ la limite de la suite (v_n).

   On admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1\,;\,0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\dfrac{1}{2}\ell^2$.

   Déterminer la valeur de ℓ.
6. Les conjectures faites dans la **partie A** sont-elles validées ?*

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une ville possède un réseau de vélos en libre service dont deux stations A et B se situent en haut d'une colline. On admet qu'aucun vélo des autres stations n'arrive en direction des stations A et B.

On constate pour chaque heure n qu'en moyenne :
- 20 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station A sont toujours à cette station.

60 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station A sont à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
- 10 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station B sont à la station A, 30 % sont toujours à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
- Au début de la journée, la station A comporte 50 vélos, la station B 60 vélos.

Partie A

Au bout de n heures, on note a_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et b_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et donc $U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice M telle que $U_{n+1} = M \times U_n$.
2. Déterminer U_1 et U_2.
3. Au bout de combien d'heures reste-t-il un seul vélo dans la station A ?

Partie B

Le service décide d'étudier les effets d'un approvisionnement des stations A et B consistant à apporter après chaque heure de fonctionnement 30 vélos à la station A et 10 vélos à la station B.
Afin de conduire cette étude, il décide de modéliser la situation présente de la manière suivante :

Au bout de n heures, on note α_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et β_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note V_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions $V_{n+1} = M \times V_n + R$ avec $R = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$.

1. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I - M$.
   - **a.** On désigne par V une matrice colonne à deux lignes.
     Montrer que $V = M \times V + R$ équivaut à $N \times V = R$.
   - **b.** On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix}$.

     En déduire que $V = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$
2. Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = V_n - V$.
   - **a.** Montrer que $W_{n+1} = M \times W_n$.
   - **b.** On admet que : – pour tout entier naturel n, $W_n = M^n \times W_0$,

     – pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $M^n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$.

     Calculer, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, V_n en fonction de n.
   - **c.** Le nombre moyen de vélos présents dans les stations A et B a-t-il tendance à se stabiliser ? *

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

On désire réaliser un portail comme indiqué à l'annexe 1. Chaque vantail mesure 2 mètres de large.

Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x} + b$$

où b est un nombre réel. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.

1. **a.** Calculer $f'(x)$, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,2]$.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.
2. Déterminer le nombre b pour que la hauteur maximale du portail soit égale à 1,5 m.

Dans la suite la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x} + \frac{5}{4}.$$

Partie B : détermination d'une aire

Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique. On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est à 0,05 m de hauteur du sol.

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par

$$F(x) = \left(-\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right)\mathrm{e}^{-4x} + \frac{5}{4}x$$

est une primitive de la fonction f.

2. En déduire l'aire en m^2 de chaque vantail. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de cette aire. (On s'intéresse ici à l'objet « vantail » sans faire référence à son environnement).

Partie C : utilisation d'un algorithme

On désire réaliser un portail de même forme mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur 0,12 m, espacées de 0,05 m. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail (voir l'annexe 2 de l'exercice 4) et le bas de chaque planche à 0,05 m de hauteur. Les planches sont numérotées à partir de 0 : ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.

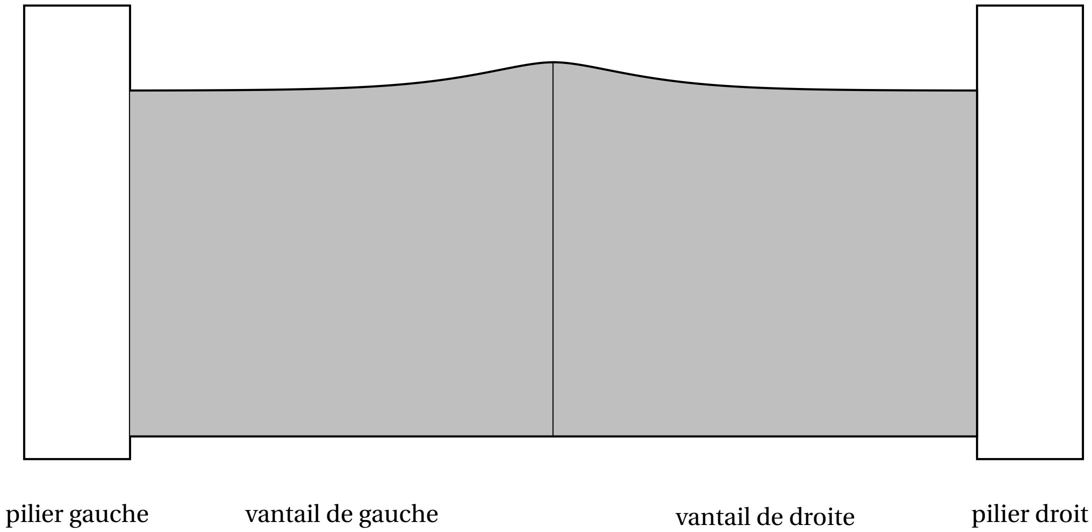
1. Donner l'aire de la planche numéro k.

2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la somme des aires des planches du vantail de droite.

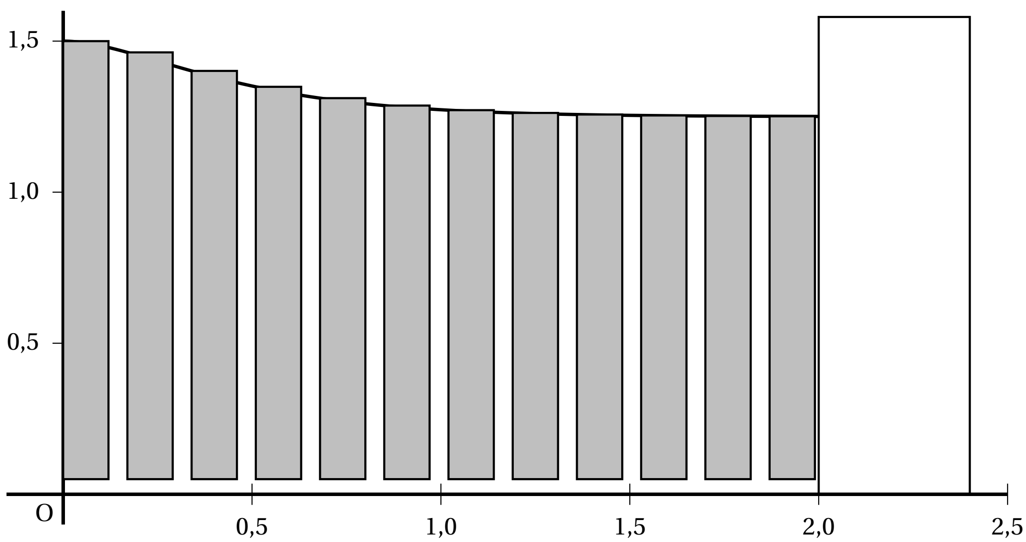
Variables :	Les nombres X et S sont des nombres réels
Initialisation :	On affecte à S la valeur 0
	On affecte à X la valeur 0
Traitement :	**Tant Que** $X + 0,17 < \ldots$
	S prend la valeur $S + \ldots$.
	X prend la valeur $X + 0,17$
	Fin de Tant Que
Affichage :	On affiche S

*

Annexe 1 de l'exercice 4



Annexe 2 de l'exercice 4



La distance entre le bas du portail et le sol est de 0,05 m. *

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ∾ 17 novembre 2014

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

*Les trois parties **A, B** et **C** sont indépendantes*

Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des cônes de glace.

Partie A

Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2 000 pour la vente en gros.
On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à $0,003$.
On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2 000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans ce lot.
On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.
2. Si un client reçoit un lot contenant au moins 12 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de celui-ci.
   Déterminer la probabilité qu'un lot ne soit pas échangé ; le résultat sera arrondi au millième.

Partie B

Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de crème glacée qu'il contient.
On suppose que Y suit une loi normale $\mathcal{N}\left(110\,;\,\sigma^2\right)$, d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type σ.
Une glace est considérée comme commercialisable lorsque la masse de crème glacée qu'elle contient appartient à l'intervalle $[104\,;\,116]$.
Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près du paramètre σ telle que la probabilité de l'évènement « la glace est commercialisable » soit égale à $0,98$.

Partie C

Une étude réalisée en l'an 2000 a permis de montrer que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces était de 84 %.
En 2010, sur 900 personnes interrogées, 795 d'entre elles déclarent consommer des glaces.
Peut-on affirmer, au niveau de confiance de 95 % et à partir de l'étude de cet échantillon, que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre les années 2000 et 2010 ? *

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Dans les questions **1.** et **2.**, le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

1. **Affirmation 1 :**
   Le point d'affixe $(-1+\text{i})^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire.
2. **Affirmation 2 :**
   Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation
   $$z - \overline{z} + 2 - 4\text{i} = 0$$
   admet une solution unique.
3. **Affirmation 3 :**
   $\ln\left(\sqrt{\text{e}^7}\right) + \dfrac{\ln\left(\text{e}^9\right)}{\ln\left(\text{e}^2\right)} = \dfrac{\text{e}^{\ln 2+\ln 3}}{\text{e}^{\ln 3-\ln 4}}$
4. **Affirmation 4 :**
   $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{\text{e}^x}{\text{e}^x+2}\,\text{d}x = -\ln\left(\frac{3}{5}\right)$
5. **Affirmation 5 :**
   L'équation $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln 4$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.*

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On donne les points A(1 ; 0 ; −1), B(1 ; 2 ; 3), C(−5 ; 5 ; 0) et D(11 ; 1 ; −2).
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].
Le point K est défini par $\overrightarrow{\text{BK}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{BC}}$.

1. **a.** Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
   b. Démontrer que les points I, J et K définissent un plan.
   c. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (3; 1; 4) est un vecteur normal au plan (IJK).
   En déduire une équation cartésienne de ce plan.
2. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3x + y + 4z - 8 = 0$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BD).
   b. Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ et la droite (BD) sont sécants et donner les coordonnées de L, point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (BD).
   c. Le point L est-il le symétrique du point D par rapport au point B ? *

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi renseignement de spécialité

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}.$$

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
On a tracé en **annexe 1** dans un repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. On note α la solution.
   On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Sur la figure de **annexe 1**, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.
   Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
4. **a.** Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n,
   $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$
   où α est le réel défini dans la question 2.
   b. Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.
5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$
   a. Calculer S_0, S_1 et S_2. Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.
   b. Compléter l'algorithme donné en **annexe 2** pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.
   c. Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère l'algorithme suivant, où A et B sont des entiers naturels tels que $A < B$:

Entrées :	A et B entiers naturels tels que $A < B$
Variables :	D est un entier Les variables d'entrées A et B
Traitement :	
	Affecter à D la valeur de $B - A$

	Tant que $D > 0$
	B prend la valeur de A
	A prend la valeur de D
	  Si $B > A$ Alors
	    D prend la valeur de $B - A$
	  Sinon
	    D prend la valeur de $A - B$
	  Fin Si
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher A

1. On entre $A = 12$ et $B = 14$.
   En remplissant le tableau donné en **annexe**, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.
2. Cet algorithme calcule la valeur du PGCD des nombres A et B.
   En entrant $A = 221$ et $B = 331$, l'algorithme affiche la valeur 1.
   a. Justifier qu'il existe des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation

   $$\text{(E)} \qquad 221x - 331y = 1.$$

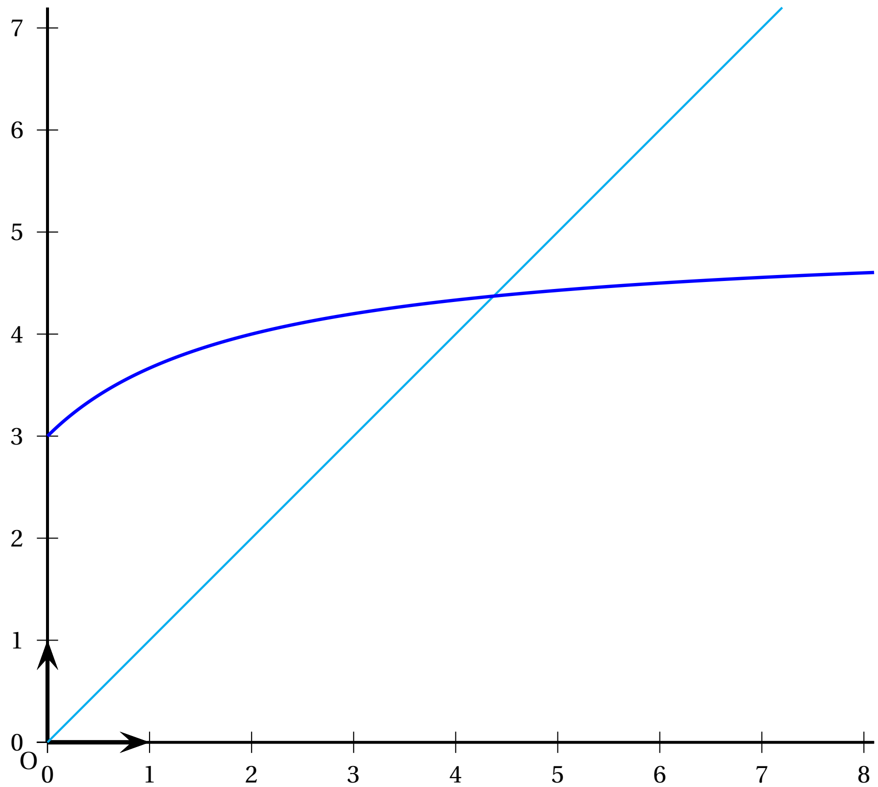
   b. Vérifier que le couple (3 ; 2) est une solution de l'équation (E).
   En déduire l'ensemble des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
3. On considère les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par

   $$u_n = 2 + 221n \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 3 \\ v_{n+1} & = & v_n + 331 \end{array}\right.$$

   a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n.
   b. Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(p ; q)$ tels que
   $u_p = v_q, \quad 0 \leqslant p \leqslant 500 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant q \leqslant 500.$ *

Annexe 1 de l'exercice 4 à rendre avec la copie

réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Annexe 2 de l'exercice 4 à rendre avec la copie

réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Entrée :	n un entier naturel
Variables :	u et s sont des variables réelles
	n et i sont des variables entières
Initialisation :	u prend la valeur 1
	s prend la valeur u
	i prend la valeur 0
	Demander la valeur de n
Traitement :	Tant que ...
	Affecter à i la valeur $i+1$
	Affecter à u la valeur ...
	Affecter à s la valeur ...
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher s.

