Baccalauréat ES 1999

L'intégrale de septembre 1998 à juin 1999

Baccalauréat ES Antilles-Guyane septembre 1998

EXERCICE 1 **4 points**

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Neuf amis, cinq garçons et quatre filles, décident de tirer au sort deux conducteurs, qui devront rester sobres durant une soirée.

Chacun écrit son nom sur un carton glissé ensuite dans une boîte.

L'un d'entre eux extrait au hasard, successivement et sans remise, deux cartons de la boîte.

On définit les évènements G_1, G_2, F_1 et F_2 par :

- G_1 : « Un garçon est désigné au premier tirage » ;
- G_2 : « Un garçon est désigné au deuxième tirage » ;
- F_1 : « Une fille est désignée au premier tirage » ;
- F_2 : « Une fille est désignée au deuxième tirage ».

1. **a.** Calculer la probabilité que le nom d'une fille apparaisse au deuxième tirage sachant que le nom d'un garçon a été lu sur le premier carton.

   b. Calculer la probabilité de l'évènement $G_1 \cap F_2$.
   La comparer à celle de l'évènement $G_2 \cap F_1$.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait deux conductrices en fin de soirée.

3. Calculer la probabilité que le sort désigne une fille au deuxième tirage.

4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles désignées.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer son espérance mathématique $E(X)$.

EXERCICE 2 **4 points**

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du SMIC horaire (Salaire Minimum Interprofessionnel de Croissance) de 1988 à 1996.

Date	07/88	07/89	07/90	07/91	07/92	07/93	07/94	07/95	07/96
Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Montant en francs (y_i)	28,76	29,91	31,28	32,66	34,06	34,83	35,56	36,98	37,91

Source : INSEE.

1. Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i\ ;\ y_i)$.
   Le plan est rapporté à un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 1 cm pour 1 an sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 1 franc sur l'axe des ordonnées.
   L'origine du repère correspond au point de coordonnées (0 ; 28).

2. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près du coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ y_i)$.
   Pourquoi peut-on envisager un ajustement linéaire ?

3. Donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.
   (Les coefficients seront donnés par des valeurs approchées à 10^{-2} près.)

Tracer cette droite sur le graphique précédent.
(Les coordonnées des points utilisés pour le tracé de la droite seront indiquées.)

4. Estimer, à l'aide de l'équation de la droite de régression et en faisant figurer sur la copie les étapes du calcul, le montant prévisible du SMIC en juillet 1997.

5. Quelle est, en pourcentage, l'erreur commise par rapport au montant réel du SMIC qui était de 39,93 F en juillet 1997 ?

EXERCICE 3 — 5 points

Enseignement obligatoire

On considère une fonction f de la variable réelle x, dont on donne le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$			$-$	
$f(x)$	1	↘	$-\frac{1}{3}$	↗	0	↗	$+\infty$ | $+\infty$	↘	1

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques 2 cm sur chaque axe).

Partie A

En interprétant le tableau donné ci-dessus :

1. Préciser l'ensemble de définition de f.

2. Placer dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$:

   a. l'asymptote horizontale (D) ;

   b. l'asymptote verticale (D$'$) ;

   c. le point A où la tangente à $(\mathscr{C})$ est horizontale.

Partie B

On donne maintenant l'expression de f :

$$f(x) = 1 + \frac{4}{(x-1)} + \frac{3}{(x-1)^2}.$$

1. Résoudre les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = 1$.

2. Au moyen de votre calculatrice remplir le tableau suivant (recopier ce tableau sur votre copie.)

x	-1	$-0,75$	$0,5$	2	3	4
$f(x)$						

3. Placer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère de la question **A. 2.**.

EXERCICE 3 **5 points**

Enseignement de spécialité

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}u_n + 1. \end{array}\right.$$

1. Calculer $u_1,\ u_2$ et u_3.

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 cm, tracer la droite (D) d'équation $y = x$ et droite (D$'$) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.
En utilisant (D$'$) et (D), représenter sur ce graphique les points P, Q, R, S, T, U, V, de coordonnées respectives :
$(u_0~;~0), (u_0~;~u_0), (u_0~;~u_1), (u_1~;~u_1), (u_1~;~u_2), (u_2~;~u_2)(u_2~;~u_3)$.

3. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $v_n = u_n - 2$.

   a. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   b. Exprimer v_n en fonction de n, en déduire l'expression de u_n fonction de n.

   c. Calculer la limite de u_n.

PROBLÈME **10 points**

Le but du problème est d'étudier une fonction, dont on connaît la représenion graphique, d'étudier la position de la courbe par rapport à l'une de ses tangentes et de calculer une aire.

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x\ln x - x.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f.
Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (voir annexe).
Unités graphiques utilisées : 2 cm sur chaque axe.
Joindre cette annexe à votre copie.

A. Étude de la fonction f

1. Étude des limites de f aux bornes de son intervalle de définition.

a. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. (On donne $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$).

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (On pourra mettre x en facteur).

2. Montrer que $f'(x) = 2\ln x + 1$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

4. Calculer les coordonnées du point A, intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ et de l'axe des abscisses. Placer ce point A sur le graphique donné en annexe.

B. Position de $(\mathscr{C})$ par rapport à l'une de ses tangentes

1. Établir qu'une équation de la droite (Δ), tangente en A à la courbe $(\mathscr{C})$ est : $y = 2x - 2\sqrt{\mathrm{e}}$.
Placer (Δ) sur le graphique donné en annexe.

2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - (2x - 22\sqrt{\mathrm{e}}).$$

a. Calculer $g'(x)$.

b. À l'aide du tableau de variations de g montrer que $g(x) \geqslant 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ est au-dessus de la droite (Δ) sur $]0\,;\,+\infty[$.

C. Calcul d'une aire

Soit H la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $H(x) = x^2\left(\ln x - \dfrac{1}{2}\right)$.

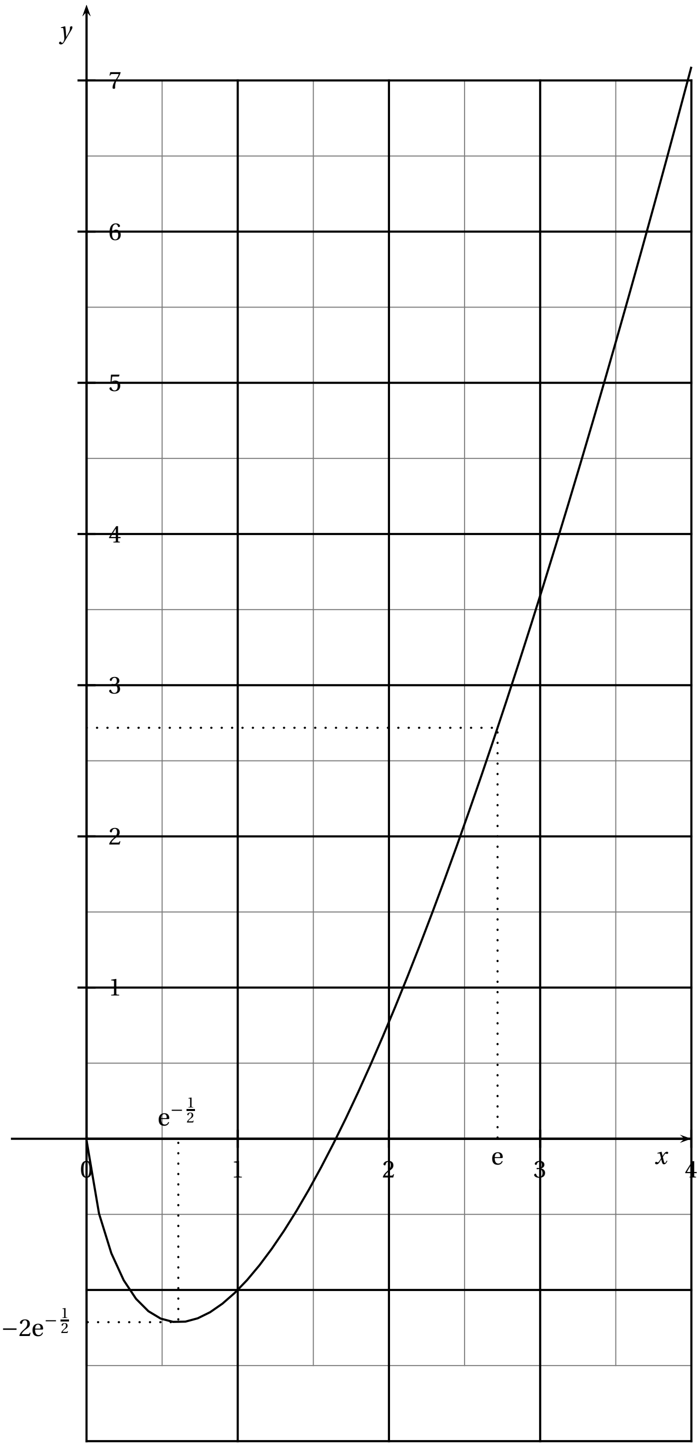
1. Calculer $H'(x)$.

2. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \left(2x\ln x - 3x + 2\sqrt{\mathrm{e}}\right)\,\mathrm{d}x$.

3. Cette intégrale correspond au calcul de l'aire d'un domaine plan.

a. Colorier ce domaine sur la figure.

b. Donner, en cm^2, une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de cette aire.



Annexe

∾ Baccalauréat ES France septembre 1998 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

On s'intéresse à l'évolution de la population mondiale entre les années 1950 et 1990. Le document ci-après donne une représentation graphique des données pour les années 1950, 1960, 1970, 1980 et 1990 en papier semi-logarithmique.
L'allure du graphique incite à chercher un modèle sous la forme d'une fonction f définie par :

$$f(t) = A\mathrm{e}^{at}$$

où t désigne le rang de l'année, avec comme origine des temps l'année 1950, et $f(t)$ la population en milliards d'habitants.