Annexe de l'exercice 4 à rendre avec la copie

réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

A	B	D
12	14	

Durée : 4 heures

Baccalauréat S (obligatoire) Nouvelle-Calédonie 5 mars 2015

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Soit a un nombre réel strictement positif.
On note Δ_a la droite d'équation $y = ax$ et Γ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans le repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection de Γ et Δ_a suivant les valeurs de a.
Pour cela. on considère la fonction f_a définie pour tout nombre réel x par

$$f_a(x) = \mathrm{e}^x - ax.$$

On admet pour tout réel a que la fonction f_a est dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. **Étude du cas particulier** $a = 2$
   La fonction f_2 est donc définie pour tout x réel par $f_2(x) = \mathrm{e}^x - 2x$.
   a. Étudier les variations de la fonction f_2 sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$ (*on ne demande pas de déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.*
   b. En déduire que Γ et Δ_2 n'ont pas de point d'intersection.
2. **Étude du cas général où a est un réel strictement positif**
   a. Déterminer les limites de la fonction f_a en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Étudier les variations de la fonction f_a sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_a est $a - a\ln a$.
   c. Étudier le signe de $a - a\ln a$ suivant les valeurs du nombre réel strictement positif a.
   d. Déterminer selon les valeurs du réel a le nombre de points communs à Γ et Δ_a.*

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique des puces électroniques qui sont utilisées pour des matériels aussi différents que des téléphones portables, des lave-linge ou des automobiles.
À la sortie de fabrication, 5 % d'entre elles présentent un défaut et sont donc éliminées. Les puces restantes sont livrées aux clients.
On dit qu'une puce a une durée de vie courte si cette durée de vie est inférieure ou égale à 1 000 heures. On observe que 2 % des puces livrées ont une durée de vie courte.
On note L l'évènement « La puce est livrée ».
On note C l'évènement « La puce a une durée de vie courte c'est-à-dire inférieure ou égale à 1 000 heures ».
Étant donné deux évènements A et B, on note $P_A(B)$ la probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé.
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On tire au hasard une puce fabriquée par l'entreprise.
   a. Donner la valeur $P_L(C)$.
   b. Quelle est la probabilité que la puce soit livrée et ait une durée de vie strictement supérieure à 1 000 heures ?
   c. Quelle est la probabilité que la puce soit éliminée ou ait une durée de vie courte à la sortie de la chaine de fabrication ?

   Dans la suite de l'exercice on s'intéresse seulement aux puces livrées aux clients.

2. On appelle X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie en heures d'une telle puce.
   On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
   a. Montrer que $\lambda = \dfrac{-\ln(0,98)}{1000}$.

b. Calculer la probabilité qu'une puce ait une durée de vie supérieure à 10 000 heures. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

c. Calculer $P(20\,000 \leqslant X \leqslant 30\,000)$. On arrondira le résultat à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat.

3. Les ingénieurs de l'entreprise ont mis au point un nouveau procédé de fabrication. On suppose qu'avec ce nouveau procédé la probabilité qu'une puce livrée donnée ait une durée de vie courte est égale à $0,003$.

On prélève au hasard 15 000 puces prêtes à être livrées- On admettra que ce prélèvement de 15 000 puces revient à effectuer un tirage avec remise de 15 000 puces parmi l'ensemble de toutes les puces électroniques produites par l'entreprise et prêtes à être livrées.

On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de puces ayant une vie courte dans cet échantillon.

a. Justifier que Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 15\,000$ et $p = 0,003$.

b. Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.

c. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité $P(40 \leqslant Y \leqslant 50)$.*

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On rappelle que deux droites de l'espace sont dites perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et sécantes.

Soient le point A_1 de coordonnées $(0~;~2~;~-1)$ et le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

On appelle D_1 la droite passant par A_1 et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$.

On appelle D_2 la droite qui admet pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+k\\ y &=& -2k \quad (k \in \mathbb{R}).\\ z &=& 2\end{array}\right.$$

Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'une droite perpendiculaire à la fois à D_1 et D_2.

1. a. Donner une représentation paramétrique de D_1.

b. Donner un vecteur directeur de D_2 $\left(\text{on le notera } \overrightarrow{u_2}\right)$.

c. Le point $A_2(-1~;~4~;~2)$ appartient-il à D_2 ?

2. Démontrer que les droites D_1 et D_2 sont non coplanaires.

3. Soit le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\-3\\4\end{pmatrix}$. On définit la droite Δ_1 passant par A_1 et de vecteur directeur $\vec{v}$ et la droite Δ_2 passant par A_2 et parallèle à Δ_1.

Justifier que les droites D_1 et Δ_1 sont perpendiculaires.

Dans la suite, on admettra que les droites D_2 et Δ_2 sont perpendiculaires.

4. Soit P_1 le plan défini par les droites D_1 et Δ_1 et P_2 le plan défini par les droites D_2 et Δ_2.

a. Soit le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}17\\-22\\9\end{pmatrix}$. Vérifier que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P_1.

b. Montrer que P_1 et P_2 ne sont pas parallèles.

5. Soit Δ la droite d'intersection des plans P_1 et P_2. On admettra que le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ.

Utiliser les questions précédentes pour prouver qu'il existe une droite de l'espace perpendiculaire à la fois à D_1 et à D_2.*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note (u_n) et (v_n) les suites réelles définies, pour tout entier naturel n, par

$$u_0 = 1 \quad v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \sqrt{3}u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + \sqrt{3}v_n \end{array}\right. .$$

1. Calculer les valeurs de u_1, v_1, u_2, v_2.

2. On souhaite construire un algorithme qui affiche les valeurs de u_N et v_N pour un entier naturel N donné.

a. On donne l'algorithme suivant :

Entrée :	N est un nombre entier
Variables :	K est un nombre entier
	S est un nombre réel
	T est un nombre réel
Initialisation :	Affecter 1 à S
	Affecter 0 à T
	Affecter 0 à K
Traitement :	Tant que $K < N$
	Affecter $\sqrt{3}S - T$ à S
	Affecter $S + \sqrt{3}T$ à T
	Affecter $K + 1$ à K
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher S
	Afficher T

Faire fonctionner cet algorithme pour $N = 2$. Pour cela, on recopiera et complétera le tableau de variables ci-dessous :

S	T	K
1	0	0
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1

b. L'algorithme précédent affiche t-il les valeurs de u_N et v_N pour un entier N donné ?

Dans le cas contraire, écrire sur la copie une version corrigée de l'algorithme proposé qui affiche bien les valeurs de u_N et v_N pour un entier N.

3. On pose, pour tout entier naturel n, $z_n = u_n + \mathrm{i}v_n$.

On note a le nombre complexe $a = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = az_n.$$

b. Écrire a sous forme exponentielle.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_n & = & 2^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \\ v_n & = & 2^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \end{array}\right.$$

*

Baccalauréat S Pondichéry 16 avril 2013

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie 1

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique en annexe 1 représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.
On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + b\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.
On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure $0,1$ m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.
Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie 2

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;\,250]$ par

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

1. Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f). En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,250]$.
2. Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à $1,5$ m.
3. **a.** Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,250]$ on a $f(t) = \dfrac{2\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t} + 19}$.
   Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,250]$ par $F(t) = 50\ln\left(\mathrm{e}^{0,04t} + 19\right)$ est une primitive de la fonction f.
   b. Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50\,;\,100]$.
   En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.
4. On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f.
   La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t.
   En utilisant le graphique donné en annexe, déterminer une valeur approchée de celle-ci. Estimer alors la hauteur du plant.*

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions, quatre propositions de réponse sont données dont une seule est exacte. Pour chacune des questions indiquer, sans justification, la bonne réponse sur la copie. Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Il en est de même dans le cas où plusieurs réponses sont données pour une même question.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.
Le plan (P) a pour équation $x - 2y + 3z + 5 = 0$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2 + t + 2t' \\ y &=& -t - 2t' \\ z &=& -1 - t + 3t' \end{array}\right.$

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2 + t \\ y &=& -t \\ z &=& -1 - t \end{array}\right.$

On donne les points de l'espace M$(-1\,;\,2\,;\,3)$ et N$(1\,;\,-2\,;\,9)$.

1. Une représentation paramétrique du plan (P) est :

a. $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & 1-2t \\ z & = & -1+3t \end{array}\right.$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t+2t' \\ y & = & 1-t+\ t' \\ z & = & -1-t \end{array}\right.$

c. $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t+\ t' \\ y & = & 1-t-2t' \\ z & = & 1-t-3t' \end{array}\right.$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+2t+\ t' \\ y & = & 1-2t+2t' \\ z & = & -1\quad -\ t' \end{array}\right.$

2. **a.** La droite (D) et le plan (P) sont sécants au point A(−8 ; 3 ; 2).
   b. La droite (D) et le plan (P) sont perpendiculaires.
   c. La droite (D) est une droite du plan (P).
   d. La droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.
3. **a.** La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.
   b. La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.
   c. La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.
   d. La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.
4. **a.** Les plans (P) et (S) sont parallèles.
   b. La droite (Δ) de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & -2-t \\ z & = & -3-t \end{array}\right.$ est la droite d'intersection des plans (P) et (S).
   c. Le point M appartient à l'intersection des plans (P) et (S).
   d. Les plans (P) et (S) sont perpendiculaires.*

EXERCICE 3 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On note i le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2=-1$.
On considère le point A d'affixe $z_{\mathrm{A}}=1$ et le point B d'affixe $z_{\mathrm{B}}=\mathrm{i}$.
À tout point M d'affixe $z_M=x+\mathrm{i}y$, avec x et y deux réels tels que $y\neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'}=-\mathrm{i}z_M$.
On désigne par I le milieu du segment [AM].
Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que B$M'=2$OI (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend
   $z_M=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   a. Déterminer la forme algébrique de z_M.
   b. Montrer que $z_{M'}=-\sqrt{3}-\mathrm{i}$.
   Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.
   c. Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ en prenant 2 cm pour unité graphique.
   Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.
2. On revient au cas général en prenant $z_M=x+\mathrm{i}y$ avec $y\neq 0$.
   a. Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.
   b. Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.
   c. Écrire les coordonnées des points I, B et M'.
   d. Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.
   e. Montrer que B$M'=2$OI.*

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux.
Pour tout entier naturel n, on note j_n le nombre d'animaux jeunes après n années d'observation et a_n le nombre d'animaux adultes après n années d'observation.
Il y a au début de la première année de l'étude, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes.
Ainsi $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$.
On admet que pour tout entier naturel n on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} j_{n+1} & = & 0,125 j_n + 0,525 a_n \\ a_{n+1} & = & 0,625 j_n + 0,625 a_n \end{array}\right.$$

On introduit les matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

1. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$.
   b. Calculer le nombre d'animaux jeunes et d'animaux adultes après un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).
   c. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de A^n et de U_0.
2. On introduit les matrices suivantes $Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a. On admet que la matrice Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix}$.
   Montrer que $Q \times D \times Q^{-1} = A$.
   b. Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul : $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.
   c. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer D^n en fonction de n.
3. On admet que pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,3 + 0,7 \times (-0,25)^n & 0,42 - 0,42 \times (-0,25)^n \\ 0,5 - 0,5 \times (-0,25)^n & 0,7 \ + 0,3 \ \times (-0,25)^n \end{pmatrix}$$

   a. En déduire les expressions de j_n et a_n en fonction de n et déterminer les limites de ces deux suites.
   b. Que peut-on en conclure pour la population d'animaux étudiée ? *

EXERCICE 4 **6 points**

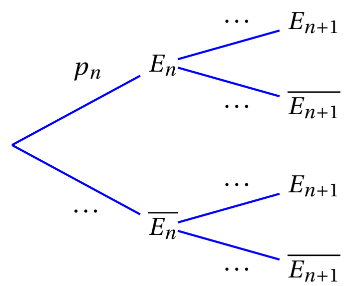
Commun à tous les candidats

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. **a.** Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
   b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
2. **a.** Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

d. En déduire la limite de la suite (p_n).

e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0
	J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que P < $0,05 - 10^{-\text{K}}$
	P prend la valeur $0,2 \times \text{P} + 0,04$
	J prend la valeur J +1
	Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?
Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.
On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.
On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

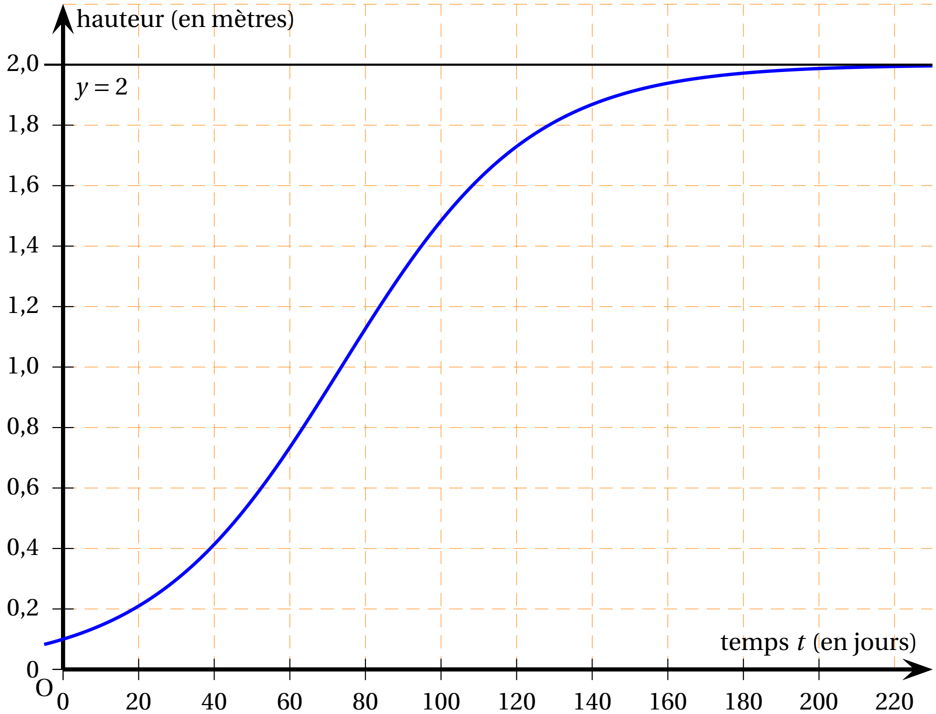
a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

b. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.
On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

x	$-1,55$	$-1,24$	$-0,93$	$-0,62$	$-0,31$	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

Annexe (Exercice 1)



Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat S Amérique du Nord ∾ 30 mai 2013

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$.

a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.

a. Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

b. Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c r} x & = & -4t-2\\ y & = & t\\ z & = & 3t+2 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?*

Exercice 2 **5 points**
Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b. Que permet de calculer cet algorithme ?

c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par
$v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

d. Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

*

Exercice 2 **5 points**

Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a est un entier naturel
	b est un entier naturel
	c est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à c la valeur 0
	Demander la valeur de a
	Demander la valeur de b
Traitement :	Tant que $a > b$
	Affecter à c la valeur $c+1$
	Affecter à a la valeur $a-b$
	Fin de tant que
Sortie :	Afficher c
	Afficher a

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

2. Que permet de calculer cet algorithme ?

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m+5$ par 26 et on le note p.