1. Déterminer les coe fficients A et a en utilisant les données de 1950 et de 1990, à savoir :

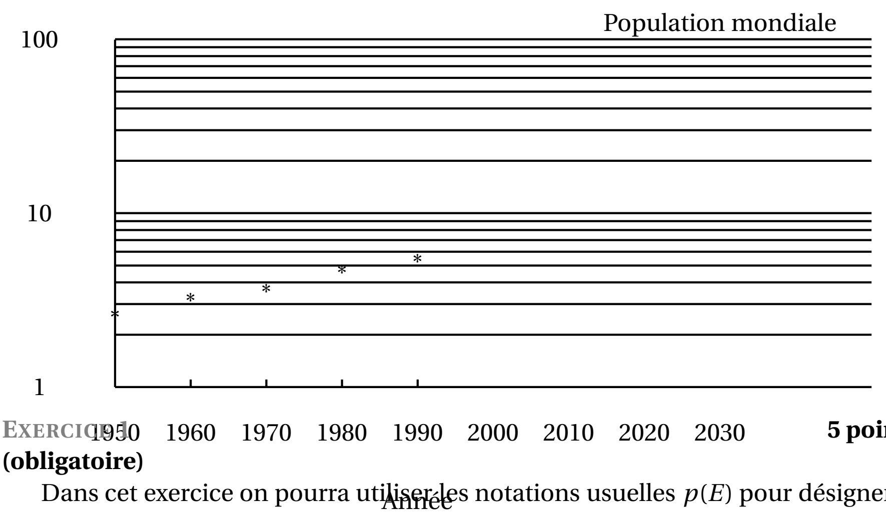
Rang t	0	40
Population en milliards d'habitants	2,5	5,2

On donnera les valeurs exactes de A et a puis des valeurs approchées à 10^{-4} près.
Dans la suite on considérera que : $f(t) = 2,5\mathrm{e}^{0,018t}$.

2. Représenter graphiquement f dans le même repère semi-logarithmique que le nuage (document page suivante). Justifier le tracé.

3. À l'aide du modèle proposé, calculer une estimation de l'année au cours de laquelle la population mondiale devrait dépasser 10 milliards d'habitants. Indiquer sur le graphique comment contrôler ce résultat.

4. Calculer $\dfrac{f(t+1) - f(t)}{f(t)}$.
Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée.
Interpréter ce résultat en terme de taux de croissance annuel.



EXERCICE 2 **5 points**
(obligatoire)

Dans cet exercice on pourra utiliser les notations usuelles $p(E)$ pour désigner la probabilité d'un évènement E, $p(\mathrm{F}/\mathrm{E})$ ou $p_{\mathrm{E}}(\mathrm{F})$ pour désigner la probabilité conditionnelle de F, sachant l'évènement E réalisé.

Un concours de recrutement de techniciens hautement qualifiés est ouvert uniquement aux étudiants de deux écoles ; l'une s'appelle l'école Archimède, l'autre l'école Ptolémée.
On dispose des informations suivantes concernant les taux de réussite à ce concours pour l'année 1997 :
- le taux de réussite pour les candidats issus de l'école Archimède est de : 85 % ;
- le taux de réussite pour les candidats issus de l'autre école est de : 80 % ;
- le taux de réussite pour l'ensemble des candidats est de : 82 %.
On peut interpréter ces données en termes probabilistes ; on suppose pour cela qu'on choisit un candidat au hasard.
On note R l'évènement : « le candidat a réussi ».
On note de même A l'évènement : « le candidat est issu de l'école Archimède ».
On note $\overline{\text{R}}$ et $\overline{\text{A}}$ les évè nements contraires de R et de A.

1. Interpréter les données numériques de l'énoncé en termes probabilistes.

2. Les évènements R et A sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse.

3. L'objet de cette question est de déterminer la proportion de candidats issus de l'école Archimède parmi les candidats.
On note x la proportion de candidats issus de l'école Archimède parmi les candidats : c'est aussi la probabilité qu'un candidat, choisi au hasard, soit un candidat issu de l'école Archimède.

a. Exprimer $p(\text{R} \cap \text{A})$, $p\left(\overline{\text{A}}\right)$ et $p\left(\text{R}\overline{\text{A}}\right)$ en fonction de x.

b. En déduire l'expression de $p(\text{R})$ en fonction de x.

c. Déterminer la valeur de x.

EXERCICE 2 **5 points**
(spécialité)

Les deux questions **1.** et **2.** *peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

1. On envisage un jeu publicitaire sous la forme d'un QCM (questionnaire à choix multiples).
Il comporte quatre questions et, pour chaque question, trois réponses sont possibles dont une seule exacte.
Un joueur répond en choisissant au hasard une réponse pour chaque question.

a. De combien de façons différentes peut-il remplir le questionnaire ?

b. On nomme X la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes obtenues par le joueur. Donner la loi de probabilité de X.

2. Pour accroître la difficulté, on modifie le QCM : il comporte cette fois cinq questions et, pour chaque question, quatre réponses sont possibles dont une seule exacte.
Un joueur remplit au hasard le QCM.
La deuxième ligne du tableau ci-dessous indique les probabilités respectives pour que le joueur ait exactement 0, 1, 2, 3, 4, 5 réponses justes.

5pt

Nombre de bonnes réponses	0	1	2	3	4	5
Probabilité correspondante	$\frac{243}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{270}{1024}$	$\frac{90}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{1}{1024}$
Nombre de points obtenus					$16-x$	20

Il est prévu d'attribuer 4 points par réponse juste, on ne sait comment pénaliser une réponse fausse : on note x le nombre entier de points retirés au joueur par réponse fausse.

a. Recopier le tableau ci-dessus et compléter la dernière ligne, en indiquant dans chaque cas le nombre de points obtenus en fonction de x. On définit ainsi une variable aléatoire N égale au nombre de points obtenus par le joueur.

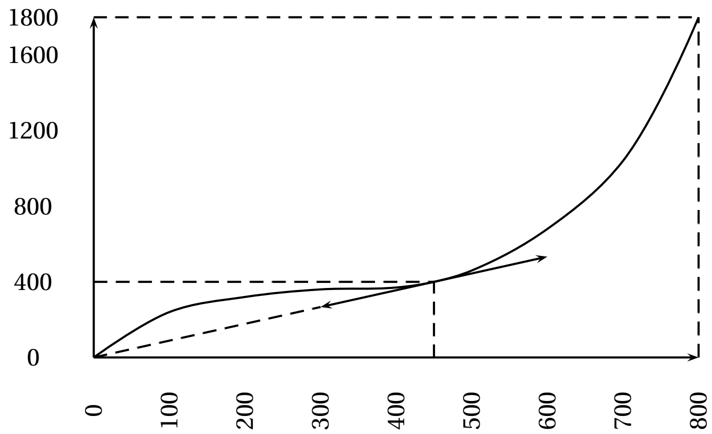
b. Exprimer l'espérance de N en fonction de x.

PROBLÈME **10 points**

Une entreprise spécialisée produit deux types de détergents liquides qu'on nommera A et B pour simplifier.
Les deux parties du problème sont indépendantes.

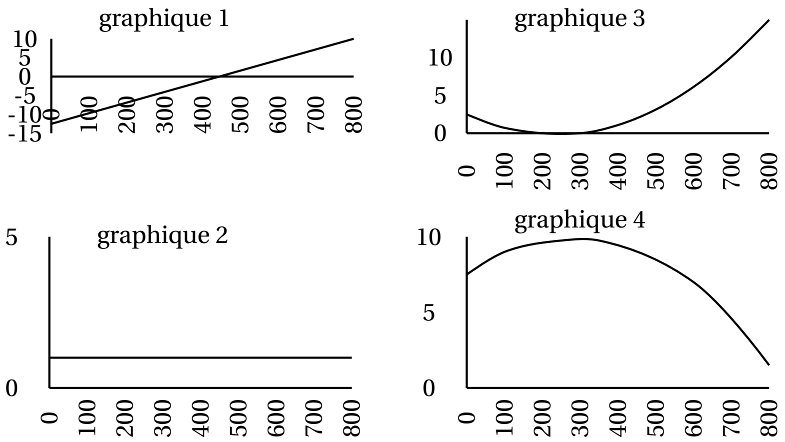
Partie A

La courbe ci-dessous représente le coût total de production du produit A en fonction de la quantité produite. On note x la quantité produite exprimée en litres et $C_T(x)$ le coût total exprimé en francs, x variant de 0 à 800.
On notera que $C_T(0) = 0$, $C_T(450) = 400$, $C_T(800) = 800$ et que la tangente au point d'abscisse 450 passe par l'origine O du repère.



Répondre aux questions suivantes en utilisant les informations portées sur ce graphique.

1. Les économistes définissent le coût marginal comme le supplément de coût de production engendré par la production d'une unité supplémentaire. On considère qu'il peut être modélisé par la dérivée du coût total. Nous le noterons C_m. On a donc $C_m = C'_T$. Parmi les quatre graphiques (1, 2, 3 et 4) de la feuille jointe, un correspond au coût marginal associé à la production du détergent A. Lequel ? Justifier la réponse.



2. Déterminer $\displaystyle\int_0^{450} \mathrm{C}_m(x)\,dx$.

Partie B

Pour le détergent B l'entreprise est en situation de monopole. Une étude a permis de modéliser le coût moyen de production par :

$$f(x) = 0,5x + \frac{8}{x} \text{ où } x > 0.$$

Le coût moyen $f(x)$ est exprimé en milliers de francs et la quantité produite x en hectolitres. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan (unité graphique : 1 cm).

1. Étude de la fonction coût moyen

a. Étudier le sens de variation de cette fonction sur l' intervalle $]0,\ +\infty[$.

b. Déterminer les limites de $f(x)$ en 0 et $+\infty$.

c. Montrer que la droite D d'équation $y = 0,5x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à D.

d. Construire $\mathscr{C}$ ainsi que D, donner un tableau de valeurs.