Étape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.
2. Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

1. Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1 \quad [26]$.
2. Démontrer alors l'équivalence :

$$9m + 5 \equiv p \quad [26] \iff m \equiv 3p - 15 \quad [26].$$

3. Décoder alors la lettre B.*

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.
La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leqslant x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $P(390 \leqslant X \leqslant 410)$.
2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.
3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.
   Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.
   On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leqslant -1,751) \approx 0,040$.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.
Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.
2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.
   Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

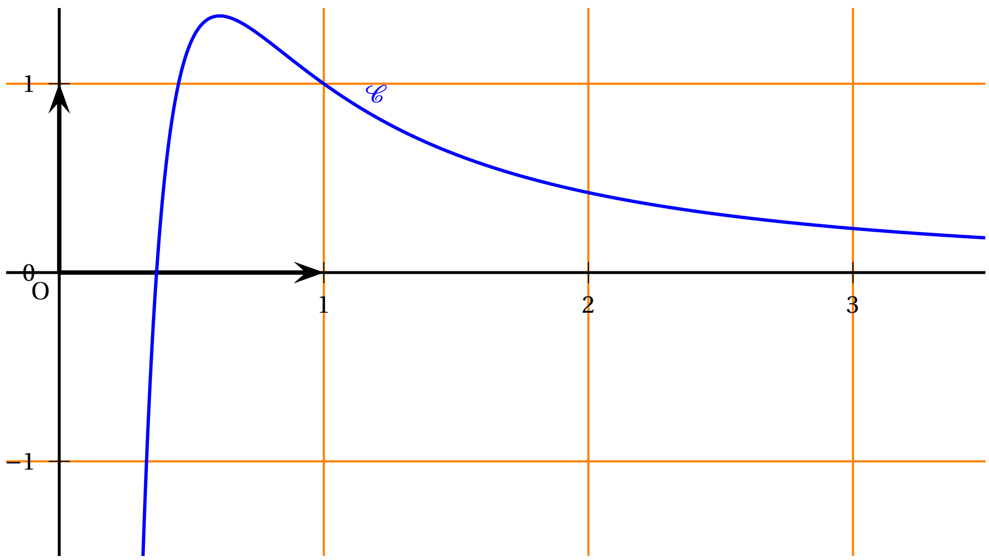
   Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0,003$.
2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?
3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?*

Exercice 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. **a.** Étudier la limite de f en 0.

   b. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.
2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$,

   $$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

   b. Résoudre sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.
3. **a.** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\text{e}}$ et $x = n$.

   a. Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant \text{e} - \dfrac{1}{2}$.
   On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par
   $F(x) = \dfrac{-2-\ln(x)}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

b. Calculer I_n en fonction de n.

c. Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

∽ Baccalauréat S Liban 28 mai 2013 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des propositions est correcte.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives A$(1 ; -1 ; 2)$, B$(3 ; 3 ; 8)$, C$(-3 ; 5 ; 4)$ et D$(1 ; 2 ; 3)$.
On note $\mathcal{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l c r}x &=& t+1\\ y &=& 2t-1\\ z &=& 3t+2\end{array}\right., t \in \mathbb{R}$$

et $\mathcal{D}'$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c r}x &=& k+1\\ y &=& k+3\\ z &=& -k+4\end{array}\right., k \in \mathbb{R}$.

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+y-z+2=0$.

Question 1 :
Proposition **a.** Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.
Proposition **b.** Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires.
Proposition **c.** Le point C appartient à la droite $\mathcal{D}$.
Proposition **d.** Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales.

Question 2 :
Proposition **a.** Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$ et est parallèle à la droite $\mathcal{D}'$.
Proposition **b.** Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}'$ et est parallèle à la droite $\mathcal{D}$.
Proposition **c.** Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$ et est orthogonal à la droite $\mathcal{D}'$.
Proposition **d.** Le plan $\mathcal{P}$ contient les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Question 3 :
Proposition **a.** Les points A, D et C sont alignés.
Proposition **b.** Le triangle ABC est rectangle en A.
Proposition **c.** Le triangle ABC est équilatéral.
Proposition **d.** Le point D est le milieu du segment [AB].

Question 4 :
On note $\mathcal{P}'$ le plan contenant la droite $\mathcal{D}'$ et le point A. Un vecteur normal à ce plan est :
Proposition **a.** $\vec{n}\,(-1 ; 5 ; 4)$
Proposition **b.** $\vec{n}\,(3 ; -1 ; 2)$
Proposition **c.** $\vec{n}\,(1 ; 2 ; 3)$
Proposition **d.** $\vec{n}\,(1 ; 1 ; -1)$*

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».
La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.
L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.
Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.

La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.
On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les évènements :
E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2 »
C : « Le petit pot est conforme. »

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. Calculer la probabilité de l'évènement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1. »
3. Déterminer la probabilité de l'évènement C.
4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement C est réalisé.

Partie B

1. On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre.
   On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,006$.
   Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

α	β	$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$
0,13	0,15	0,000 4
0,14	0,16	0,047 8
0,15	0,17	0,499 6
0,16	0,18	0,904 4
0,17	0,19	0,499 6
0,18	0,20	0,047 8
0,19	0,21	0,000 4

   Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.
2. On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.
   On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart-type σ_2.
   On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à 0,99.
   Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$.
   a. Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?
   b. Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle $[0,16 ; 0,18]$.
   c. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.
   On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

β	$P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta)$
2,432 4	0,985
2,457 3	0,986
2,483 8	0,987
2,512 1	0,988
2,542 7	0,989
2,575 8	0,990
2,612 1	0,991
2,652 1	0,992
2,696 8	0,993

*

Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-kx}}.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

La représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est donnée en ANNEXE, à rendre avec la copie.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
3. On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$.
   En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
4. On définit le nombre $I = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

   Montrer que $I = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathscr{C}_{-1}$ d'abscisse x.
On note K le milieu du segment $[MP]$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_{-1}$ l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
2. Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.
3. Pour tout réel $k \geqslant 10$, $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqslant 0,99$.*

Exercice 4 **5 points**

Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\left\{\begin{array}{l c l} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n} \end{array}\right.$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	**Algorithme N° 2**	**Algorithme N° 3**

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels
 	
Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire
  v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
 	
Fin algorithme
	Variables :
	v est un réel
	i et n sont des entiers naturels
	
	Début de l'algorithme :
	Lire n
	Pour i variant de 1 à n faire
	v prend la valeur 1
	  Afficher v
	v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
	Fin pour
	
	Fin algorithme
		Variables :
		v est un réel
		i et n sont des entiers naturels
		
		Début de l'algorithme :
		Lire n
		v prend la valeur 1
		Pour i variant de 1 à n faire
		  Afficher v
		v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
		Fin pour
		Afficher v
		Fin algorithme

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.
b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.
La suite (v_n) est-elle monotone ?
c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$
2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n).*

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et, pour tout n supérieur ou égal à 0 :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on souhaite calculer u_n à l'aide de l'algorithme suivant :

Variables :	a, b et c sont des nombres réels
	i et n sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2
Initialisation :	a prend la valeur 3
	b prend la valeur 8
Traitement :	Saisir n
	Pour i variant de 2 à n faire
	c prend la valeur a
	a prend la valeur b
	b prend la valeur ...
	Fin Pour
Sortie :	Afficher b

a. Recopier la ligne de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter.
On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_n	4 502	13 378	39 878	119 122	356 342	1 066 978	3 196 838	9 582 322	28 730 582

b. Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n, on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
On note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = AC_n$.
Déterminer A et prouver que, pour tout entier naturel n, $C_n = A^n C_0$.

4. Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
Calculer QP.
On admet que $A = PDQ$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $A^n = PD^nQ$.

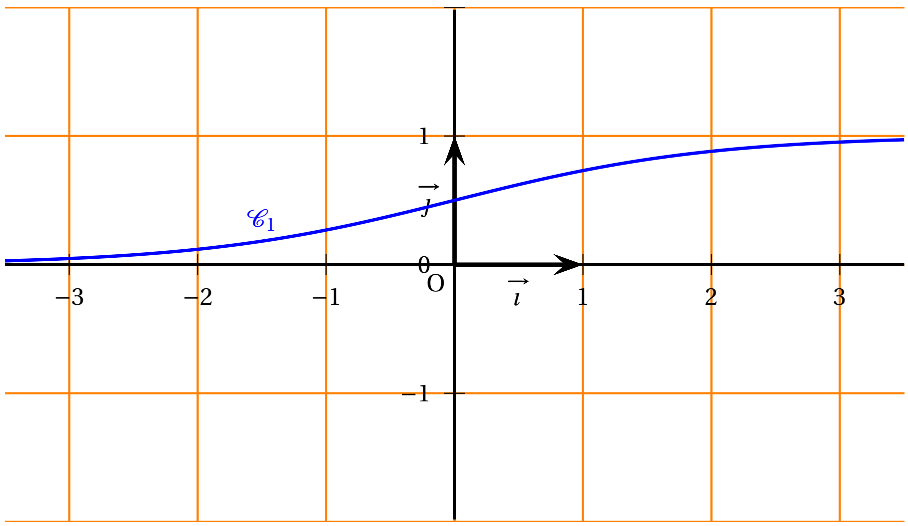
5. À l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, que l'on admet.
Pour tout entier naturel non nul n,

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

En déduire une expression de u_n en fonction de n.
La suite (u_n) a-t-elle une limite ? *

ANNEXE de l'EXERCICE 3, à rendre avec la copie

Représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1



↜ Baccalauréat S Polynésie ↝
7 juin 2013

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étude de la fonction f.

a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec les axes du repère.

b. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe $\mathscr{C}$.

c. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

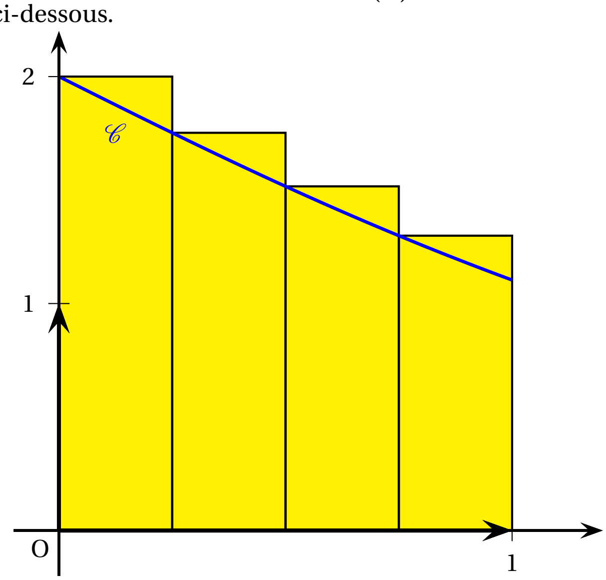
2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.

On note $\mathscr{D}$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On approche l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en calculant une somme d'aires de rectangles.

a. Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0\,;\,1]$ en quatre intervalles de même longueur :

- Sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$
- Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\dfrac{3}{4}\,;\,1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{3}{4}\right)$

Cette construction est illustrée ci-dessous.



L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

Variables :	k est un nombre entier
	S est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k variant de 0 à 3
	Affecter à S la valeur $S + \dfrac{1}{4} f\left(\dfrac{k}{4}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

b. Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle $[0~;~1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.a.

Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

3. Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire.

b. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant $\mathscr{A}$ par la valeur approchée trouvée au moyen de l'algorithme de la question 2. a, c'est-à-dire l'écart entre ces deux valeurs.*

Exercice 2 : 4 points
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. Soit $z_1 = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $\mathrm{i}\dfrac{z_1}{z_2}$ est :

a. $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{12}}$ **b.** $\sqrt{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ **c.** $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$ **d.** $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$

2. L'équation $-z = \overline{z}$, d'inconnue complexe z, admet :

a. une solution

b. deux solutions

c. une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.

d. une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.

3. Dans un repère de l'espace, on considère les trois points $A(1~;~2~;~3)$, $B(-1~;~5~;~4)$ et $C(-1~;~0~;~4)$. La droite parallèle à la droite (AB) passant par le point C a pour représentation paramétrique :

a. $\begin{cases} x = -2t-1 \\ y = 3t \\ z = t+4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **b.** $\begin{cases} x = -1 \\ y = 7t \\ z = 7t+4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

c. $\begin{cases} x = -1-2t \\ y = 5+3t \\ z = 4+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **d.** $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

4. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $D(-1~;~2~;~3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(3~;~-5~;~1)$, et la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t-7 \\ y = t+3 \\ z = 2t+5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

a. La droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

b. La droite Δ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ et n'a pas de point commun avec le plan $\mathscr{P}$.

c. La droite Δ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.

d. La droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.*

Exercice 3 : **5 points**

Commun à tous les candidats

Les 3 *parties peuvent être traitées de façon indépendante.*

Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux.
L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante :

30 % de musique classique, 45 % de variété, le reste étant du jazz.

Thomas a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage de haute qualité et un encodage standard. On sait que :

- les $\frac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité.
- les $\frac{5}{9}$ des morceaux de variété sont encodés en qualité standard.

On considérera les évènements suivants :

C **:** « Le morceau écouté est un morceau de musique classique » ;

V **:** « Le morceau écouté est un morceau de variété » ;

J **:** « Le morceau écouté est un morceau de jazz » ;

H **:** « Le morceau écouté est encodé en haute qualité » ;

S **:** « Le morceau écouté est encodé en qualité standard ».

Partie 1

Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi tous les morceaux stockés sur son MP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire ».
On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

1. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un morceau de musique classique encodé en haute qualité ?
2. On sait que $P(H) = \frac{13}{20}$.
   a. Les évènements C et H sont-ils indépendants ?
   b. Calculer $P(J \cap H)$ et $P_J(H)$.

Partie 2

Pendant un long trajet en train, Thomas écoute, en utilisant la fonction « lecture aléatoire » de son MP3, 60 morceaux de musique.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 % de la proportion de morceaux de musique classique dans un échantillon de taille 60.
2. Thomas a comptabilisé qu'il avait écouté 12 morceaux de musique classique pendant son voyage. Peut-on penser que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas est défectueuse ?

Partie 3

On considère la variable aléatoire X qui, à chaque chanson stocké sur le lecteur MP3, associe sa durée exprimée en secondes et on établit que X suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 20.

On pourra utiliser le tableau fourni en annexe dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

On écoute un morceau musical au hasard.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(180 \leqslant X \leqslant 220)$.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité que le morceau écouté dure plus de 4 minutes.*

Exercice 4 : **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité mathématiques

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.

   b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

   a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   b. Démontrer que la suite (u_n) converge.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

   b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

   d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 : **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité mathématiques

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution de nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.
En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la n-ième année après 2013, et b_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la n-ième année après 2013.
Ainsi, $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.

Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante :
pour tout entier naturel n, $\begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{cases}$.

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. **a.** Déterminer U_1.

   b. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M \times U_n + P$.

2. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Calculer $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   b. En déduire que la matrice $I - M$ est inversible et préciser son inverse.

   c. Déterminer la matrice U telle que $U = M \times U + P$.

3. Pour tout entier naturel, on pose $V_n = U_n - U$.

   a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = M \times V_n$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $V_n = M^n \times V_0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel n,

$$V_n = \begin{pmatrix} \dfrac{-100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \\ \dfrac{-50}{3} \times 0,8^n + \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

   a. Pour tout entier naturel n, exprimer U_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n).

   b. Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.*

ANNEXE de l'exercice 3

X est une variable aléatoire normale d'espérance 200 et d'écart-type 20.

b	$P(X \leqslant b)$
140	0,001
150	0,006
160	0,023
170	0,067
180	0,159
190	0,309
200	0,500
210	0,691
220	0,841
230	0,933
240	0,977
250	0,994
260	0,999

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane 18 juin 2013

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Description de la figure dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(A~;~\overrightarrow{AB}~;~\overrightarrow{AD}~;~\overrightarrow{AE}\right)$:

$ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1.

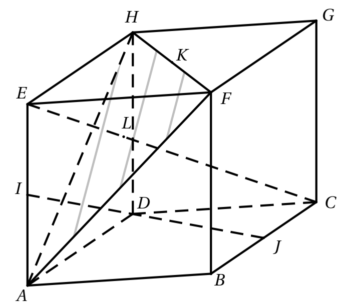
On appelle $\mathcal{P}$ le plan (AFH).

Le point I est le milieu du segment $[AE]$,

le point J est le milieu du segment $[BC]$,

le point K est le milieu du segment $[HF]$,

le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan $\mathcal{P}$.



Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

1. **a.** Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.
   b. Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.
   c. Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes.
   d. Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.
2. **a.** Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 0.
   b. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à (-1).
   c. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 1.
   d. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 2.
3. Dans le repère orthonormé $\left(A~;~\overrightarrow{AB}~;~\overrightarrow{AD}~;~\overrightarrow{AE}\right)$:
   a. Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x+y+z-1=0$.
   b. Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x-y+z=0$.
   c. Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $-x+y+z=0$.
   d. Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x+y-z=0$.
4. **a.** $\overrightarrow{EG}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
   b. $\overrightarrow{EL}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
   c. $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
   d. $\overrightarrow{DI}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
5. **a.** $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$.
   b. $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$.
   c. $\overrightarrow{ID}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$.
   d. $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.*

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1, et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $F_n=\frac{X_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n. On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}~;~p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi trois réponses possibles, notées A, B et C, la bonne réponse étant la A.
On note r la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard (de façon équiprobable).

1. On interroge un étudiant au hasard. On note :
   A l'évènement « l'étudiant répond A »,
   B l'évènement « l'étudiant répond B »,
   C l'évènement « l'étudiant répond C »,
   R l'évènement « l'étudiant connait la réponse »,
   $\overline{R}$ l'évènement contraire de R.
   a. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
   b. Montrer que la probabilité de l'évènement A est $P(A) = \dfrac{1}{3}(1+2r)$.
   c. Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisie A connaisse la bonne réponse.
2. Pour estimer r, on interroge 400 personnes et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiants revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.
   a. Donner la loi de X et ses paramètres n et p en fonction de r.
   b. Dans un premier sondage, on constate que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés.
   Donner un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de p.
   En déduire un intervalle de confiance au seuil de 95 % de r.
   c. Dans la suite, on suppose que $r = 0,4$. Compte-tenu du grand nombre d'étudiants, on considérera que X suit une loi normale.
   i. Donner les paramètres de cette loi normale.
   ii. Donner une valeur approchée de $P(X \leqslant 250)$ à 10^{-2} près.
   On pourra s'aider de la table en annexe 1, qui donne une valeur approchée de $P(X \leqslant t)$ où X est la variable aléatoire de la question **2. c.***

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x}.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x}$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + 1 - m\mathrm{e}^{-x}$$

et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. **a.** Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.

   b. Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.

2. On a représenté en annexe 2 les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, et $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-$e). Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.

3. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m.

4. **a.** On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe (Oy) et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur l'annexe 2.

   b. Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe (Oy) et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathscr{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.
   Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathscr{A}(a) = 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^{1-a}$.
   En déduire la limite de $\mathscr{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.*

EXERCICE 4 **5 points**

Commun ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit les suite (u_n) et (v_n) sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par :

$$u_0 = 0\ ;\ v_0 = 1\ ,\ \text{et}\ \left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{array}\right.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

1. Calculer u_1 et v_1.

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables : u, v et w des nombres réels
N et k des nombres entiers
Initialisation : u prend la valeur 0
v prend la valeur 1
Début de l'algorithme
Entrer la valeur de N
Pour k variant de 1 à N
w prend la valeur u
u prend la valeur $\dfrac{w+v}{2}$
v prend la valeur $\dfrac{w+2v}{3}$
Fin du Pour
Afficher u
Afficher v
Fin de l'algorithme

   a. On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

k	w	u	v
1			
2			

   b. Pour un nombre N donné, à quoi correspondent les valeurs affichées par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

3. Pour tout entier naturel n on définit le vecteur colonne X_n par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et la matrice A par

   $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

b. Démontrer par récurrence que $X_n = A^n X_0$ pour tout entier naturel n.

4. On définit les matrices P, P' et B par $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a. Calculer le produit PP'.
On admet que $P'BP = A$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = P'B^nP$.

b. On admet que pour tout entier naturel n, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.
En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

5. a. Montrer que $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.
En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

b. Déterminer alors les limites des suites (u_n) et (v_n).*

EXERCICE 4 **5 points**
Commun n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ et, pour tout entier naturel n, par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + \mathrm{i}b_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.
Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0.

2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : A et B des nombres réels
            K et N des nombres entiers
Initialisation : Affecter à A la valeur 1
                 Affecter à B la valeur 1
Traitement :
Entrer la valeur de N
Pour K variant de 1 à N
    Affecter à A la valeur (A + √(A² + B²))/3
    Affecter à B la valeur B/3
FinPour
Afficher A
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, et l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de (b_n).

3. **a.** On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' :

$$\left|z+z'\right| \leqslant |z|+\left|z'\right| \qquad \text{(inégalité triangulaire).}$$

Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\left|z_{n+1}\right| \leqslant \frac{2\left|z_n\right|}{3}.$$

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \left|z_n\right|$.
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}.$$

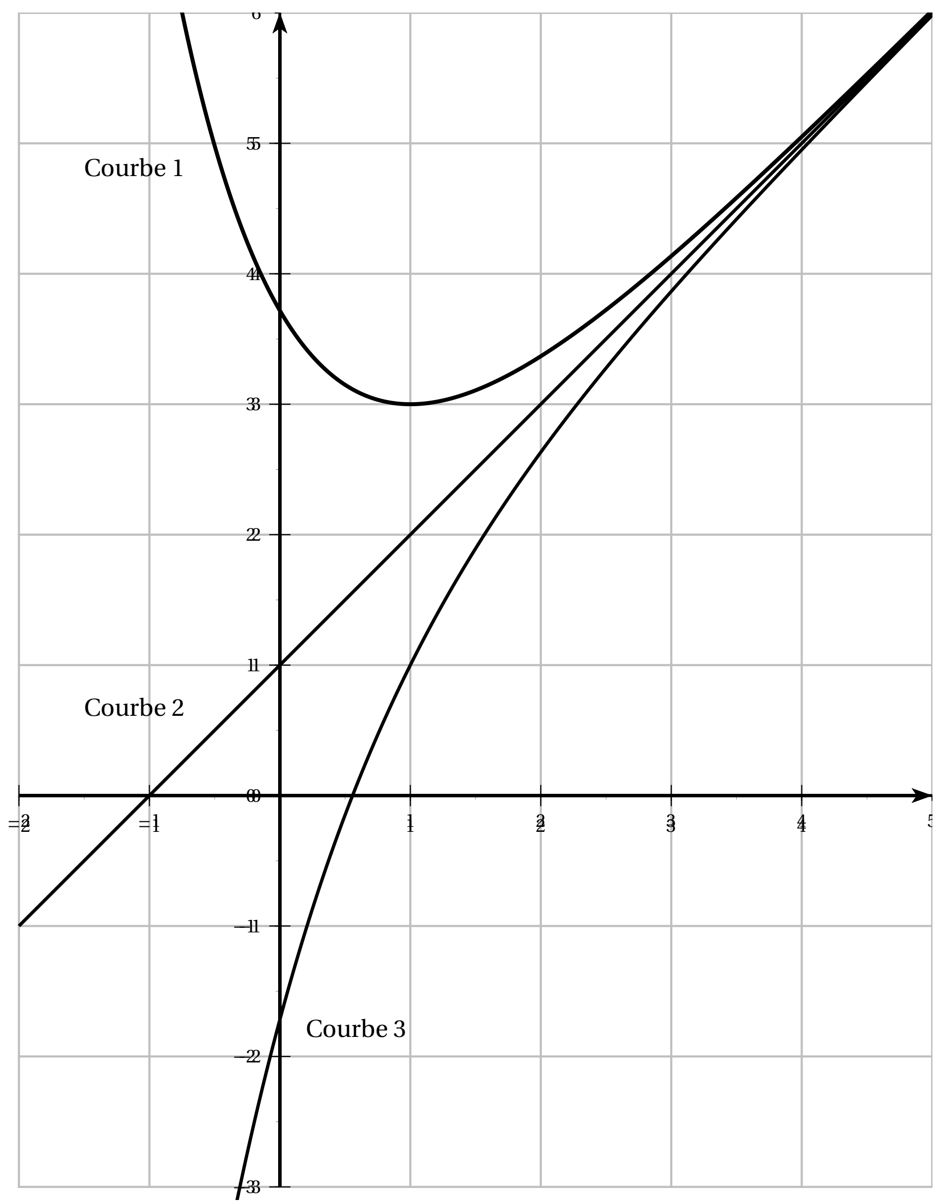
En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\left|a_n\right| \leqslant u_n$. En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.*

Annexe 2

Exercice 3

À rendre avec la copie



Annexe 2

Exercice 3

À rendre avec la copie

E12					=LOI.NORMALE($A12+E$1 ;240 ;RACINE(96) ;VRAI)						
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2	235	0,305	0,309	0,312	0,316	0,319	0,323	0,327	0,330	0,334	0,338
3	236	0,342	0,345	0,349	0,353	0,357	0,360	0,364	0,368	0,372	0,376
4	237	0,380	0,384	0,388	0,391	0,395	0,399	0,403	0,407	0,411	0,415
5	238	0,419	0,423	0,427	0,431	0,435	0,439	0,443	0,447	0,451	0,455
6	239	0,459	0,463	0,467	0,472	0,476	0,480	0,484	0,488	0,492	0,496
7	240	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,533	0,537
8	241	0,541	0,545	0,549	0,553	0,557	0,561	0,565	0,569	0,573	0,577
9	242	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	0,601	0,605	0,609	0,612	0,616
10	243	0,620	0,624	0,628	0,632	0,636	0,640	0,643	0,647	0,651	0,655
11	244	0,658	0,662	0,666	0,670	0,673	0,677	0,681	0,684	0,688	0,691
12	245	0,695	0,699	0,702	**0,706**	0,709	0,713	0,716	0,720	0,723	0,726
13	246	0,730	0,733	0,737	0,740	0,743	0,746	0,750	0,753	0,756	0,759
14	247	0,763	0,766	0,769	0,772	0,775	0,778	0,781	0,784	0,787	0,790
15	248	0,793	0,796	0,799	0,802	0,804	0,807	0,810	0,813	0,815	0,818
16	249	0,821	0,823	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839	0,841	0,844
17	250	0,846	0,849	0,851	0,853	0,856	0,858	0,860	0,863	0,865	0,867
18	251	0,869	0,871	0,874	0,876	0,878	0,880	0,882	0,884	0,886	0,888
19	252	0,890	0,892	0,893	0,895	0,897	0,899	0,901	0,903	0,904	0,906
20	253	0,908	0,909	0,911	0,913	0,914	0,916	0,917	0,919	0,921	0,922
21	254	0,923	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932	0,933	0,935	0,936
22	255	0,937	0,938	0,940	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945	0,947	0,948
23	256	0,949	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,956	0,957	0,958
24	257	0,959	0,960	0,960	0,961	0,962	0,963	0,964	0,965	0,965	0,966
25	258	0,967	0,968	0,968	0,969	0,970	0,970	0,971	0,972	0,972	0,973
26	259	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,977	0,978	0,978	0,979
27	260	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982	0,982	0,983	0,983	0,984

Extrait d'une feuille de calcul

Exemple d'utilisation : au croisement de la ligne 12 et de la colonne E le nombre 0,706 correspond à $P(X \leqslant 245{,}3)$.

∽ Baccalauréat S Asie 18 juin 2013 ∾

Dans l'ensemble du sujet, et pour chaque question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.
On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

- évènement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- évènement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- évènement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.

2. **a.** Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap \overline{S}$?

b. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à $0,88$.

3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.

3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Partie C

À des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : « 88 % de notre thé est garanti sans trace de pesticides ».
Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation. À cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides.

On suppose que, dans le stock du grossiste, la proportion de boîtes sans trace de pesticides est bien égale à $0,88$.
On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 boîtes, associe la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides.

1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.

2. L'inspecteur de la brigade de répression peut-il décider, au seuil de 95 %, que la publicité est mensongère ? *

EXERCICE 2 **6 points**
Commun à tous les candidats
On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.
On note $\mathcal{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B d'abscisse b.

1. **a.** Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.
   b. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B.
   c. En déduire que $b = -a$.
2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation

$$2(x-1)\mathrm{e}^{x} + 1 = 0.$$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^{x} + 1.$$

1. **a.** Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
   b. Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2. **a.** Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   b. On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.
   À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.
On note E le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse α et F le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie C).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point E.
2. Démontrer que (EF) est tangente à $\mathcal{C}_g$ au point F.*

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

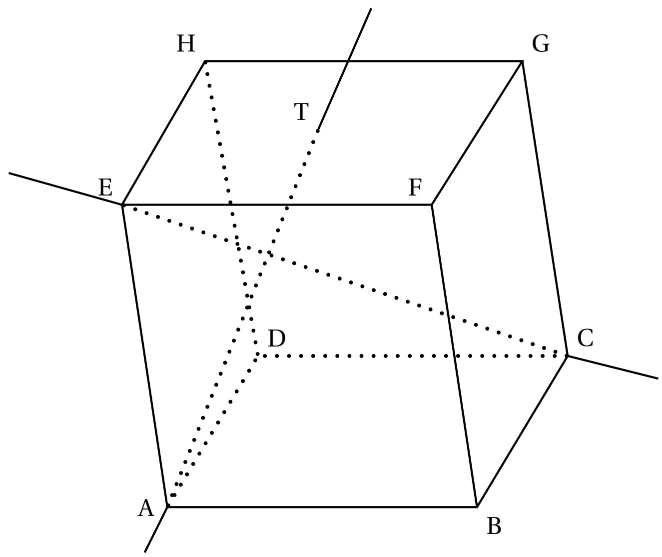
$$a = 2+2\mathrm{i},\quad b = -\sqrt{3}+\mathrm{i},\quad c = 1+\mathrm{i}\sqrt{3},\quad d = -1+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\quad \text{et}\quad e = -1+\left(2+\sqrt{3}\right)\mathrm{i}.$$

1. **Affirmation 1** : les points A, B et C sont alignés.
2. **Affirmation 2** : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.

3. Dans cette question, l'espace est muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0) et K(0 ; 0 ; 1).

Affirmation 3 : la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c r}x &=& 2-\ t\\ y &=& 6-2t\\ z &=& -2+\ t\end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$, coupe le plan (IJK) au point $\text{E}\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

4. Dans le cube ABCDEFGH, le point T est le milieu du segment [HF].



Affirmation 4 : les droites (AT) et (EC) sont orthogonales.*

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

2. a. Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher u
	FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

b. montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie.
Ainsi, le rectangle initial OEFG est transformé en un rectangle OE′F′G′, appelé image de OEFG.

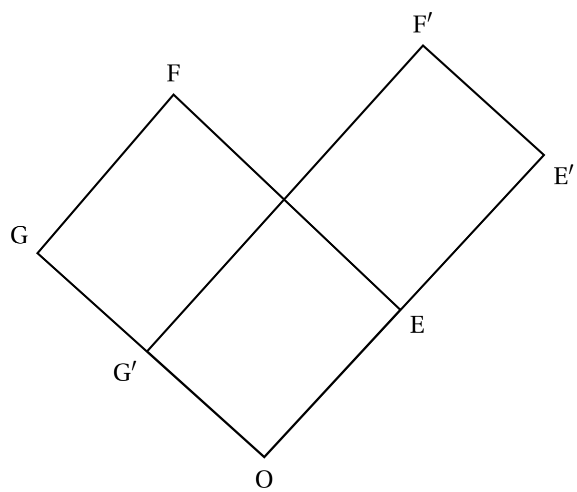


Figure 1

L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Les points E, F et G ont pour coordonnées respectives $(2 ; 2)$, $(-1 ; 5)$ et $(-3 ; 3)$.
La transformation du logiciel associe à tout point $M(x ; y)$ du plan le point $M'(x' ; y')$, image du point M tel que :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & \dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{4}y \\ y' & = & \dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}y \end{array}\right.$$

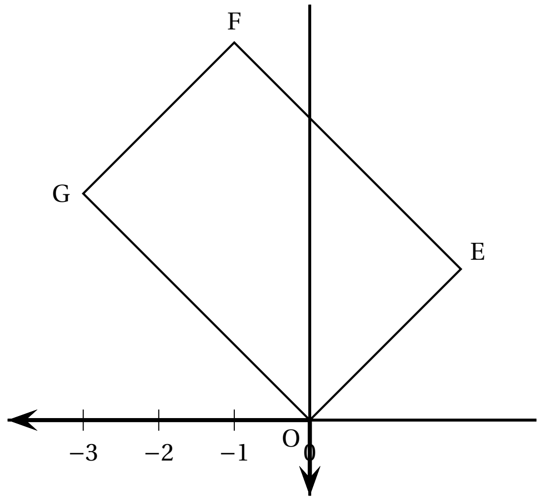


Figure 2

1. **a.** Calculer les coordonnées des points E′, F′ et G′, images des points E, F et G par cette transformation.

   b. Comparer les longueurs OE et OE′ d'une part, OG et OG′ d'autre part.