2. Seuils de rentabilité pour l'entreprise
L'entreprise ne peut être bénéficiaire que si le prix de vente de l'hectolitre est supérieur au coût moyen de fabrication.
Le prix de vente de l'hectolitre $p(x)$ est fonction de la quantité x vendue.

$$p(x) = -0,8x + 13$$

où $p(x)$ est exprimé en milliers de francs et x en hectolitres.

a. On note $\mathscr{P}$ la représentation graphique de la fonction p. Tracer $\mathscr{P}$ dans les mêmes axes que la représentation de f, puis déterminer graphiquement l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise soit bénéficiaire.

b. Retrouver le résultat précédent par le calcul. (On pourra se ramener à une inéquation du second degré).

Baccalauréat ES Polynésie septembre 1998

EXERCICE 1 **4 points**

Le tableau ci-dessous représente la dette extérieure en pourcentage du PIB pour la Belgique (PIB : Produit Intérieur Brut).

x_i : années	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
y_i dette en % du PIB	0,2	0,1	0,1	0,5	1,8	4,5	11,0	16,6	20,1	23,2	21,2

Source : CEE Eurostat Monnaies et Finances 1987.

1. Représenter le nuage de points associés à cette série statistique en choisissant des unités graphiques adaptées.

2. Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique : le résultat sera lu sur la calculatrice et arrondi à 10^{-2} près.

3. On veut déterminer la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindre carrés. Caractériser cette droite par une équation de la forme $y = mx + p$ où m est l'arrondi à 10^{-4} près et p l'arrondi à 10^{-1} près des valeurs lues sur la calculatrice.

4. **a.** Utiliser la question précédente pour prévoir la dette extérieure de la Belgique, en pourcentage du PIB en 1986.

   b. La valeur réelle atteinte en 1986 est égale à 20,6. À quelle erreur, en pourcentage de la valeur réelle, l'estimation conduit-elle ?

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **5 points**

Un patineur participe à une compétition. Deux de ses sauts l'inquiètent. Il ne réussit le premier saut que dans 95 % des cas. Comme il est émotif, s'il ne réussit pas ce premier saut, il rate le deuxième 3 fois sur 10 ; sinon, si tout va bien lors du premier saut, il réussit le deuxième dans 90 % des cas.
On notera $\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire d'un événement A.
Soit R_1 l'évènement : « le patineur réussit le premier saut ».
Soit R_2 l'évènement : « le patineur réussit le deuxième saut ».

1. **a.** Calculer la probabilité de l'événement R_1.

   b. Calculer la probabilité de l'évènement sachant que R, est réalisé.

   c. Calculer la probabilité de l'évènement R_2 sachant que R_1 n'est pas réalisé.

2. Déterminer la probabilité de l'évènement : « le patineur réussit les deux sauts ».

3. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement R_2.

   b. Un spectateur, arrivé en retard, voit le patineur réussir le deuxième saut. Calculer la probabilité qu'il ait aussi réussi le premier saut.

4. Manquer le premier saut fait perdre 0,1 point, manquer le deuxième saut fait perdre 0,2 point ; le règlement prévoit que les pénalités s'ajoutent.
   Soit X la variable aléatoire donnant le total des pénalités obtenues par ce patineur lors de la compétition.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X. Quelle interprétation peut-on en faire ?

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On prendra pour unité graphique 1 cm sur chaque axe. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2,5 + x)\mathrm{e}^{-0,5x+1}.$$

Partie A

▷ **I.** Étude de la fonction f.

1. Étudier le sens de variation de f.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
3. Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{2,5}{\mathrm{e}^{-0,5x+1}} + 2\mathrm{e} \times \dfrac{0,5x}{\mathrm{e}^{-0,5x}}$.
   En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f. Tracer sa représentation graphique dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

▷ **II.** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 0,3x + 1$.

1. Construire dans le même repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la représentation graphique de g.
2. On veut résoudre dans l'intervalle $[0 ; 10]$ l'équation $f(x) = g(x)$, c'est-à-dire $f(x) - g(x) = 0$.
   Pour cela on pose, pour tout x de $[0 ; 10]$, $h(x) = f(x) - g(x)$.

   a. En utilisant les résultats obtenus à la question **1.**, montrer que, pour tout x de $[0 ; 10]$, $h'(x)$ est strictement négatif.

   b. En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $[0 ; 10]$ une solution unique que l'on notera α.

   c. Par lecture graphique, encadrer α à l'aide de deux nombres entiers consécutifs.

   d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B

▷ **I.** On considère un produit pour lequel, en fonction du prix unitaire p (en francs), la demande est donnée par $f(p)$ et l'offre par $g(p)$ (p appartient à $[0 ; 10]$).

1. Donner le prix d'équilibre c'est-à-dire celui pour lequel l'offre est égale à la demande.
2. Vérifier que, pour un prix de 3,10 F, si le prix augmente de 1 %, la demande diminue de 1 % environ.

▷ **II.** La fonction E est définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par $\mathrm{E}(x) = x\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.
En économie, E désigne l'élasticité de f.

1. Vérifier que, pour tout x de $[0\,;\,10]$, $\mathrm{E}(x) = \dfrac{-0,5x^2 - 0,25x}{x+2,5}$.

2. **a.** Résoudre dans $[0\,;\,10]$ l'équation : $\mathrm{E}(x) = -1$.

b. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} par défaut de la solution.

Baccalauréat ES Sportifs de haut-niveau octobre 1998

EXERCICE 1 **4 points**

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
Neuf amis, cinq garçons et quatre filles, décident de tirer au sort deux conducteurs, qui devront rester sobres durant une soirée.
Chacun écrit son nom sur un carton glissé ensuite dans une boite. L'un d'entre eux extrait au hasard, successivement et sans remise, deux cartons de la boîte.
On définit les évènements G_1, G_2, F_1, et F_2 par :
G_1 « Un garçon est désigné au premier tirage » ;
G_2 « Un garçon est désigné au deuxième tirage » ;
F_1 « Une fille est désignée au premier tirage » ;
F_2 « Une fille est désignée au deuxième tirage ».

1. **a.** Calculer la probabilité que le nom d'une fille apparaisse au deuxième tirage sachant que le nom d'un garçon a été lu sur le premier carton.

   b. Calculer la probabilité de l'évènement $G_1 \cap F_2$.
   La comparer à celle de l'évènement $G_2 \cap F_1$.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait deux conductrices en fin de soirée.

3. Calculer la probabilité que le sort désigne une fille au deuxième tirage.

4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles désignées.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer son espérance mathématique $E(X)$.

EXERCICE 2 **5 points**
(obligatoire)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 4 cm), la courbe $\mathscr{C}$, représentée ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $I =]0\,;\ e^{1,5}]$.
La fonction dérivée de f est notée f'.
Les variations de f sont données par le tableau suivant :

x	0		a		$e^{1,5}$
$f(x)$	||	↗	$1/4$	↘	

On précise que :
• Les droites (Δ) et (D) sont tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ respectivement aux points A d'abscisse a et B d'abscisse 1.
• La droite (Δ) est parallèle à l'axe des abscisses.
• L'axe des ordonnées est asymptote à $\mathscr{C}$.

I) Par lecture graphique, sans justification des résultats, donner :

1. Les valeurs suivantes : $f(\mathrm{e})$, $f(a)$, $f'(1)$, $f'(a)$.

2. La limite de f en 0.

3. Le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x, x étant dans l'intervalle I.

4. L'ensemble des solutions, sur l'intervalle I, de l'inéquation : $f'(x)?0$.

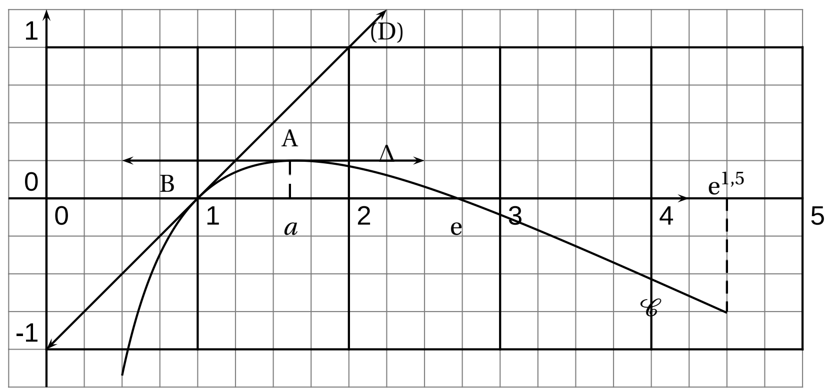
5. Une interprétation du nombre $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$ et trouver parmi les intervalles suivants celui auquel appartient ce nombre :

$$[0\,;\,0,2[,\ [0,2\,;\,0,4[,\ [0,4\,;\,0,6[,\ [0,6\,;\,1[,\ [1\,;\,2[.$$

II) La fonction f est définie sur $]0\,;\,\mathrm{e}^{1,5}]$ par : $f(x) = \ln x - (\ln x)^2$.

1. Retrouver par le calcul le résultat trouvé en **I. 3.**.

2. Déterminer le nombre a, abscisse du point A de la courbe $\mathscr{C}$.



EXERCICE 2 **5 points**
(spécialité)

Un salarié remarque qu'il lui reste, chaque mois, 2 000 F (francs français) de son salaire mensuel.
Il décide donc, en 1998, de réaliser une épargne « prudente » de la façon suivante :
Le 28 de chaque mois, il verse 50 % du solde de son compte courant sur un plan d'épargne.
Le solde est nul le 28 décembre 1997.
Le 28 janvier 1998, le solde de son compte courant est : $S_1 = 2\,000$ F ; il verse donc la

somme $e_1 = 1\,000$ F sur son plan d'épargne et laisse 1 000 F sur son compte courant. Le 28 février 1998, le solde S_2 est égal à 3 000 F : c'est-à-dire 1 000 F restant, plus 2 000 F d'économies mensuelles. Il verse donc $e_2 = 1500$ F sur son plan d'épargne.