   Donner la matrice carrée d'ordre 2, notée A, telle que : $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle OEFG lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1. On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives.
   Une erreur a été commise.
   Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.

Entrée	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à x la valeur -1 Affecter à y la valeur 5
Traitement	POUR i allant de 1 à N Affecter à a la valeur $\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}y$ Affecter à b la valeur $\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}y$ Affecter à x la valeur a Affecter à y la valeur b FIN POUR
Sortie	Afficher x, afficher y

2. On a obtenu le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	10	15
x	2,5	7,25	15,625	31,8125	63,9063	2047,9971	65535,9999
y	5,5	8,75	16,375	32,1875	64,0938	2048,0029	65536,0001

   Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F.

Partie C

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle OEFG. On définit la suite des points $E_n\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ du plan par $E_0 = \text{E}$ et la relation de récurrence :

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix},$$

où $\left(x_{n+1}\ ;\ y_{n+1}\right)$ désignent les coordonnées du point E_{n+1}.
Ainsi $x_0 = 2$ et $y_0 = 2$.

1. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \begin{pmatrix}\alpha_n & \beta_n\\ \beta_n & \alpha_n\end{pmatrix}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad \beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point E_n est situé sur la droite d'équation $y = x$.
On pourra utiliser que, pour tout entier naturel n, les coordonnées $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ du point E_n vérifient :

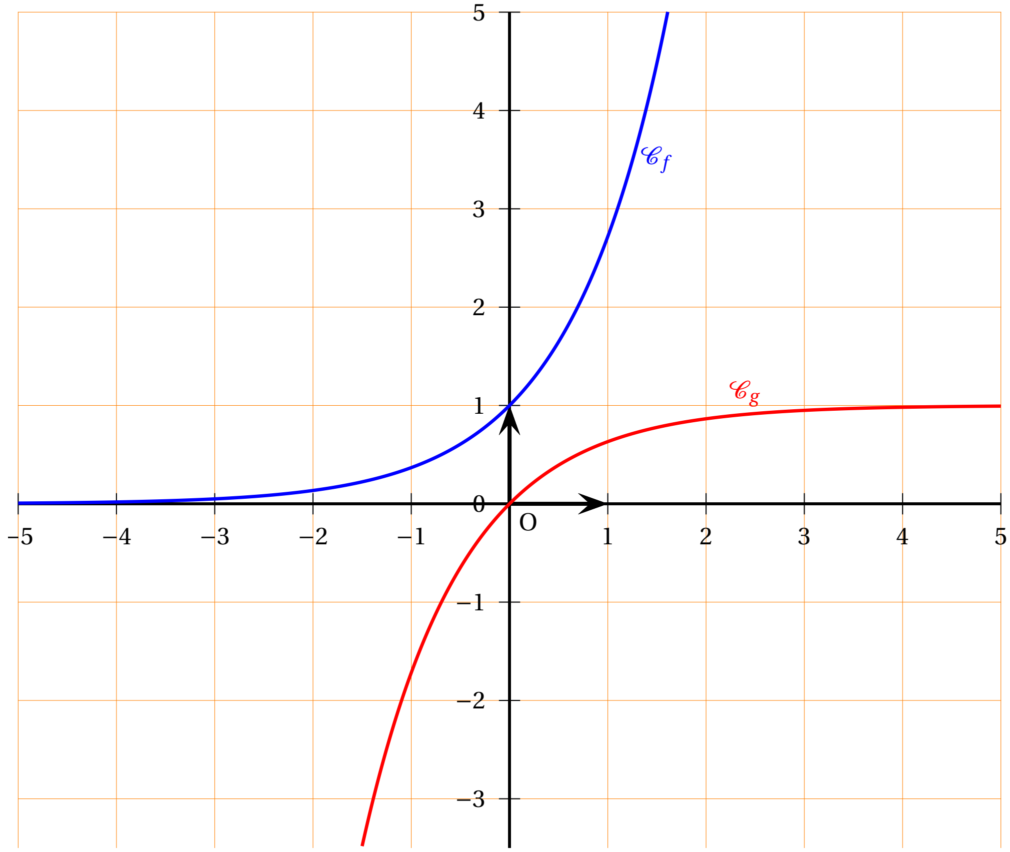
$$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}.$$

b. Démontrer que la longueur OE_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.*

Annexe

à rendre avec la copie

Exercice 2



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers 12 juin 2013

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 6 points

Commun à tous les candidats

Un industriel fabrique des vannes électroniques destinées à des circuits hydrauliques.
Les quatre parties A, B, C, D sont indépendantes.

Partie A

La durée de vie d'une vanne, exprimée en heures, est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,2$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'une vanne ?
2. Calculer la probabilité, à $0,001$ près, que la durée de vie d'une vanne soit supérieure à 6 000 heures.

Partie B

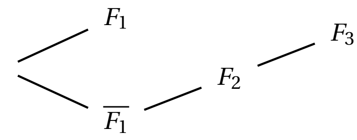
Avec trois vannes identiques V_1, V_2 et V_3, on fabrique le circuit hydraulique ci-contre.
Le circuit est en état de marche si V_1 est en état de marche ou si V_2 et V_3 le sont simultanément.

On assimile à une expérience aléatoire le fait que chaque vanne est ou n'est pas en état de marche après 6 000 heures. On note :

- F_1 l'évènement : « la vanne V_1 est en état de marche après 6 000 heures ».
- F_2 l'évènement : « la vanne V_2 est en état de marche après 6 000 heures ».
- F_3 l'évènement : « la vanne V_3 est en état de marche après 6 000 heures ».
- E : l'évènement : « le circuit est en état de marche après 6 000 heures ».

On admet que les évènements F_1, F_2 et F_3 sont deux à deux indépendants et ont chacun une probabilité égale à 0,3.

1. L'arbre probabiliste ci-contre représente une partie de la situation.
Reproduire cet arbre et placer les probabilités sur les branches.



2. Démontrer que $P(E) = 0,363$.

3. Sachant que le circuit est en état de marche après 6 000 heures, calculer la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche à ce moment là. Arrondir au millième.

Partie C

L'industriel affirme que seulement 2 % des vannes qu'il fabrique sont défectueuses. On suppose que cette affirmation est vraie, et l'on note F la variable aléatoire égale à la fréquence de vannes défectueuses dans un échantillon aléatoire de 400 vannes prises dans la production totale.

1. Déterminer l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable F,

2. On choisit 400 vannes au hasard dans la production, On assimile ce choix à un tirage aléatoire de 400 vannes, avec remise, dans la production.
Parmi ces 400 vannes, 10 sont défectueuses.
Au vu de ce résultat peut-on remettre en cause. au seuil de 95 %, l'affirmation de l'industriel ?

Partie D

Dans cette partie, les probabilités calculées seront arrondies au millième.
L'industriel commercialise ses vannes auprès de nombreux clients, La demande mensuelle est une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 800$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. Déterminer $P(760 \leqslant D \leqslant 840)$.

2. Déterminer $P(D \leqslant 880)$.

3. L'industriel pense que s'il constitue un stock mensuel de 880 vannes, il n'aura pas plus de 1 % de chance d'être en rupture de stock. A-t-il raison ? *

Exercice 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

Les quatre questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère

- les points A (12 ; 0 ; 0), B (0 ; −15 ; 0), C (0 ; 0 ; 20), D (2 ; 7 ; −6), E (7 ; 3 ; −3) ;
- le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $2x + y - 2z - 5 = 0$

Affirmation 1
Une équation cartésienne du plan parallèle à $\mathscr{P}$ et passant par le point A est :

$$2x + y + 2z - 24 = 0$$

Affirmation 2
Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 9-3t\\ y &=& 0\\ z &=& 5+5t \end{array}\right., \; t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3
La droite (DE) et le plan $\mathscr{P}$ ont au moins un point commun.
Affirmation 4
La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).*

Exercice 3 — 5 points

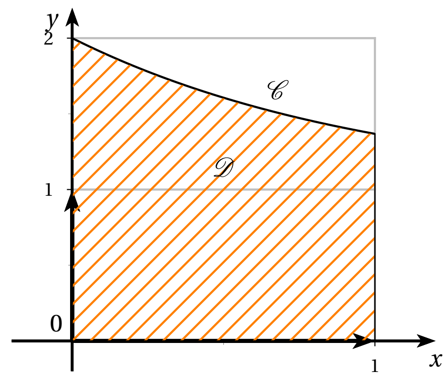
Commun à tous les candidats

On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~1]$ par :

$$g(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~1]$, $g(x) > 0$.

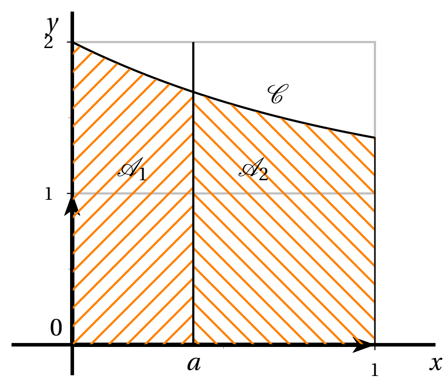
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal, et $\mathscr{D}$ le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, d'autre part entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
La courbe $\mathscr{C}$ et le domaine $\mathscr{D}$ sont représentés ci-contre.



Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leqslant a \leqslant 1$.
On note $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox),les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$, puis $\mathscr{A}_2$ celle du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, (Ox) et les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$.
$\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont exprimées en unités d'aire.



1. **a.** Démontrer que $\mathscr{A}_1 = a - \mathrm{e}^{-a} + 1$.
   b. Exprimer $\mathscr{A}_2$ en fonction de a.
2. Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~1]$ par :

$$f(x) = 2x - 2\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

   a. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.
   b. Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0~;~1]$. en un réel α. Donner la valeur de α arrondie au centième.
3. En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel a pour lequel les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales.

Partie B

Soit b un réel positif.
Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = b$. On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

1. Justifier l'inégalité $b < 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. On pourra utiliser un argument graphique.
2. Déterminer la valeur exacte du réel b. *

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'avant pas choisi la spécialité mathématique

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme
$u_1 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre.
Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur … Affecter à n la valeur … Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?
3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	…	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,206 3	0,169 3	…	0,010 2	0,010 1

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{1 + (0,5)^n}{n}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.

   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.*

Exercice 4 — 5 points

Candidats ayant choisi la spécialité mathématique

Une espèce d'oiseaux ne vit que sur deux îles A et B d'un archipel.
Au début de l'année 2013, 20 millions d'oiseaux de cette espèce sont présents sur l'île A et 10 millions sur l'île B.
Des observations sur plusieurs années ont permis aux ornithologues d'estimer que, compte tenu des naissances, décès, et migrations entre les deux îles, on retrouve au début de chaque année les proportions suivantes :

- sur l'île A : 80 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 30 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente ;
- sur l'île B : 20 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 70 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente.

Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) le nombre d' oiseaux (en millions) présents sur l'île A (respectivement B) au début de l'année $(2013 + n)$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

On donne ci-contre un algorithme qui doit afficher le nombre d'oiseaux vivant sur chacune des deux iles, pour chaque année comprise entre 2013 et une année choisie par l'utilisateur.

Début de l'algorithme
Lire n
Affecter à a la valeur 20
Affecter à b la valeur 10
Affecter à i la valeur 2013
Afficher i
Afficher a
Afficher b
Tant que $i < n$ faire
    Affecter à c la valeur $(0,8a + 0,3b)$
    Affecter à b la valeur $(0,2a + 0,7b)$
    Affecter à a la valeur c
Fin du Tant que
Fin de l 'algorithme

1. Cet algorithme comporte des oublis dans le traitement. Repérer ces oublis et les corriger.
2. On donne ci-dessous une copie d'écran des résultats obtenus après avoir corrigé l'algorithme précédent dans un logiciel d'algorithmique, l'utilisateur avant choisi l'année 2020.

⋆ ⋆ ⋆ Algorithme lancé ⋆ ⋆ ⋆
En l'année 2013, a prend la valeur 20 et b prend la valeur 10
En l'année 2014, a prend la valeur 19 et b prend la valeur 11
En l'année 2015, a prend la valeur 18,5 et b prend la valeur 11,5
En l'année 2016, a prend la valeur 18,25 et b prend la valeur 11,75
En l'année 2017, a prend la valeur 18,125 et b prend la valeur 11,875
En l'année 2018. a prend la valeur 18,042 5 et b prend la valeur 11,937 5
En l'année 2019, a prend la valeur 18,031 25 et b prend la valeur 11,968 75
En l'année 2020, a prend la valeur 18,015 625 et b prend la valeur 11,984 375
⋆ ⋆ ⋆ Algorithme terminé ⋆ ⋆ ⋆

Au vu de ces résultats, émettre des conjectures concernant le sens de variation et la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie B - Étude mathématique

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$, où M est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on déterminera.
   On admet alors que $U_n = M^n U_0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^n & 0,6 - 0,6 \times 0,5^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^n & 0,4 + 0,6 \times 0,5^n \end{pmatrix}.$$

   On ne détaillera le calcul que pour le premier des coefficients de la matrice M^n.
3. Exprimer a_n en fonction de n, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
4. Avec ce modèle, peut-on dire qu'au bout d'un grand nombre d'années, le nombre d'oiseaux sur l'île A va se stabiliser? Si oui, préciser vers quelle valeur.*

∽ Baccalauréat S Métropole 20 juin 2013 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
On envisage les événements suivants :

- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
- C : « l'arbre choisi est un conifère »,
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

c. Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à $0,525$.

d. L'arbre choisi est un conifère.
Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

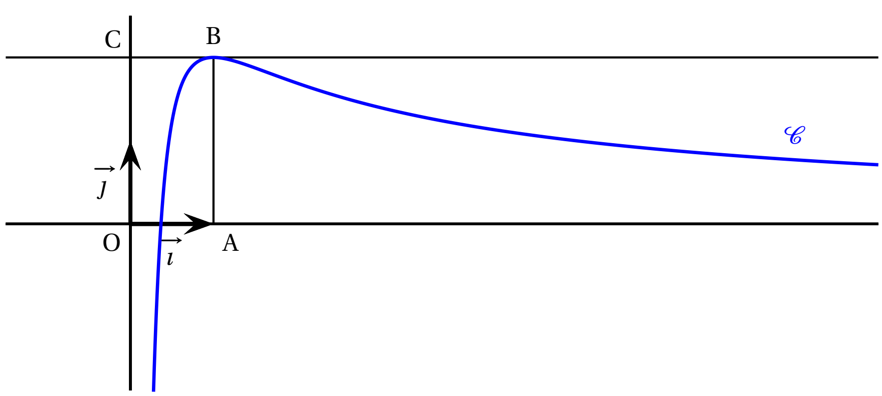
b. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?
On arrondira à 10^{-3}.

c. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?
On arrondira à 10^{-3}.*

EXERCICE 2 **7 points**

Commun à tous les candidats

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives (1 , 0), (1 , 2), (0 , 2) ;
- la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. **a.** En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

   b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

   c. En déduire les réels a et b.

2. **a.** Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,,+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

   b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

   c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,,1]$.

   b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1\,,+\infty]$ tel que $f(\beta) = 1$.
   Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0.
	Affecter à b la valeur 1.
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$.
	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m.
	Sinon Affecter à b la valeur m.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b.

   a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

   b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

   c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

   a. Justifier que cela revient à démontrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

   b. En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\dfrac{2}{x} + 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.*

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

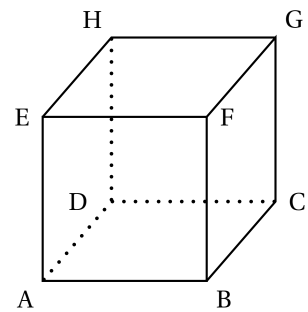
Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1 :** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - \text{i}| = |z + 1|$ est une droite.

2. **Proposition 2 :** Le nombre complexe $\left(1 + \text{i}\sqrt{3}\right)^4$ est un nombre réel.

3. Soit ABCDEFGH un cube.

   Proposition 3 : Les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.



4. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x + y + 3z + 4 = 0$. On note S le point de coordonnées $(1, -2, -2)$.

   Proposition 4 : La droite qui passe par S et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = \ \ 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = \ \ 1 + 3t \end{array}\right.$, $t \in \mathbf{R}$. *

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

   b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant n + 3.$$

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).$$

   c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = u_n - n$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

   b. En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

   a. Exprimer S_n en fonction de n.

   b. Déterminer la limite de la suite (T_n).*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants dont 70 % résidaient à la campagne et 30 % en ville.

L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

- l'effectif de la population est globalement constant,
- chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier de l'année $(2013 + n)$ et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n.

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$.

   On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels fixés et $Y = AX$.

   Déterminer, en fonction de a et b, les réels c et d tels que $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n,

$X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

3. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix}1 & -1\\5 & 1\end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix}1 & 1\\-5 & 1\end{pmatrix}$.
   a. Calculer PQ et QP. En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q.
   b. Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.
   c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que

$$v_n = \frac{1}{6}\left(1+5\times 0,94^n\right)v_0 + \frac{1}{6}\left(1-0,94^n\right)c_0.$$

   Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ? *

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane 11 septembre 2013

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Restitution organisée de connaissances

Soit Δ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et soit P un plan.

On considère deux droites sécantes et contenues dans P : la droite D_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ et la droite D_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$.

Montrer que Δ est orthogonale à toute droite de P si et seulement si Δ est orthogonale à D_1 et à D_2.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points

$$A(0\,;\,-1\,;\,1),\quad B(4\,;\,-3\,;\,0) \text{ et } C(-1\,;\,-2\,;\,-1).$$

On appelle P le plan passant par A, B et C.

On appelle Δ la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& t\\ y &=& 3t-1\\ z &=& -2t+8\end{array}\right.$ avec t appartenant à $\mathbb{R}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. **Affirmation 1** : Δ est orthogonale à toute droite du plan P.
2. **Affirmation 2** : les droites Δ et (AB) sont coplanaires.
3. **Affirmation 3** : Le plan P a pour équation cartésienne $x+3y-2z+5=0$.
4. On appelle D la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(11\,;\,-1\,;\,4)$.
   Affirmation 4 : La droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x+3y-2z+5=0$.*

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kx\mathrm{e}^{-kx}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Partie A : Étude du cas $k = 1$

On considère donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

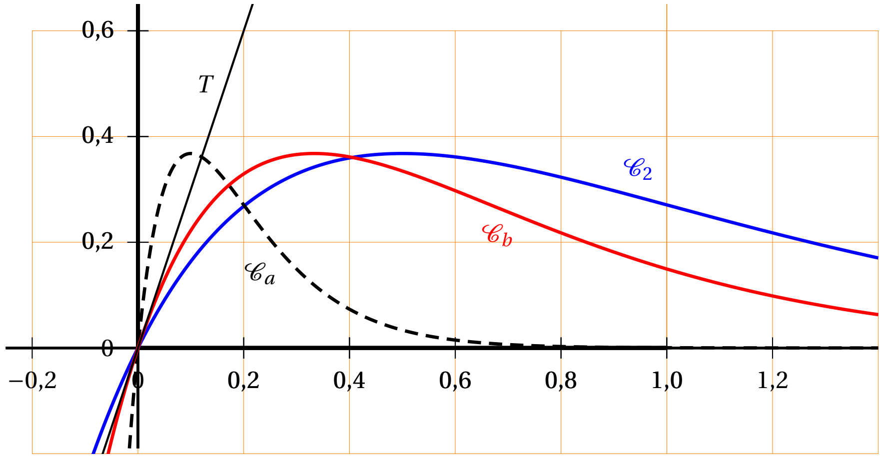
1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}_1$ admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que la fonction g_1 définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

   $$g_1(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$$

   est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
4. Étudier le signe de $f_1(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
5. Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=\ln 10$.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_a$ et $\mathscr{C}_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathscr{C}_b$ au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathscr{C}_k$ passent par un même point.
2. **a.** Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a

$$f_k'(x) = k(1-kx)\mathrm{e}^{-kx}.$$

   b. Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.

   c. En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.

   d. Écrire une équation de la tangente à $\mathscr{C}_k$ au point O origine du repère.

   e. En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b.*

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Une entreprise industrielle fabrique des pièces cylindriques en grande quantité. Pour toute pièce prélevée au hasard, on appelle X la variable aléatoire qui lui associe sa longueur en millimètre et Y la variable aléatoire qui lui associe son diamètre en millimètre. On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu_1 = 36$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,2$ et que Y suit la loi normale de moyenne $\mu_2 = 6$ et d'écart-type $\sigma_2 = 0,05$.

1. Une pièce est dite conforme pour la longueur si sa longueur est comprise entre $\mu_1 - 3\sigma_1$ et $\mu_1 + 3\sigma_1$. Quelle est une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité p_1 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour la longueur ?

k	$p(Y \leqslant k)$
5,8	3,167 12E − 05
5,82	0,000 159 109
5,84	0,000 687 138
5,86	0,002 555 13
5,88	0,008 197 536
5,9	0,022 750 132
5,92	0,054 799 292
5,94	0,115 069 67
5,96	0,211 855 399
5,98	0,344 578 258
6	0,5
6,02	0,655 421 742
6,04	0,788 144 601
6,06	0,884 930 33
6,08	0,945 200 708
6,1	0,977 249 868
6,12	0,991 802 464
6,14	0,997 444 87
6,16	0,999 312 862
6,18	0,999 840 891
6,2	0,999 968 329

2. Une pièce est dite conforme pour le diamètre si son diamètre est compris entre 5,88 mm et 6,12 mm. Le tableau donné ci-contre a été obtenu à l'aide d'un tableur. Il indique pour chacune des valeurs de k, la probabilité que Y soit inférieure ou égal à cette valeur.
Déterminer à 10^{-3} près la probabilité p_2 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour le diamètre (on pourra s'aider du tableau ci-contre).

3. On prélève une pièce au hasard. On appelle L l'évènement « la pièce est conforme pour la longueur » et D l'évènement « la pièce est conforme pour le diamètre ». On suppose que les évènements L et D sont indépendants.

a. Une pièce est acceptée si elle est conforme pour la longueur et pour le diamètre.
Déterminer la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard ne soit pas acceptée
(le résultat sera arrondi à 10^{-2}).

b. Justifier que la probabilité qu'elle soit conforme pour le diamètre sachant qu'elle n'est pas conforme pour la longueur, est égale à p_2.*

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties sont indépendantes

Le robot Tom doit emprunter un pont sans garde-corps de 10 pas de long et de 2 pas de large. Sa démarche est très particulière :

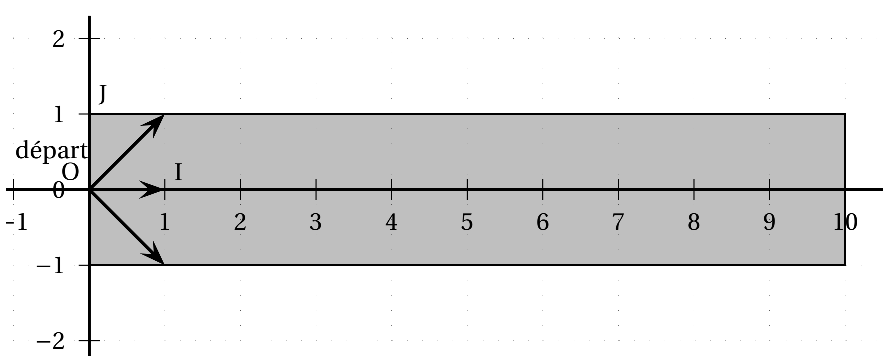
- Soit il avance d'un pas tout droit ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit) ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

On suppose que ces trois types de déplacement sont aléatoires et équiprobables.

L'objectif de cet exercice est d'estimer la probabilité p de l'évènement S « Tom traverse le pont » c'est-à-dire « Tom n'est pas tombé dans l'eau et se trouve encore sur le pont au bout de 10 déplacements ».

Partie A : modélisation et simulation

On schématise le pont par un rectangle dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) comme l'indique la figure ci-dessous. On suppose que Tom se trouve au point de coordonnées (0 ; 0) au début de la traversée. On note $(x\ ;\ y)$ les coordonnées de la position de Tom après x déplacements.



On a écrit l'algorithme suivant qui simule la position de Tom au bout de x déplacements :

```
x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que y ⩾ −1 et y ⩽ 1 et x ⩽ 9
        Affecter à n une valeur choisie au hasard entre −1, 0 et 1
        Affecter à y la valeur y + n
        Affecter à x la valeur x + 1
Fin tant que
Afficher « la position de Tom est » (x ; y)
```

1. On donne les couples suivants : $(-1\,;\,1)$; $(10\,;\,0)$; $(2\,;\,4)$; $(10\,;\,2)$.
   Lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ? Justifier la réponse.
2. Modifier cet algorithme pour qu'à la place de « la position de Tom est $(x\,;\,y)$ », il affiche finalement « Tom a réussi la traversée » ou « Tom est tombé ».

Partie B

Pour tout n entier naturel compris entre 0 et 10, on note :
A_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée -1 ».
B_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 ».
C_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».
On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n, C_n.

1. Justifier que $a_0 = 0, b_0 = 1, c_0 = 0$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n compris entre 0 et 9, on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \dfrac{a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} & = & \dfrac{a_n + b_n + c_n}{3} \end{array}\right.$$

   On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
3. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.
4. Calculer la probabilité que Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements.
5. À l'aide d'un tableur, on a obtenu la feuille de calcul ci-contre qui donne des valeurs approchées de a_n, b_n, c_n pour n compris entre 0 et 10.
   Donner une valeur approchée à 0,001 près de la probabilité que Tom traverse le pont (on pourra s'aider du tableau ci-contre).

n	a_n	b_n	c_n
0	0	1	0
1	0,333 333	0,333 333	0,333 333
2	0,222 222	0,333 333	0,222 222
3	0,185 185	0,259 259	0,185 185
4	0,148 148	0,209 877	0,148 148
5	0,119 342	0,168 724	0,119 342
6	0,096 022	0,135 802	0,096 022
7	0,077 275	0,109 282	0,077 275
8	0,062 186	0,087 944	0,062 186
9	0,050 043	0,070 772	0,050 043
10	0,040 272	0,056 953	0,040 272