1. Calculer e_3 et e_4, versements respectifs de son compte courant à son plan d'épargne le 28 mars et le 28 avril.

2. On désigne par e_n le montant théorique du versement du compte courant au plan d'épargne le 28 du n^{e} mois qui suit le mois de décembre 1997.

On a donc $e_{n+1} = \frac{1}{2}(e_n + 2000)$.

Pour tout nombre entier naturel n non nul, on définit la suite (v_n) par $v_n = 2000 - e_n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_1 = 1000$.

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. Calculer $v_1 + v_2 + \ldots + v_{12}$.

3. **a.** Exprimer e_n en fonction de n.

b. Trouver le montant de la somme capitalisée sur le plan d'épargne au 29 décembre 1998.

PROBLÈME **11 points**

On considère un produit dont le prix unitaire est x (en milliers de francs français).

D'après une étude de marché, l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ (en milliers d'objets) de ce produit sont définies, pour tout x positif ou nul, par les formules :

$$f(x) = e^{0,5x} - 1 \text{ et } g(x) = \frac{8}{e^{0,5x} + 1}.$$

Partie A

1. **a.** Déterminer $f(0)$ et la limite de f en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

2. **a.** Déterminer $g(0)$ et la limite de g en $+\infty$.

b. Étudier les variations de g sur $[0 ; +\infty[$.

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormal (on prendra pour unité graphique 4 cm).

Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g après avoir déterminé et tracé les tangentes respectives à ces deux courbes aux points d'abscisse 0.

Partie B

L'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution unique p dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

1. Par lecture graphique, donner une approximation à 0, 1 près de p et du nombre $n = f(p)$ (on fera apparaître les tracés permettant cette lecture).

2. a. Calculer p et n.

   b. Le nombre p est appelé « prix d'équilibre » du produit.
   Donner le prix d'équilibre, exprimé en francs, arrondi au franc près, ainsi que le nombre correspondant d'objets proposés sur le marché.

Partie C

On considère les nombres $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\ln 9} g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \mathrm{I} - np$.

1. Donner une interprétation géométique de I.
En déduire une interprétation géométrique de J (on pourra utiliser des hachures de couleurs différentes).

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$h(x) = x - 2\ln\left(\mathrm{e}^{0,5x} + 1\right).$$

   a. Déterminer $h'(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de h.

   b. En déduire que I égale $8\ln 9 - 8\ln 4$.

   c. En économie, on considère que J exprime, en millions de francs, la « rente » des consommateurs.
   Déterminer, au millier de francs près, une estimation de la « rente » des consommateurs.

Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 1998

EXERCICE 1 **5 points**

I. Le tableau ci-dessous indique les pourcentages d'accès au niveau baccalauréat d'une génération d'élèves.

Année x_i	1980	1982	1984	1986	1988	1990	1992	1994
Taux d'accès au niveau baccalauréat y_i	34 %	37,5%	35,8%	39,8 %	46,3 %	56,1 %	62,5 %	70,7 %

Source : d'après un document du Ministère de l'Éducation Nationale

N.B. *Les calculs statistiques seront effectués à la machine, aucun détail n'est demandé dans cette partie.*

1. **a.** Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i,\ y_i)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal :
   - sur l'axe des abscisses on placera 1980 à l'origine et on choisira 1 cm pour une année ;
   - sur l'axe des ordonnées on placera 30 à l'origine et on choisira 1 cm pour 2 %.

   b. Calculer les coordonnées du point moyen G associé à cette série double et placer ce point sur le graphique précédent.

2. **a.** Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. Peut-on envisager un ajustement affine ?

   b. Déterminer une équation de la droite de régression D de y en x : on prendra la valeur approchée à trois décimales par défaut pour le coefficient directeur de la droite et l'arrondi à l'unité pour l'autre coefficient.

   c. Tracer la droite D sur le graphique de la question **1. a.** en expliquant sa construction.

3. En supposant que l'évolution ait été la même pour les années suivantes, donner une estimation du taux d'accès au niveau baccalauréat pour 1996.

II. Lors de la publication du tableau de la partie **I.**, le taux d'accès au niveau baccalauréat pour 1996 n'était pas encore connu. On l'a connu seulement plus tard.

1. Déterminer le taux d'accès en 1996 si l'on sait que, pour la période 1980 (incluse) à 1996 (incluse), la moyenne de ce taux est exactement de 50 %, en ne retenant que les années paires.

2. Comparer alors avec l'estimation faite à la question **3.** de la partie **I** et donner en pourcentage l'erreur commise en remplaçant la valeur exacte par l'estimation faite.

EXERCICE 2 **5 points**
(obligatoire)

Dans une grande ville, une maladie à incubation lente touche 0,1 % de la population. Un test de dépistage est proposé :
- lorsqu'une personne est malade, le test est positif dans 95 % des cas et négatif dans 5 % des cas ;
- lorsqu'une personne n'est pas malade, le test est négatif dans 96 % des cas, mais déclare la personne malade, c'est-à-dire est positif, dans 4 % des cas.

Lorsqu'une personne, prise au hasard, passe le test, on note

– M l'évènement « la personne est malade » ;

– $\overline{\text{M}}$ l'évènement « la personne n'est pas malade » ;

– T l'évènement « le test est positif » ;

– $\overline{\text{T}}$ l'évènement « le test est négatif ».

1. Donner la valeur de la probabilité $p(\text{M})$ et les valeurs des probabilités conditionnelles suivantes : $p(\text{T}/\text{M})$, $p\left(T/\overline{\text{M}}\right)$, $p\left(\overline{\text{T}}/\text{M}\right)$ et $p\left(\overline{\text{T}}/\overline{\text{M}}\right)$.

2. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement « M et T », notée $p(\text{M} \cap \text{T})$.

   b. Calculer la probabilité de l'évènement « M et T », notée $p(\text{M} \cap \text{T})$.

   c. En déduire que la probabilité de T vaut $p(\text{T}) = 0{,}040\ \ 91$.

3. Calculer la probabilité pour que le test donne un résultat non conforme à la réalité.

4. Le maire de la ville passe le test : il est positif. Donner la probabilité, à 10^{-1} près, que le maire soit effectivement malade.

EXERCICE 2 **5 points**
(spécialité)

À partir de 1997 une association d'aide à la recherche médicale envoie chaque année à Monsieur X un courrier pour l'inviter à l'aider financièrement par un don. Monsieur X a répondu favorablement en 1997 en envoyant un don. On admet que, chaque année à partir de 1998, la probabilité pour que Monsieur X fasse un don est égale à 0,9 s'il a fait un don l'année précédente et à 0,4 s'il n'a rien donné l'année précédente.

On note pour tout entier naturel n :
- E_n l'évènement : « Monsieur X est donateur en 1998 + n » ;
- P_n la probabilité de E_n ;
- $\overline{\text{E}_n}$ l'évènement contraire de E_n.

1. Traduire les données en termes de probabilités conditionnelles concernant les événements E_{n+1}, E_n, $\overline{\text{E}_n}$.

2. **a.** Préciser la valeur de P_0.

b. Calculer $P(E_1 \cap E_0)$ et $P(E_1 \cap \overline{E_0})$. En déduire la valeur de P_1.

3. **a.** Montrer que $P(E_{n+1} \cap E_n) = 0{,}9P_n$ et que $P\left(E_{n+1} \cap \overline{E_n}\right) = 0{,}4(1 - P_n)$ pour tout entier n.

b. En déduire que $P_{n+1} = 0{,}5P_n + 0{,}4$ pour tout entier naturel n.

c. Quelle est la probabilité pour que Monsieur X soit donateur en 2001 ?

4. On définit une suite (U_n) en posant pour tout entier naturel n : $U_n = P_n - 0{,}8$

a. Démontrer que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

b. Exprimer (U_n) en fonction de n.

c. En déduire que $P_n = 0{,}1 \times 0{,}5^n + 0{,}8$ pour tout entier naturel n.

d. Déterminer la limite de la suite (P_n).

PROBLÈME — 10 points

Sur le graphique ci-après, sont tracées dans un repère orthogonal, les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de deux fonctions f et g, dérivables sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Partie A - Question préliminaire (les résultats seront donnés à 0,1 près).

1. Résoudre graphiquement les équations $f(x) = 7$ et $f(x) = 4$.
2. Lire graphiquement $g(0)$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,14]$.
4. En déduire le signe de f' sur l'intervalle $[0\,;\,14]$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

Partie B

La fonction f est la fonction de demande d'un produit, elle met en correspondance le prix $f(x)$ du produit et la quantité x achetée par les consommateurs.
La fonction g est la fonction d'offre, elle met en correspondance le prix $g(x)$ du produit et la quantité x vendue par les producteurs. La quantité est exprimée en milliers d'unités et le prix en centaines de francs.

1. **Interprétation économique**
   À l'aide de la lecture graphique faite en **A**, répondre aux questions suivantes :

a. Quelle quantité est achetée par les consommateurs :
- si le prix est de 700 F ?
- si le prix est de 400 F ?

b. Au-dessous de quel prix les producteurs ne sont-ils pas prêts à vendre ?

2. Étude de la recette marginale
La fonction recette R est définie sur l'intervalle $[0\,;\,14]$ par $\mathrm{R}(x) = xf(x)$.
Une valeur approchée de la recette marginale (recette pour le x^{e} produit vendu) est donnée par $\mathrm{R}'(x)$, où R' est la fonction dérivée de la fonction R.
On remarque que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,14]$, $\mathrm{R}'(x) = f(x) + xf'(x)$.

a. Déduire du **A. 4.** le signe de $\mathrm{R}'(x) - f(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,14]$.

b. Comparer alors, pour tout niveau de production, la recette marginale et le prix de vente $f(x)$.

3. Équilibre du marché

a. La fonction f représentée sur le graphique est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{40}{x+2}.$$

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Quelle interprétation économique peut-on faire de ce résultat ?

b. La fonction g représentée sur le graphique est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{18}x^2 + 3$.
Dans un marché à concurrence pure et parfaite, le prix p_0 qui se forme sur le marché selon la « loi de l'offre et de la demande » correspond à l'égalité de l'offre et de la demande, c'est-à-dire à l'ordonnée du point d'intersection I des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Soit x_0 l'abscisse du point d'intersection I.
- Montrer par le calcul que x_0 est solution de l'équation

$$\text{(E)} \qquad x^3 + 2x^2 + 54x - 612 = 0.$$

- Développer l'expression $(x-6)(x^2+8x+102)$, résoudre l'équation (E), et en déduire la valeur de x_0.
- Calculer $p_0 = f(x_0)$.

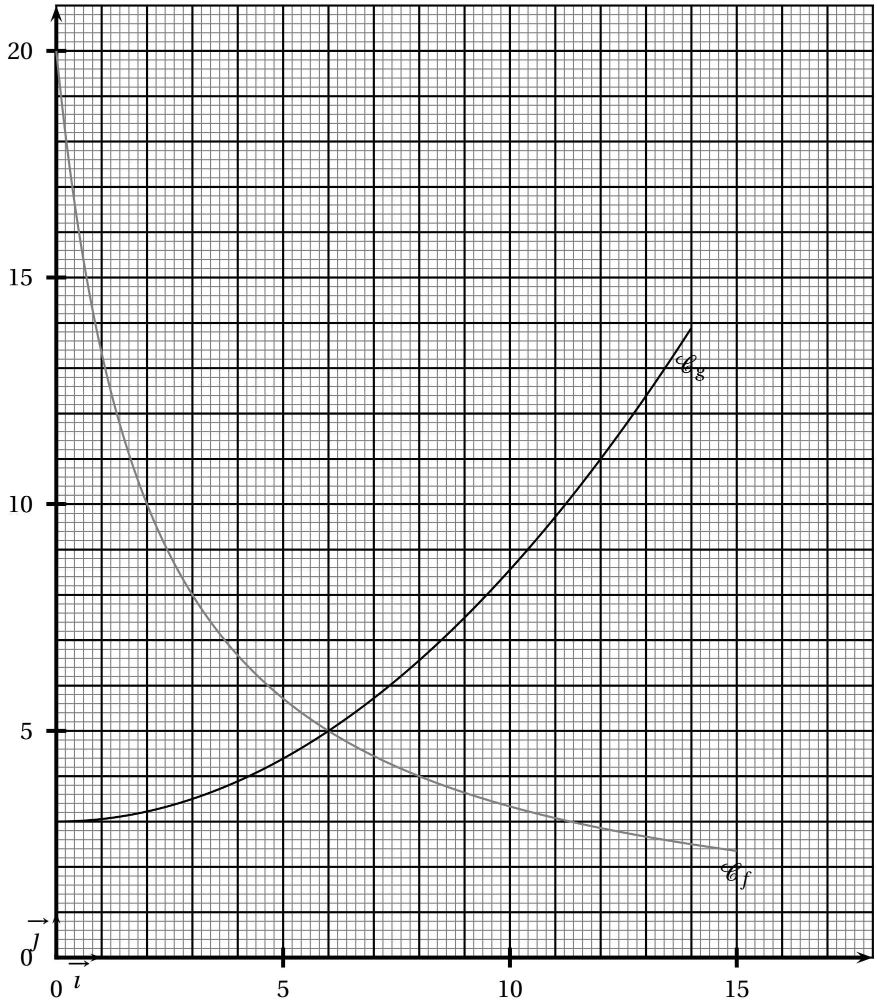
4. Le surplus des consommateurs
Le surplus des consommateurs se définit comme la différence entre le montant maximal que les consommateurs auraient été prêts à payer pour acheter une quantité x_0 et le montant qu'ils payent effectivement.
Ce nombre $\mathrm{S_C}$, en situation de concurrence pure et parfaite, est donné en centaine de milliers de francs par :

$$\mathrm{S_C} = \int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x - p_0x_0.$$

On prendra $x_0 = 6$ et $p_0 = 5$.

a. Calculer S_C.

b. Soit les points O$(0\,;0)$, P$(x_0\,;0)$, I$(x_0\,;\,p_0)$ et R$(0\,;\,p_0)$.
Sachant que le produit $p_0 \times x_0$ est représenté par l'aire du rectangle OPIR, interpréter graphiquement le surplus des consommateurs.



Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie décembre 1998

EXERCICE 1 **4 points**

Au cours d'une kermesse, l'animateur d'un stand dispose, dans un enclos, de douze cages peintes : sept sont blanches, deux noires et les trois autres vertes. L'animateur place alors une souris dans l'enclos. On suppose qu'à chaque jeu, la souris choisit d'entrer au hasard dans une cage et que tous les choix sont équiprobables.
Un joueur participe au jeu. Le règlement du jeu est le suivant :
– si la souris entre dans une cage blanche, le joueur perd ;
– si la souris entre dans une cage noire, le joueur gagne ;
– si la souris entre dans une cage verte, l'animateur remet la souris dans l'enclos ; si la souris entre alors dans une cage noire, le joueur gagne, sinon il perd.
On suppose que le choix de la deuxième cage est indépendant du choix de la première.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement « le joueur gagne » est $\dfrac{5}{24}$
2. Un joueur possède 10 F qu'il verse pour participer à une partie. S'il gagne, il reçoit k francs ; sinon, il ne reçoit rien. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur la somme que possède le joueur après la partie.

   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatroire X.

   b. Calculer, en fonction de k, l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

   c. Quelle valeur faut-il donner à k pour que le jeu soit équitable (c'est-à-dire pour que ce joueur puisse espérer posséder 10 F à la fin de la partie) ?

EXERCICE 2 obligatoire **5 points**

Une lessive est vendue habituellement, dans les magasins A et B, par barils de 5 kg, au prix de 65 F le baril.

1. On suppose que cette lessive est en promotion dans ces deux magasins :

   a. Dans le magasin A, on fait une réduction de 10 % sur le prix du baril.
   Dans le magasin B, on offre 10 % de produit gratuit en plus pour l'achat d'un baril.
   Déterminer dans lequel des deux magasins il est le plus avantageux d'acheter cette lessive.

   b. Répondre à la même question si, dans A, on fait une réduction de 20 % et, dans B, on offre 25 % de produit gratuit en plus.
2. On suppose maintenant que, dans le magasin A, on fait une réduction de x % du prix du baril et que, dans le magasin B, on offre y % de produit gratuit en plus pour l'achat d'un baril.

a. Quelle relation doivent vérifier x et y pour que les promotions soient les mêmes dans les deux magasins ?
Dans ces conditions, déterminer x lorsque $y = 25$.

b. Dans cette question, $x = 10$. Quel pourcentage minimum, en nombre entier, de produit gratuit doit offrir le magasin B pour que sa promotion soit plus avantageuse que celle de A ?

EXERCICE 2 SPÉCIALITÉ **5 points**

Une observation faite sur la fréquentation d'un stade de football a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement de 80 %, ainsi que l'apparition de 4 000 nouveaux abonnés.
L'objet de cet exercice est l'étude du devenir du nombre annuel des abonnés, en supposant que la situtation décrite par l'observation reste la même au fil des ans.
Les questions **2.** *et* **3.** *peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*
On note a_n le nombre des abonnés à la fin de la n^{e} année et on précise que $a_0 = 7000$.

1. Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n, on a
$a_{n+1} = 0,8a_n + 4\,000$.

2. L'objet de cette question est l'étude graphique de la suite (a_n).
On considère un repère orthonormal (unité graphique : 0,5 cm représente 1000 abonnés).

a. Tracer dans ce repère la droite (D) d'équation $y = 0,8x + 4000$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$, pour les abscisses comprises entre 0 et 25 000.

b. Placer a_0 sur l'axe des abscisses. Utiliser les droites précédentes pour placer sur l'axe des abscisses les valeurs a_1, a_2 et a_3.

c. Si l'on poursuit le processus graphique précédent, quelle limite peut-on présumer pour la suite (a_n) ?

3. L'objet de cette question est l'étude numérique de la suite (a_n).
Soit (u_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par
$u_n = 20\,000 - a_n$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Soit n un nombre entier naturel ; exprimer u_n en fonction de n. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a
$a_n = 20\,000 - 13\,000 \times 0,8^n$.

c. En utilisant le résultat précédent, déterminer la limite de la suite (a_n).

d. Après combien d'années le nombre d'abonnés dépassera-t-il 16 000 ?

PROBLÈME **11 points**

Les objectifs de ce problème sont, en s'appuyant sur une fonction auxiliaire (partie A), l'étude d'une fonction f, le tracé de sa représentation graphique et le calcul d'une aire associé (partie B).

Partie A

★ Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique définie pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

1. Étudier le sens de variations de g (on ne demande pas d'étudier les limites de g en 0 et en $+\infty$).

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α appartenant à l'intervalle $[1\,;\,2]$.
   Expliquer pourquoi α est la seule solution de l'équation $g(x) = 0$, pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.
   Donner un encadrement de α, d'amplitude 10^{-2}.

3. Étudier le signe de $g(x)$ en fonction de x.

Partie B

★ Étude d'une fonction *f* et calcul d'une aire

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{1 - \ln x}{x}$$

et on note f' sa dérivée.
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   En déduire le sens de variations de f.

3.
   a. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

   b. Déterminer le point d'intersection I de $\mathcal{C}$ et (Δ) et étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à (Δ).
4. Tracer la droite (Δ) et la courbe $\mathcal{C}$.

5. Calculer la valeur exacte de l'aire, en cm^2, de la partie comprise sur le graphique entre $\mathcal{C}$, (Δ) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \text{e}$.
   (On pourra remarquer que $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} \times \ln x$).