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
A et X sont des nombres entiers
Saisir un entier positif A
Affecter à X la valeur de A
Tant que X supérieur ou égal à 26
        Affecter à X la valeur X − 26
Fin du tant que
Afficher X
```

1. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 3 ?
2. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 55 ?
3. Pour un nombre entier saisi quelconque, que représente le résultat fourni par cet algorithme ?

Partie B

On veut coder un bloc de deux lettres selon la procédure suivante (détaillée en quatre étapes) :

- **Étape 1** : chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient une matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

- **Étape 2** : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

La matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice de codage.

- **Étape 3** : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} z_1 & \equiv & y_1\,(26) & \text{avec } 0 & \leqslant & z_1 & \leqslant & 25 \\ z_2 & \equiv & y_2\,(26) & \text{avec } 0 & \leqslant & z_2 & \leqslant & 25 \end{array} \right.$$

- **Étape 4** : $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est transformé en un bloc de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple :
RE $\rightarrow \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow$ DP
Le bloc RE est donc codé en DP

Justifier le passage de $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

1. Soient x_1, x_2, x_1', x_2' quatre nombres entiers compris entre 0 et 25 tels que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ sont transformés lors du procédé de codage en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que $\left\{ \begin{array}{lll} 3x_1 + x_2 & \equiv & 3x_1' + x_2' \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 & \equiv & 5x_1' + 2x_2' \quad (26). \end{array} \right.$
   b. En déduire que $x_1 \equiv x_1' \quad (26)$ et $x_2 \equiv x_2' \quad (26)$ puis que $x_1 = x_1'$ et $x_2 = x_2'$.
2. On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP :
   a. Vérifier que la matrice $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de C.
   b. Calculer $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.
   c. Calculer $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tels que $\left\{ \begin{array}{lll} x_1 & \equiv & y_1 \quad (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 & \equiv & y_2 \quad (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{array} \right.$
   d. Quel procédé général de décodage peut-on conjecturer ?

3. Dans cette question nous allons généraliser ce procédé de décodage.
On considère un bloc de deux lettres et on appelle z_1 et z_2 les deux entiers compris entre 0 et 25 associés à ces lettres à l'étape 3. On cherche à trouver deux entiers x_1 et x_2 compris entre 0 et 25 qui donnent la matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ par les étapes 2 et 3 du procédé de codage.
Soient y_1' et y_2' tels que $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ où $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.
Soient x_1 et x_2, les nombres entiers tels que $\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & \equiv & y_1' \quad (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 & \equiv & y_2' \quad (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{array}\right.$
Montrer que $\left\{\begin{array}{lcl} 3x_1 + x_2 & \equiv & z_1 \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 & \equiv & z_2 \quad (26). \end{array}\right.$.
Conclure.

4. Décoder QC. *

Baccalauréat S Métropole 12 septembre 2013

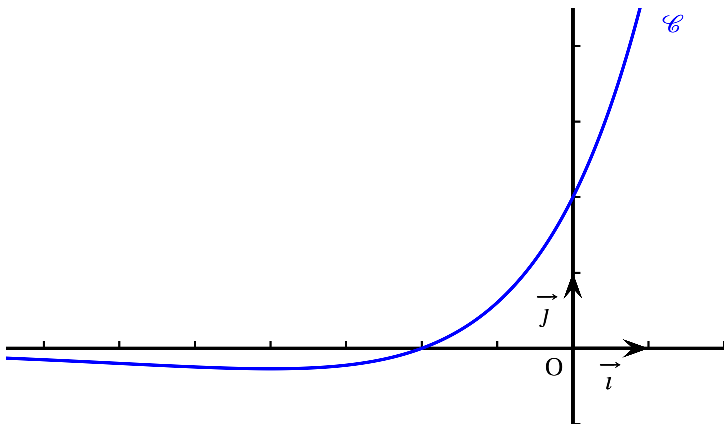
EXERCICE 1 **6 points**

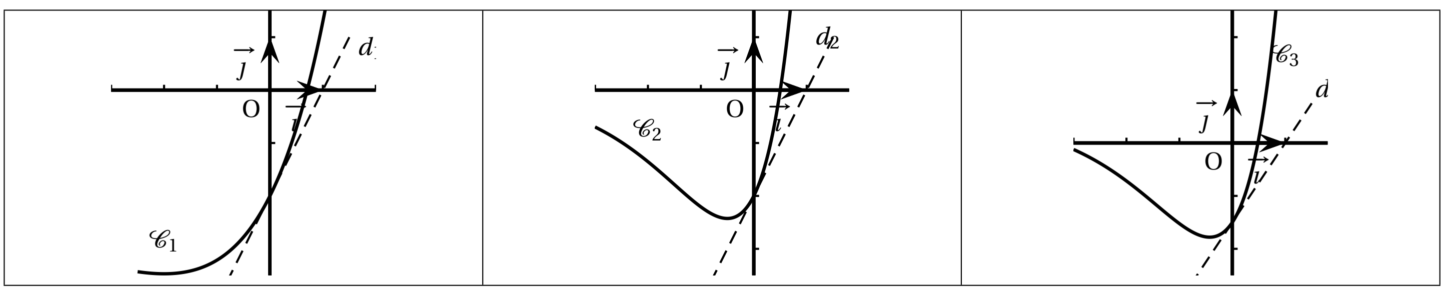
Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}$ et trois autres courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.





1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   a. À l'aide de la courbe $\mathscr{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
   b. L'une des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F.
   Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

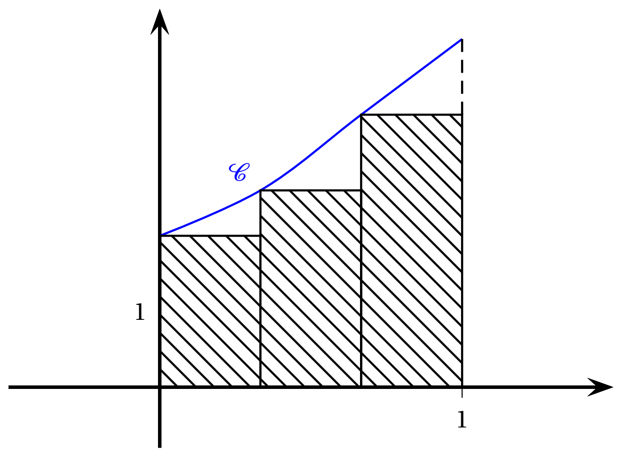
1. L'observation de la courbe $\mathscr{C}$ permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.
   a. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x+4)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.
   b. En déduire une validation de la conjecture précédente.
2. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   a. Interpréter géométriquement le réel I.
   b. Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.
   Vérifier que $f = 2\left(u'v + uv'\right)$.
   c. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels.
	s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n-1$
	| Affecter à s la valeur $s+\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.
	Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s.

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n.

a. Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



b. Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?*

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, trois réponses sont proposées et une seule d'entre elles est exacte.
Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie et justifiera son choix.

li est attribué un point par réponse correcte et convenablement justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Pour les questions 1 et 2, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

, La droite $\mathscr{D}$ est définie par la représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 5-2t\\ y &=& 1+3t\\ z &=& 4\end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

1. On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $3x+2y+z-6=0$.

a. La droite $\mathscr{D}$ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

b. La droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

c. La droite $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

2. On note $\mathscr{D}'$ la droite qui passe par le point A de coordonnées $(3~;~1~;~1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

a. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles.

b. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes.

c. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Pour les questions 3 et 4, le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

[resume]Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+\text{i}| = |z-\text{i}|$.

1. **a.** $\mathscr{E}$ est l'axe des abscisses.

   b. $\mathscr{E}$ est l'axe des ordonnées.

   c. $\mathscr{E}$ est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.

2. On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.

   a. Le triangle OBC est isocèle en O.

   b. Les points O, B, C sont alignés.

   c. Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.*

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans une usine, on utilise deux machines A et B pour fabriquer des pièces.

1. La machine A assure 40 % de la production et la machine B en assure 60 %.
   On estime que 10 % des pièces issues de la machine A ont un défaut et que 9 % des pièces issues de la machine B ont un défaut.
   On choisit une pièce au hasard et on considère les évènements suivants :
   - A : « La pièce est produite par la machine A »
   - B : « La pièce est produite par la machine B »
   - D : « La pièce a un défaut ».
   - $\overline{D}$, l'évènement contraire de l'évènement D.

   a. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

   b. Calculer la probabilité que la pièce choisie présente un défaut et ait été fabriquée par la machine A.

   c. Démontrer que la probabilité $P(D)$ de l'évènement D est égale à $0,094$.

   d. On constate que la pièce choisie a un défaut.
   Quelle est la probabilité que cette pièce provienne de la machine A ?

2. On estime que la machine A est convenablement réglée si 90 % des pièces qu'elle fabrique sont conformes.
   On décide de contrôler cette machine en examinant n pièces choisies au hasard (n entier naturel) dans la production de la machine A. On assimile ces n tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise.
   On note X_n le nombre de pièces qui sont conformes dans l'échantillon de n pièces, et $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ la proportion correspondante.

   a. Justifier que la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

   b. Dans cette question, on prend $n = 150$.
   Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de la variable aléatoire F_{150}.

   c. Un test qualité permet de dénombrer 21 pièces non conformes sur un échantillon de 150 pièces produites.
   Cela remet-il en cause le réglage de la machine ? Justifier la réponse.*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

   b. Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

c. Établir que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Établir que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).*

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre

Dans un village imaginaire isolé, une nouvelle maladie contagieuse mais non mortelle a fait son apparition.
Rapidement les scientifiques ont découvert qu'un individu pouvait être dans l'un des trois états suivants :

S : « l'individu est sain, c'est-à-dire non malade et non infecté »,

I : « l'individu est porteur sain, c'est-à-dire non malade mais infecté »,

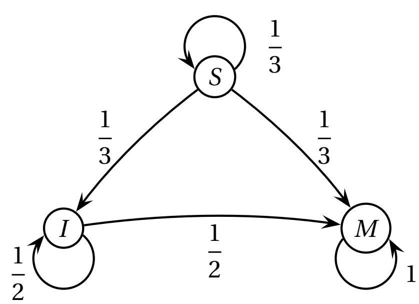
M : « l'individu est malade et infecté ».

Partie A

Les scientifiques estiment qu'un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus suivant :

- parmi les individus sains, la proportion de ceux qui deviennent porteurs sains est égale à $\dfrac{1}{3}$ et la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\dfrac{1}{3}$,
- parmi les individus porteurs sains, la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\dfrac{1}{2}$.

La situation peut être représentée par un graphe probabiliste comme ci-dessous.



On note $P_n = (s_n \quad i_n \quad m_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines où s_n, i_n et $m_n$désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade la n-ième semaine.
On a alors $P_0 = (0,99 \quad 0 \quad 0,01)$ et pour tout entier naturel n,

$$\left\{\begin{array}{l c l} s_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}s_n \\ i_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}s_n + \dfrac{1}{2}i_n \\ m_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}s_n + \dfrac{1}{2}i_n + m_n \end{array}\right.$$

1. Écrire la matrice A appelée *matrice de transition*, telle que pour tout entier naturel n,
$P_{n+1} = P_n \times A$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.

3. Déterminer l'état probabiliste P_4 au bout de quatre semaines. On pourra arrondir les valeurs à 10^{-2}.
Quelle est la probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines ?

Partie B

La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatement l'ensemble de la population.
L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On note Q_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination. Ainsi, $Q_n = (S_n \quad I_n \quad M_n)$ où S_n, I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n-ième semaine après la vaccination.
Pour tout entier naturel n, on a alors $Q_{n+1} = Q_n \times B$.
D'après la partie A, $Q_0 = P_4$. Pour la suite, on prend $Q_0 = (0,01 \quad 0,10 \quad 0,89)$ où les coefficients ont été arrondis à 10^{-2}.

1. Exprimer S_{n+1}, I_{n+1} et M_{n+1} en fonction de S_n, I_n et M_n.

2. Déterminer la constante réelle k telle que $B^2 = kJ$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.
On en déduit que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $B^n = B^2$.

3. **a.** Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $Q_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

b. Interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie.
Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?*

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie
14 novembre 2013

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**

   a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0~;~+\infty[$ par

   $$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

   Étudier le sens de variation de la fonction g.

   b. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0~;~+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
   Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703~;~0{,}704[$.

   c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0~;~+\infty[$.

2. **Étude de la fonction f**

   a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

   b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   c. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel
   $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

   e. Justifier que $3{,}43 < m < 3{,}45$.*

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

PARTIE A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N est un entier
	U, V, W sont des réels
	K est un entier
Début :	Affecter 0 à K
	Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
	Tant que $K < N$
	Affecter $K+1$ à K
	Affecter U à W
	Affecter $\dfrac{2U+V}{3}$ à U
	Affecter $\dfrac{W+3V}{4}$ à V
	Fin tant que
	Afficher U
	Afficher V
Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

PARTIE B

1. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{5}{12}(v_n - u_n)$.

   b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

   Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.

2. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

   b. Déduire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

   c. En déduire que tes suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

   En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\dfrac{46}{7}$. *

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Tous les résultats numériques devront être donnés sous forme décimale et arrondis au dix-millième

Une usine fabrique des billes sphériques dont le diamètre est exprimé en millimètres.
Une bille est dite hors norme lorsque son diamètre est inférieur à 9 mm ou supérieur à 11 mm.

Partie A

1. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque bille choisie au hasard dans la production associe son diamètre exprimé en mm.

   On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,4.

   Montrer qu'une valeur approchée à 0,000 1 près de la probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,012 4. On pourra utiliser la table de valeurs donnée en annexe.

2. On met en place un contrôle de production tel que 98 % des billes hors norme sont écartés et 99 % des billes correctes sont conservées.

   On choisit une bille au hasard dans la production. On note N l'évènement : « la bille choisie est aux normes », A l'évènement : « la bille choisie est acceptée à l'issue du contrôle ».

a. Construire un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé.

b. Calculer la probabilité de l'évènement A.

c. Quelle est la probabilité pour qu'une bille acceptée soit hors norme ?

Partie B

Ce contrôle de production se révélant trop coûteux pour l'entreprise, il est abandonné : dorénavant, toutes les billes produites sont donc conservées, et elles sont conditionnées par sacs de 100 billes.
On considère que la probabilité qu'une bille soit hors norme est de 0,012 4.
On admettra que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.
On appelle Y la variable aléatoire qui à tout sac de 100 billes associe le nombre de billes hors norme de ce sac.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?
2. Quels sont l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire Y ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme ?
4. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne au plus une bille hors norme ?*

EXERCICE 4 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. **Proposition** : Pour tout entier naturel n : $(1+\text{i})^{4n} = (-4)^n$.
2. Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0$ où z désigne un nombre complexe.
   Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.
3. **Proposition** : Pour tout nombre réel α, $1+\text{e}^{2i\alpha} = 2\text{e}^{\text{i}\alpha}\cos(\alpha)$.
4. Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = \dfrac{1}{2}(1+\text{i})$ et M_n le point d'affixe $(z_{\text{A}})^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Proposition : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.
5. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
   Proposition : $1+\text{j}+\text{j}^2 = 0$.*

EXERCICE 4 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On note E l'ensemble des vingt-sept nombres entiers compris entre 0 et 26.
On note A l'ensemble dont les éléments sont les vingt-six lettres de l'alphabet et un séparateur entre deux mots, noté « $\star$ » considéré comme un caractère.
Pour coder les éléments de A, on procède de la façon suivante :

• Premièrement : On associe à chacune des lettres de l'alphabet, rangées par ordre alphabétique, un nombre entier naturel compris entre 0 et 25, rangés par ordre croissant. On a donc $a \to 0$, $b \to 1, \dots z \to 25$.
On associe au séparateur « $\star$ »le nombre 26.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	$\star$
14	15	13	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

On dit que a a pour rang 0, b a pour rang 1, ... , z a pour rang 25 et le séparateur « ⋆ » a pour rang 26.
- Deuxièmement : à chaque élément x de E, l'application g associe le reste de la division euclidienne de $4x+3$ par 27.

On remarquera que pour tout x de E, $g(x)$ appartient à E.
- Troisièmement : Le caractère initial est alors remplacé par le caractère de rang $g(x)$.

Exemple :
$s \rightarrow 18, \quad g(18) = 21$ et $21 \rightarrow v$. Donc la lettre s est remplacée lors du codage par la lettre v.

1. Trouver tous les entiers x de E tels que $g(x) = x$ c'est-à-dire invariants par g.
   En déduire les caractères invariants dans ce codage.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel x appartenant à E et tout entier naturel y appartenant à E, si $y \equiv 4x+3$ modulo 27 alors $x \equiv 7y+6$ modulo 27.
   En déduire que deux caractères distincts sont codés par deux caractères distincts.
3. Proposer une méthode de décodage.
4. Décoder le mot « $v f v$ ».

Annexe
Exercice 3

	A	B
1	d	$P(X < d)$
2	0	3,06E-138
3	1	2,08E-112
4	2	2,75E-89
5	3	7,16E-69
6	4	3,67E-51
7	5	3,73E-36
8	6	7,62E-24
9	7	3,19E-14
10	8	2,87E-07
11	9	0,006 209 67
12	10	0,5
13	11	0,993 790 34
14	12	0,999 999 71
15	13	1
16	14	1
17	15	1
18	16	1
19	17	1
20	18	1
21	19	1
22	20	1
23	21	1
24	22	1
25		

Copie d'écran d'une feuille de calcul *

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Sud 21 novembre 2013

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}.$$

1. Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e} \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
4. Déterminer la dérivée de la fonction f.
5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

1. Vérifier que, pour tout réel x : $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$.
   On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$: $g_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
2. Comparer les fonctions h_n et g'_n, g'_n étant la dérivée de la fonction g_n.
   En déduire que, pour tout réel $x \neq 1$: $h_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.
3. Soit $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$, f étant la fonction définie dans la partie A.
   En utilisant les résultats de la **partie B**, déterminer une expression de S_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$. *

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, représenté ci-dessous et on munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}~;~\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGE) et déterminer une équation du plan (BGE).
3. Montrer que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) en un point K de coordonnées $\mathrm{K}\left(\frac{2}{3}~;~\frac{1}{3}~;~\frac{2}{3}\right)$.
4. Quelle est la nature du triangle BEG ? Déterminer son aire.
5. En déduire le volume du tétraèdre BEGD. *

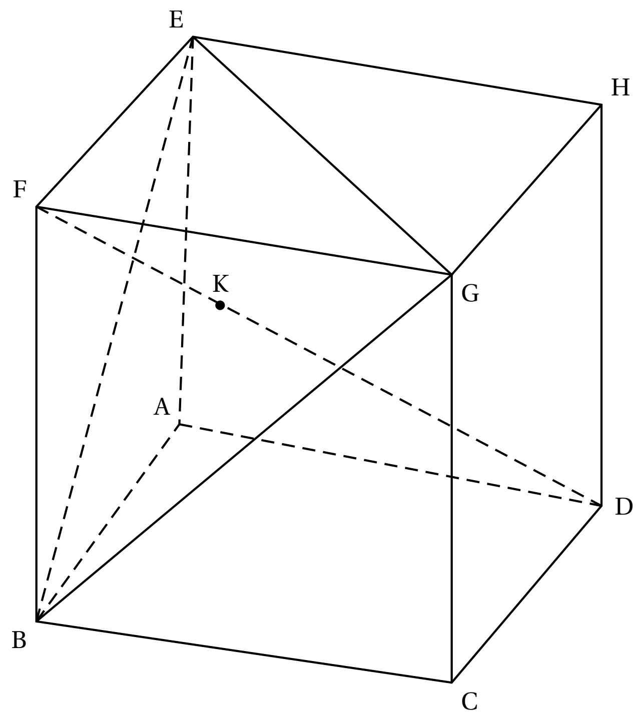
Exercice 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation

$$(E) : \quad z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.



2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geqslant 1$.

a. Vérifier que z_1 est une solution de (E).

b. Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.

c. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée en annexe et tracer, sur la figure donnée en annexe, les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.

3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $z_n = 2^n\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n\mathrm{i}}{2}\right)$.

4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5. On note $\ell^n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.

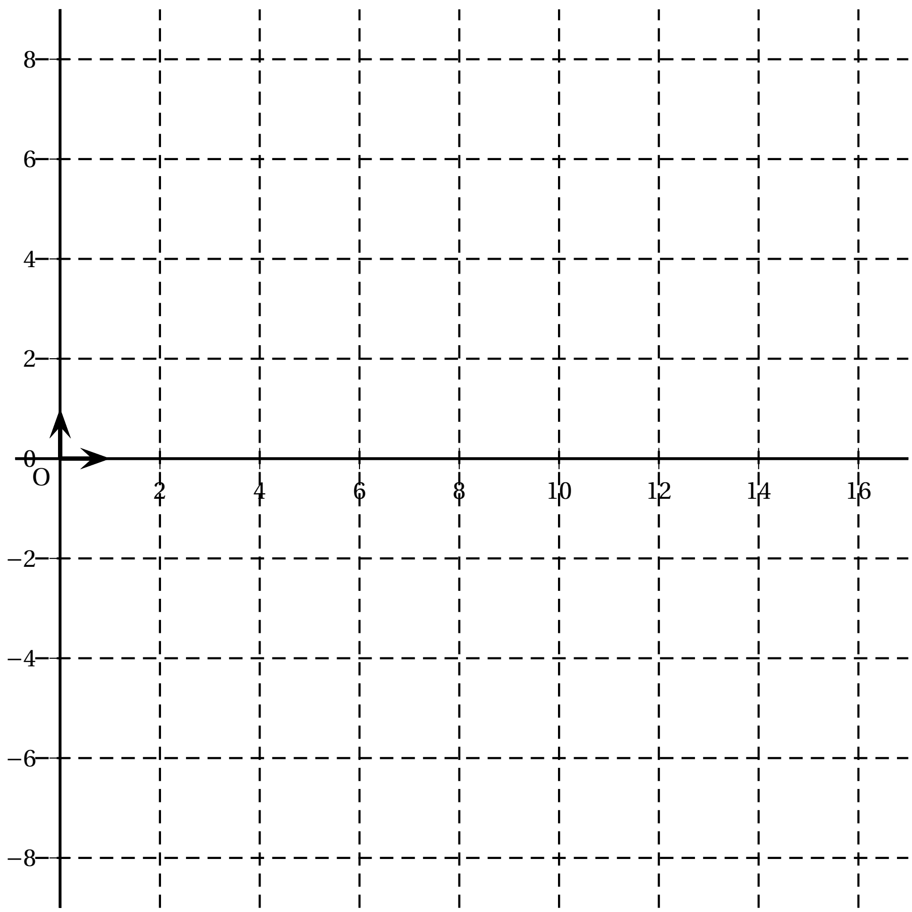
a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ell^n = 2\sqrt{3}\,(2^n - 1)$.

b. Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell^n \geqslant 1\,000$.*

ANNEXE

À rendre avec la copie

Exercice 3 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Exercice 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le gestionnaire d'un site web, composé de trois pages web numérotées de 1 à 3 et reliées entre elles par des liens hypertextes, désire prévoir la fréquence de connexion sur chacune de ses pages web.

Des études statistiques lui ont permis de s'apercevoir que :

- Si un internaute est sur la page n° 1, alors il ira, soit sur la page n° 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit sur la page n° 3 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.
- Si un internaute est sur la page n° 2, alors, soit il ira sur la page n° 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ soit il restera sur la page n° 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit il ira sur la page n° 3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- Si un internaute est sur la page n° 3, alors, soit il ira sur la page n° 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit il ira sur la page n° 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$,soit il restera sur la page n° 3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n, on définit les évènements et les probabilités suivants :
A_n : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 1 » et on note $a_n = P(A_n)$.
B_n : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 2 » et on note $b_n = P(B_n)$.
C_n : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 3 » et on note $c_n = P(C_n)$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$.
On admet que, de même, $b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$.
Ainsi :
$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} & = & \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{array}\right.$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

$U_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ représente la situation initiale, avec $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice 3×3 que l'on précisera.
En déduire que, pour tout entier naturel $n, U_n = M^n U_0$.

3. Montrer qu'il existe une seule matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que : $x + y + z = 1$ et $MU = U$.

4. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir l'expression de M^n, n étant un entier naturel non nul :
$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel n non nul, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n. En déduire que les suites (a_n), (b_n) et (c_n) convergent vers des limites que l'on précisera.

5. Interpréter les résultats obtenus et donner une estimation des pourcentages de fréquentation du site à long terme.*

Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

Partie A

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %. L'étude a également permis de prouver que 30 % des Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme, seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie alors que cette proportion n'atteint plus que 8 % pour ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.

On choisit au hasard une personne dans la population française et on considère les évènements :
M : « La personne présente, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme »
C : « La personne est victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

1. **a.** Montrer que $P(M \cap C) = 0,03$.
   b. Calculer $P(C)$.
2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque. Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme ?

Partie B

La sécurité sociale décide de lancer une enquête de santé publique, sur ce problème de malformation cardiaque de type anévrisme, sur un échantillon de 400 personnes, prises au hasard dans la population française.
On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1. Définir la loi de la variable aléatoire X.
2. Déterminer $P(X = 35)$.
3. Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

Partie C

1. On considère la variable aléatoire F, définie par $F = \dfrac{X}{400}$, X étant la variable aléatoire de la **partie B**.
   Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.
2. Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.
   Qu'en pensez-vous ?

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie
7 mars 2014

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiple). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera SUR la copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Soit z un nombre complexe de la forme $x + \text{i}y$, où x et y sont des réels.

1. Soit z le nombre complexe d'affixe $(1+\text{i})^4$. L'écriture exponentielle de z est :

a. $\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\pi}$

b. $4\text{e}^{\text{i}\pi}$

c. $\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$

d. $4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$

2. L'ensemble des points M du plan d'affixe $z = x + \text{i}y$ tels que $|z - 1 + \text{i}| = \left|\sqrt{3} - \text{i}\right|$ a pour équation :

a. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$

b. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$

c. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

d. $y = x + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

3. On considère la suite de nombres complexes (Z_n) définie pour tout entier naturel n par $Z_0 = 1 + \text{i}$ et $Z_{n+1} = \frac{1+\text{i}}{2} Z_n$. On note M_n le point du plan d'affixe Z_n.

a. Pour tout entier naturel n, le point M_n appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

b. Pour tout entier naturel n, le triangle $\text{O}M_nM_{n+1}$ est équilatéral.

c. La suite (U_n) définie par $U_n = |Z_n|$ est convergente.

d. Pour tout entier naturel n, un argument de $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_n}$ est $\frac{\pi}{2}$.

4. Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives :

$$Z_\text{A} = -1 - \text{i} \quad ; \quad Z_\text{B} = 2 - 2\text{i} \quad \text{et} \quad Z_\text{C} = 1 + 5\text{i}.$$

On pose $Z = \dfrac{Z_\text{C} - Z_\text{A}}{Z_\text{B} - Z_\text{A}}$.

a. Z est un nombre réel.

b. Le triangle ABC est isocèle en A.

c. Le triangle ABC est rectangle en A.

d. Le point M d'affixe Z appartient à la médiatrice du segment [BC].

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C sont indépendantes

Partie A

Restitution organisée des connaissances

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

> Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1[$, il existe un unique réel strictement positif χ_α tel que $P\left(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha\right) = 1-\alpha$.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$H(x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Que représente la fonction f pour la loi normale centrée réduite ?
2. Préciser $H(0)$ et la limite de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. À l'aide de considérations graphiques, montrer que pour tout nombre réel positif x, $H(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire que la dérivée H' de la fonction H sur $[0\,;\,+\infty[$ est la fonction $2f$ et dresser le tableau de variations de H sur $[0\,;\,+\infty[$.
5. Démontrer alors le théorème énoncé.

Partie B

Un laboratoire se fournit en pipettes auprès de deux entreprises, notées A et B.
60 % des pipettes viennent de l'entreprise A et 4,6 % des pipettes de cette entreprise possèdent un défaut.
Dans le stock total du laboratoire, 5 % des pièces présentent un défaut. On choisit au hasard une pipette dans le stock du laboratoire et on note :

A l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise A » ;

B l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise B » ;

D l'évènement : « La pipette a un défaut ».

1. La pipette choisie au hasard présente un défaut ; quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'entreprise A ?
2. Montrer que $p(B \cap D) = 0{,}0224$.
3. Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, quel pourcentage de pipettes présente un défaut ?

Partie C

Une pipette est dite conforme si sa contenance est comprise, au sens large entre 98 millilitres (mL) et 102 mL.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque pipette prise au hasard dans le stock d'un laboratoire associe sa contenance (en millilitres).
On admet que X suit une loi normale de moyenne μ et écart type σ tels que $\mu = 100$ et $\sigma^2 = 1{,}0424$.

1. Quelle est alors la probabilité, à 10^{-4} près, pour qu'une pipette prise au hasard soit conforme ? On pourra s'aider de la table ci-dessous ou utiliser une calculatrice.

Contenance x (en mL)	95	96	97	98	99
$P(X \leqslant x)$ (arrondi à 10^{-5})	0,000 00	0,000 04	0,001 65	0,025 06	0,163 68

Contenance x (en mL)	100	101	102	103	104
$P(X \leqslant x)$ (arrondi à 10^{-5})	0,5	0,836 32	0,974 94	0,998 35	0,999 96

Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'une pipette soit non-conforme est $p = 0{,}05$.

2. On prélève dans le stock du laboratoire des échantillons de pipettes de taille n, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 100. On suppose que le stock est assez important pour considérer ces tirages comme indépendants.
   Soit Y_n la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille n associe le nombre de pipettes non-conformes de l'échantillon.
   a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y_n ?

b. Vérifier que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

c. Donner en fonction de n l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des pipettes non-conformes dans un échantillon.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

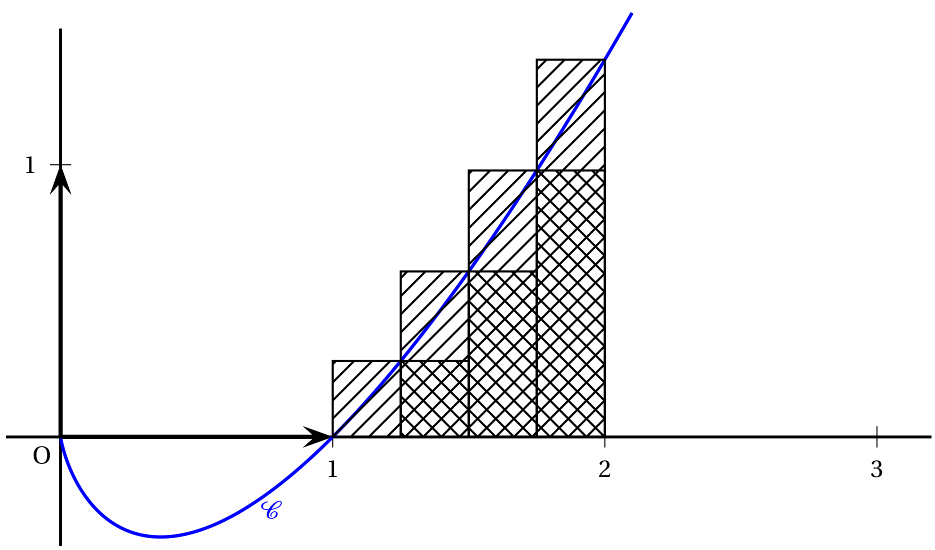
Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x).$$

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. On appelle f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;\,+\infty[$. Montrer que $f'(x) = \ln(x) + 1$.
3. Déterminer les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.
Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.
On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$. (voir la figure ci-après).



Algorithme :

Variables
k et n sont des entiers naturels
U, V sont des nombres réels
Initialisation
U prend la valeur 0
V prend la valeur 0
n prend la valeur 4
Traitement
Pour k allant de 0 à $n-1$
Affecter à U la valeur $U + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$
Affecter à V la valeur $V + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$
Fin pour
Affichage
Afficher U
Afficher V

1. **a.** Que représentent U et V sur le graphique précédent?
   b. Quelles sont les valeurs U et V affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près)?
   c. En déduire un encadrement de $\mathscr{A}$.
2. Soient les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier n non nul par :

$$\begin{array}{rcl} U_n &=& \dfrac{1}{n}\left[f(1)+f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+f\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right)\right]\\ V_n &=& \dfrac{1}{n}\left[f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+f\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right)+f(2)\right]\end{array}.$$

   On admettra que, pour tout n entier naturel non nul, $U_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant V_n$.
   a. Trouver le plus petit entier n tel que $V_n - U_n < 0,1$.
   b. Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de $\mathscr{A}$ d'amplitude inférieure à $0,1$?

Partie C

Soit F la fonction dérivable, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

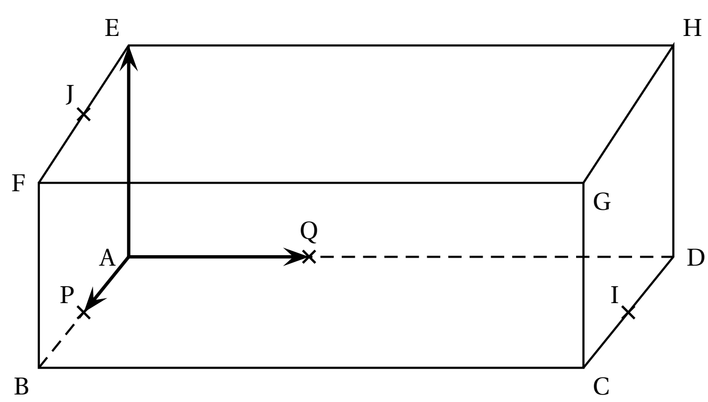
$$F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}.$$

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que AB = 2, AD = 3 et AE = 1.
On appelle respectivement I, J et P les milieux respectifs des segments [CD], [EF] et [AB].
On note Q le point défini par $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



On appelle **plan médiateur d'un segment** le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.
L'objectif de l'exercice est de déterminer les coordonnées du centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ (c'est-à-dire une sphère qui passe par les quatre points A, B, I, J).
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AP},\,\overrightarrow{AQ},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Justifier que les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur (P_1) du segment [AB].
3. Soit (P_2) le plan d'équation cartésienne $3y - z - 4 = 0$.
   Montrer que le plan (P_2) est le plan médiateur du segment [IJ].
4. **a.** Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

b. Montrer que leur intersection est une droite (Δ) dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & t \\ z & = & 3t-4 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit l'ensemble des nombres réels } \mathbb{R}.$$

c. Déterminer les coordonnées du point Ω de la droite (Δ) tel que $\Omega\text{A} = \Omega\text{I}$.

d. Montrer que le point Ω est centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.

*

Index