ൟ Baccalauréat ES Amérique du Nord ൟ
juin 1999

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une salle de spectacle propose, pour la saison, des abonnements pour 4, 5 ou 6 spectacles.

Dans la population des abonnés, la répartition est la suivante :

• 43,5 % ont choisi l'abonnement 4 spectacles,
• 33 % ont choisi l'abonnement 5 spectacles,
• le reste a choisi l'abonnement 6 spectacles.

D'autre part, 65 % des abonnés sont des jeunes de moins de 25 ans, et dans cette population, la répartition est différente :

• 40 % ont choisi l'abonnement 4 spectacles,
• 40 % ont choisi l'abonnement 5 spectacles,
• le reste a choisi l'abonnement 6 spectacles.

On interroge un abonné au hasard.

• On note A l'évènement « L'abonné interrogé a moins de 25 ans ». Ainsi la probabilité $p(\text{A})$ de cet évènement est 0,65.
• On note B l'évènement « L'abonné interrogé a choisi 5 spectacles ».
• Pour tout évènement V, on note $\overline{\text{V}}$ l'évènement contraire de V.

1. **a.** Quelle est la probabilité que l'abonné interrogé ait 25 ans ou plus ?

   b. Sachant que l'abonné interrogé a moins de 25 ans, quelle est la probabilité qu'il ait choisi 5 spectacles ?

   c. Décrire l'évènement $(\text{A} \cap \text{B})$, et démontrer que la probabilité $p(\text{A} \cap \text{B})$ est égale à 0,26.

2. **a.** Démontrer que la probabilité $p\left(\overline{\text{A}} \cap \text{B}\right)$ est égale à 0,07.

   b. En déduire la probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé.

3. L'abonnement pour 4 spectacles coûte 50 euros, celui pour 5 spectacles coûte 60 euros, et celui pour 6 spectacles coûte 70 euros. On appelle X la variable aléatoire égale à la somme dépensée par l'abonné interrogé.

   a. Donner la loi de probabilité de X en complétant :

x_i	50	60	70
$p(X = x_i)$			

   b. Calculer l'espérance de X.

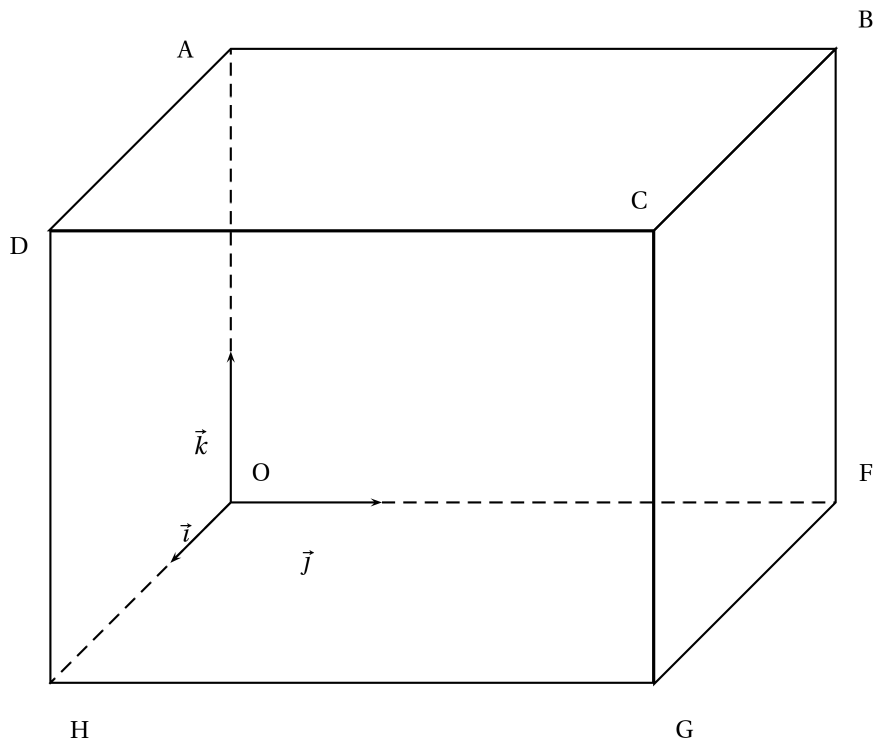
EXERCICE 1 **5 points**

Uniquement pour les candidats ayant opté pour l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

ABCDOFGH est un pavé défini par $\overrightarrow{\text{OH}} = 3\vec{\imath}$, $\overrightarrow{\text{OF}} = 4\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{\text{OA}} = 3\vec{k}$.

Soit L le milieu de [CG].



1. On considère l'ensemble (Π) des points dont les coordonnées x, y et z vérifient : $4x - 3y + 8z - 12 = 0$.

2. Parmi les points A, B, O, G, H, L lesquels appartiennent à (Π) ?

3. Justifier que l'ensemble (Π) est le plan (BLH).

4. Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan (BLH).

5. Soit (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.

   Montrer que (Δ) est l'ensemble des points M tels que $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \overrightarrow{\text{NH}} = 0\\ \text{et}\\ \overrightarrow{\text{AM}} \cdot \overrightarrow{\text{BL}} = 0.\end{array}\right.$ En déduire un système d'équations caractérisant la droite (Δ).

6. Montrer que le point de coordonnées $\left(-\dfrac{48}{89}\,;\,\dfrac{36}{89}\,;\,\dfrac{171}{89}\right)$ appartient à (Δ) et à (Π).

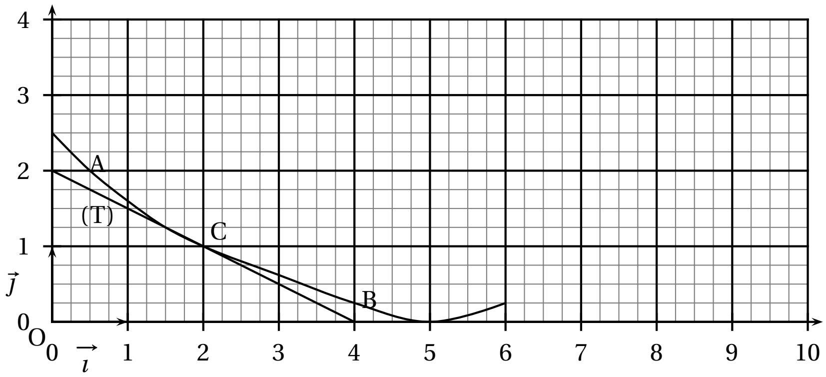
EXERCICE 2 **5 points**

Uniquement pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On donne, dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ du plan, la courbe représentative

(Γ) d'une fonction f, définie et dérivable sur $[0 ; 6]$.

Les points $A\left(\frac{1}{2} ; 2\right)$, $B\left(4 ; \frac{1}{4}\right)$ et $C(2 ; 1)$ sont des points de (Γ), et (T) est la tangente à (Γ) en C.



1. **a.** Déterminer par lecture graphique le minimum et le maximum de f sur $[0 ; 6]$.

   b. Déterminer par lecture graphique l'image par f de l'intervalle $[0 ; 2]$.

   c. En utilisant le graphique, donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < \frac{1}{2}$.

2. **a.** On admet que (T) est parallèle à (AB). Déterminer alors $f'(2)$.

   b. Déterminer l'équation réduite de (T), et celle de (AB).

   c. justifier à l'aide du graphique que, pour tout x de $\left[\frac{1}{2} ; 4\right]$ on a :

$$-\frac{1}{2}x + 2 \leqslant f(x) \leqslant -\frac{1}{2}x + \frac{9}{4}.$$

3. On pose $I = \int_{\frac{1}{2}}^{9} f(x)\,dx$. Déduire du résultat précédent **2. c.** que l'intégrale I est comprise entre $\frac{49}{16}$ et $\frac{63}{16}$.

PROBLÈME **10 points**

Une entreprise envisage la fabrication d'un nouveau produit. Sa décision dépend des résultats de plusieurs études :
Étude de la demande pour ce nouveau produit : c'est l'objet de la partie A.
Étude d'un coût moyen de production : c'est l'objet de la partie B.

Partie A

Une étude a permis d'établir le tableau suivant où, pour différentes observations, x_i désigne la quantité de produit (en milliers d'unités) que la clientèle est disposée à acheter, et y_i le prix de vente (en francs) d'une unité :

x_i	1,5	3	5	8	11	12
y_i	120	110	100	90	80	70

Ainsi, pour que la clientèle soit disposée à acheter 5 000 unités, le prix de vente d'une unité doit être fixé à 100 F.

1. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique.
Prendre 1 cm pour 1 millier d'unités en abscisse, et 1 cm pour 10 francs en ordonnée.
Dans les questions suivantes, le détail des calculs statistiques n'est pas demandé ; les résultats seront donnés à 10^{-2} *près.*

2. Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique.
Un ajustement affine est-il approprié ? justifier la réponse.

3. **a.** Donner une équation de la droite d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.

b. D'après ce modèle, comment faut-il fixer le prix de vente d'une unité si l'on veut pouvoir vendre un minimum de 6 500 unités ?

4. On admet que le prix de vente d'une unité, noté PV, est une fonction de la demande x (en milliers d'unités) définie, pour $x \in [2 ; 15]$, par : $\text{PV}(x) = -4,33x + 124,2$.
Représenter la fonction PV dans le repère utilisé dans la question 1.

Partie B

Le coût total de production (en francs) de x milliers d'unités est, pour $x \in [2 ; 15]$:

$$\text{CT}(x) = 105\,[x + 4 - 3\ln(x)]$$

et le coût moyen de production d'une unité est, pour $x \in [2 ; 15]$

$$\text{CM}(x) = \frac{\text{CT}(x)}{1000x}.$$

1. On note CM' la dérivée de la fonction CM.
Calculer CM'(x) et démontrer que CM'(x) a le même signe que $\ln(x) - \dfrac{7}{3}$ pour tout $x \in [2 ; 15]$.

2. Résoudre sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $\ln(x) - \dfrac{7}{3} \geqslant 0$.

3. **a.** Étudier les variations de CM sur l'intervalle $[2 ; 15]$.

b. Tracer la représentation graphique de CM dans le repère utilisé dans la partie **A**.

c. À l'aide du graphique, déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'entreprise peut faire un bénéfice. (On donnera la réponse sous forme d'un intervalle dont les bornes sont des entiers.)

Baccalauréat ES Antilles–Guyane juin 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal, dont les unités sont 1 cm sur chaque axe. Construire ce repère sur votre copie en plaçant l'origine du repère en bas et à gauche.

Partie A

1. Représenter la droite (D_1) d'équation $3x + y = 30$, la droite (D_2) d'équation $x + 4y = 32$ et la droite (D_3) d'équation $x + y = 10$.
2. Déterminer au moyen d'un calcul les coordonnées du point d'intersection I des droites (D_1) et (D_2).
3. Repérer graphiquement à l'aide d'une croix (« × ») les points du plan dont les coordonnées sont des nombres entiers positifs, x et y, qui vérifient de plus les conditions :

$$3x + y \leqslant 30\ ;\ x + 4y \leqslant 32\ ;\ x + y \geqslant 10.$$

Partie B

Un artisan fabrique deux sortes de poupées : des petites poupées et des grandes poupées.

Les petites poupées nécessitent 3 heures de travail et les grandes poupées une heure seulement. L'artisan, avec ses ouvriers, peut travailler 30 heures au plus par jour.

L'artisan ne dispose que de 32 mètres de tissu par jour. Il lui faut 1 mètre de tissu pour habiller une petite poupée et 4 mètres pour habiller une grande poupée.

On désigne par x le nombre de petites poupées et par y le nombre de grandes poupées produites dans une journée. L'artisan s'impose de fabriquer au moins 10 poupées par jour.

On admet que les contraintes de l'énoncé correspondent aux conditions suivantes :

x et y sont deux nombres entiers positifs	$3x + y \leqslant 30$;
$x \geqslant 0$;	$x + 4y \leqslant 32$
$y \geqslant 0$;	$x + y \geqslant 10$.

Le nombre total de poupées produites dans une journée de travail est représenté par $S = x + y$.

L'artisan veut que sa production journalière S soit maximum.

Combien de poupées de chaque sorte doit-il fabriquer ?

EXERCICE 1 **4 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Une suite réelle $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par son premier terme U_0 strictement positif et par la relation de récurrence suivante :

$$U_{n+1} - U_n = -0{,}04U_n.$$

Partie A

1. En fonction de U_0, calculer U_1, U_2 et U_3.

2. Démontrer que cette suite est une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison q que l'on déterminera.

3. Quel est son sens de variation ?

4. Exprimer U_n en fonction de U_0 et de n.

Partie B

Le 1er janvier 1997, la population d'une commune rurale était de 3 000 personnes. On admet que cette population a diminué de 4 % par an.

1. Quelle a été la population de cette commune au 1er janvier 1999 ?

2. Quelle sera la population de cette commune au 1er janvier 2000 ?

3. À partir de quelle année la population chutera-t-elle à moins de 2 000 personnes ?

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne la moyenne y des maximums de tension artérielle en fonction de l'âge x d'une population donnée.

Âge x	36	42	48	54	60	66
Tension y	12	13,5	12,6	14,3	15,4	15

1. Représenter graphiquement le nuage de points $M(x\ ;\ y)$ dans un repère orthogonal. On prendra pour unités graphiques 0,5 cm pour 1 an en abscisse et 3 cm en ordonnée pour l'unité de tension artérielle, l'origine correspond au point 1 de coordonnées (30 ; 10).

2. Dans cette partie, vous pourrez utiliser votre calculatrice.

   a. Calculer à 10^{-2} près le coefficient de corrélation entre x et y. On admet qu'un ajustement par la méthode des moindres carrés est justifié.

   b. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x et la représenter (les coefficients seront donnés à 0,001 près).

   c. Une personne de 70 ans a une tension de 16,1. Quelle serait sa tension théorique en utilisant la droite de régression ? Comparer avec la tension réelle.

   d. Compléter le tableau de l'annexe en utilisant les valeurs de « a » et de « b » obtenues pour la droite de régression. (1 point)
   Calculer la somme des « carrés » de la dernière colonne, associée à cet ajustement (calcul de la somme des résidus associés à cet ajustement).

Annexe :
À rendre avec la copie (après l'avoir complétée)
TABLEAU $a = \ldots\ldots\ b = \ldots\ldots$

x_i	y_i	$ax_i + b$	$y_i - (ax_i + b)$	$\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$
36	12			
42	13,5			
48	12,6			
54	14,3			
60	15,4			
66	15			

Somme des « carrés » de la dernière colonne : ....

PROBLÈME **11 points**

Le but du problème est l'étude d'une fonction et le calcul d'une aire liée à cette fonction.

Partie A

La courbe (Γ) ci-jointe (annexe 1) est la représentation graphique dans un repère orthonormal d'une fonction g définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
Les points $\text{A}\left(1\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$ et $\text{B}\left(\text{e}\ ;\ \dfrac{\text{e}^2}{2}\right)$ appartiennent à la courbe (Γ) et la tangente en A à (Γ) est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer $g(1)$; $g(\text{e})$ et $g'(1)$.
2. Déterminer les réels a et b, sachant que la fonction g est définie sur $]0\,;+\infty[$ par une expression de la forme :
$$g(x) = \frac{x^2}{2} + a + b\ln x.$$
3. Sachant que $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + 1 - \ln x$, retrouver au moyen d'un calcul, le sens de variation de g. (Le calcul des limites n'est pas demandé.)
En utilisant ce dernier résultat, étudier le signe de g sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par
$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{2}.$$

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
(On admet le résultat suivant : limite en $+\infty$ de $\dfrac{\ln x}{x} = 0$.)
2. Calculer la dérivée f' de f.
Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour tout réel positif x.

En déduire les variations de f.

3. Montrer que la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f dans un repère orthonormal admet deux asymptotes que l'on précisera.
La courbe $(\mathscr{C})$ de f est donnée en annexe dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité 2 cm sur chaque axe.

4. On admet l'existence d'un réel α unique, appartenant à $\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Que représente α pour la courbe $(\mathscr{C})$? Placer sur la courbe $(\mathscr{C})$ le point I d'abscisse α. Montrer que $\ln\alpha = -\dfrac{\alpha^2}{2}$. En déduire que $f'(\alpha) = \dfrac{1+\alpha^2}{\alpha^2}$.

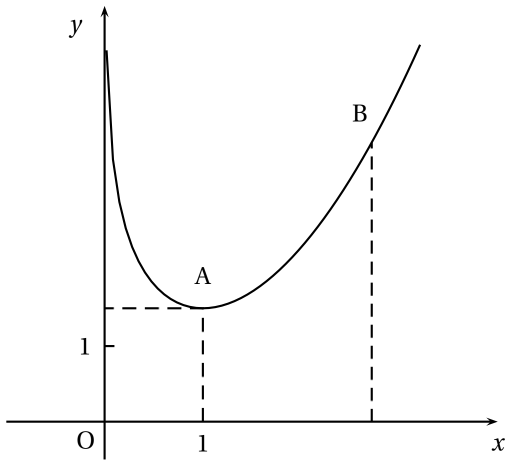
Partie C

1. Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$.

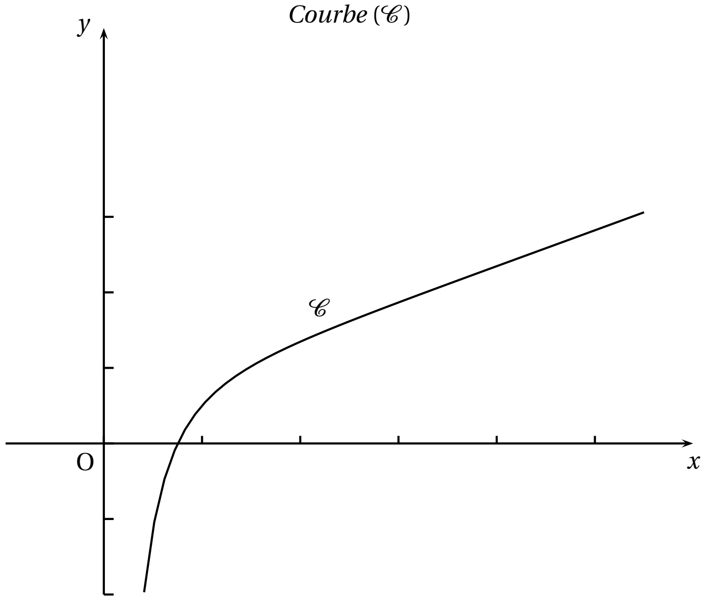
2. En déduire le calcul de $\text{J} = \displaystyle\int_1^t \left(\frac{\ln x}{x}\right) \text{d}x$.

3. Hachurer sur le graphique donné en annexe le domaine plan limité par $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.
Déterminer l'aire, en cm^2 , de ce domaine.

Annexe 2
À rendre avec la copie (après l'avoir complétée)
Courbe (Γ)



Courbe ($\mathscr{C}$)



Baccalauréat ES Asie juin 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Le tableau suivant recense par clinique le nombre de postes du personnel non médical en fonction du nombre de lits de la clinique :

Clinique	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}
Nombre de lits x_i	122	177	77	135	109	88	185	128	120	146	100
Nombre de postes y_i	205	249	114	178	127	122	242	170	164	188	172

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal en prenant pour unités graphiques : 1 cm pour 20 lits en abscisse et 1 cm pour 50 postes en ordonnée.

2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.

3. Donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés (les détails des calculs ne sont pas demandés).
Pour les coefficients, on prendra les valeurs décimales arrondies à 10^{-1} près.
Tracer cette droite dans le repère précédent.

4. Une clinique possède 35 lits.

   a. En utilisant les résultats obtenus en 3, combien devrait-elle embaucher de personnel occupant un poste non médical à temps plein ?

   b. En réalité, cette clinique dispose de 60 postes.
   Calculer la différence entre le nombre de postes réels et le nombre de postes théoriques obtenu précédemment.
   Quel pourcentage cette différence représente-t-elle par rapport à la situation théorique ?

EXERCICE 2 **6 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Énoncé

Un grand club de ski français propose à la vente :
• des licences ;
• des cartes neige à prix normal ;
• des cartes neige à prix réduit pour les habitants de la commune.
Pour chacun de ces titres vendus, il faut distinguer deux catégories : la catégorie jeunes et la catégorie adultes.
Le nombre de titres vendus pour la saison 98 se répartit de la manière suivante :
• 8,5 % de licences ;
• 77,5 % de cartes neige à prix réduit ;
• 1,5 % de licences catégorie jeunes ;
• 2,5 % de cartes neige à prix normal catégorie jeunes.
De plus, parmi les personnes ayant acheté une carte neige à prix réduit, 86,5 % sont des adultes.
On note :
L : l'évènement « La personne a acheté une licence » ;

CN : l'évènement « La personne a acheté une carte neige à prix normal » ;
CR : l'évènement « La personne a acheté une carte neige à prix réduit » ;
J : l'évènement « La personne est dans la catégorie jeunes » ;
A : l'évènement « La personne est dans la catégorie adultes ».

Questions

On choisit au hasard un client de la saison 98.

1. Déterminer la probabilité pour que :

   a. cette personne ait acheté une carte neige à prix normal ;

   b. cette personne ait acheté une carte neige à prix réduit catégorie adultes.

2. Montrer que la probabilité pour que la personne ait acheté une carte neige à prix réduit catégorie jeunes est égale à 0,105.

3. Sachant que la personne a acheté une licence, quelle est la probabilité pour qu'elle appartienne à la catégorie adultes ?

4. Quelle est la probabilité pour que cette personne appartienne à la catégorie jeunes ?

5. Sachant que la personne est jeune, quelle est la probabilité pour qu'elle ait acheté une licence ?
   Pour répondre aux questions, on peut utiliser la méthode des arbres. Tous les résultats sont donnés avec un arrondi à 10^{-3} près (ex : 0,105 ou 10,5 %.)

EXERCICE 2 **6 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Énoncé

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on a placé les points :

A(0 ; 0 ; 18) B(0 ; 15 ; 0)
C(22,5 ; 0 ; 0) D(0 ; 0 ; 12,5) (voir Annexes 1 et 2)
E(0 ; 25 ; 0) F(12,5 ; 0 ; 0).

Le plan (ABC) a pour équation : $4x + 6y + 5z = 90$.
Le plan (DFE) a pour équation : $2x + y + 2z = 25$.
La droite (GI) est l'intersection des plans (ABC) et (DFE).
On admet que tout point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartenant au polyèdre ODGBIF a des coordonnées qui satisfont aux conditions :

- $x > 0$
- $y \geqslant 0$
- $z > 0$
- $4x + 6y + 5z \leqslant 90$
- $2x + y + 2z \leqslant 25$

Une usine fabrique 3 types de vannes pour l'industrie pétrolière.
Pour fabriquer le modèle V1, il faut 20 heures d'usinage et 20 heures de montage.
Pour fabriquer le modèle V2, il faut 30 heures d'usinage et 10 heures de montage.
Pour fabriquer le modèle V3, il faut 25 heures d'usinage et 20 heures de montage.
Le nombre d'ouvriers spécialisés permet de disposer de 450 heures d'usinage par semaine.
Le nombre d'ouvriers monteurs permet de disposer de 250 heures de montage par semaine.
On désigne par x le nombre de vannes de type V1 fabriquées dans une semaine, y le nombre de vannes de type V2 et z le nombre de vannes de type V3.

Les points de coordonnées (X ; Y ; Z) qui satisfont aux contraintes précédentes sont situés à l'intérieur du polyèdre ODGBIE.

Le bénéfice réalisé sur une vanne de type V1 est de 2 000 F, sur une vanne de type V2, il est de 3 000 F et enfin sur une vanne de type V3, il est de 5 000 F.
Un point de coordonnées (x ; y ; z) représente une production.

Questions

a. Montrez que les points représentant une production pour laquelle le bénéfice total est de 30 000 F sont situés sur le plan (P) d'équation cartésienne : $2x+3y+5z=30$.
Le plan (P) est tracé sur la figure de l'annexe 2.

b. Montrez qu'une production de 5 vannes de type V1, de 5 vannes de type V2 et d'une vanne de type V3 est réalisable par cette usine en une semaine et que le bénéfice alors réalisé est de 30 000 F.
Quelle conclusion en tirez-vous sur la position du point K de coordonnées (5 ; 5 ; 1) ?

c. Montrez que les points représentant une production pour laquelle le bénéfice total est de 60 000 F sont situés sur le plan (Q) d'équation cartésienne : $2x+3y+5z=60$.

d. Quelle remarque pouvez-vous faire sur les plans (P) et (Q) ?

e. On admet que le bénéfice réalisé par l'entreprise est maximal lorsque le plan (R) d'équation $2x+3y+5z=b$ passe par le point G dont les coordonnées sont $\left(0~;~\dfrac{55}{7}~;~\dfrac{60}{7}\right)$.
Calculer ce bénéfice maximal.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0~;~50]$ par :

$$f(x)=x^2+\frac{50x}{x+1}-50\ln(x+1)-50.$$

La dérivée $f'(x)$ est égale à : $\dfrac{2x(x-4)(x+6)}{(x+1)^2}$.
La courbe $(\mathscr{C})$ de f est donnée en annexe.

1. Étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0~;~50]$.

2. Dresser le tableau de variation de f sur $[0~;~50]$. On admet que $f(x)$ s'annule pour une seule valeur αet de l'intervalle $]0~;~50[$; en déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0~;~50]$.

3. Donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.
Pour la suite du problème, on prendra pour α la plus petite de ces deux valeurs.

Partie B

Une entreprise fabrique une quantité x, exprimée en kilogrammes, d'un certain produit.
Le coût marginal C, exprimé en euros, est défini sur $[0\,;\,50]$ par

$$C(x) = 2x + \frac{50}{x+1}$$

1. La fonction coût total, notée C_T est la primitive de la fonction C sur $[0\,;\,50]$ qui prend la valeur 50 pour $x = 0$.
   Vérifier que $C_T(x) = x^2 + 50\ln(x+1) + 50$.

2. Le coût moyen est la fonction C_m, définie par :

$$C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x} \text{ sur }]0\,;\,50].$$

   a. Donner une expression de $C_m(x)$ en fonction de x.

   b. Vérifier que la dérivée de C_m peut se mettre sous la forme

$$C'_m(x) = \frac{f(x)}{x^2}.$$

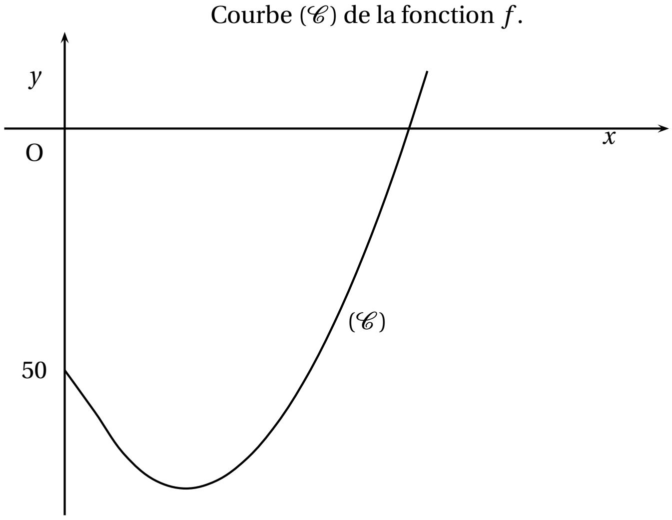
Partie C

1. Déduire des résultats précédents le tableau de variation de la fonction C_m sur $]0\,;\,50]$.

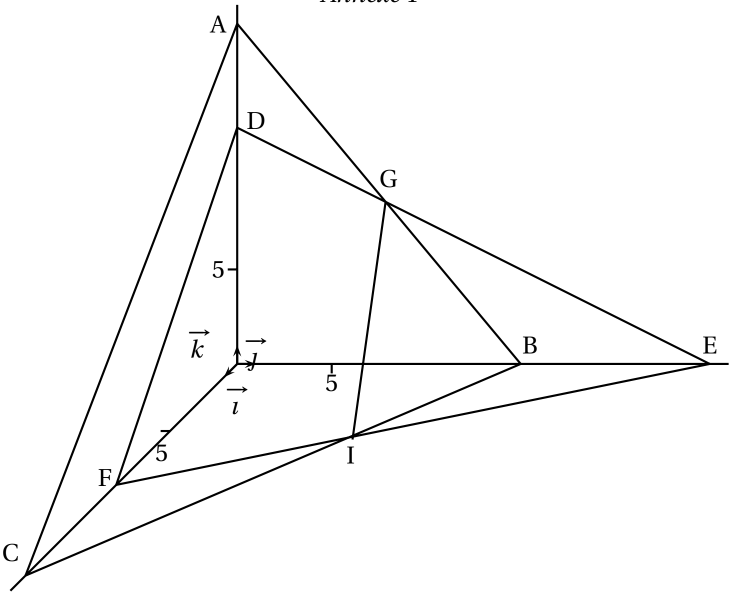
2. Tracer dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la courbe représentative de C_m sur $[1\,;\,50]$.

3. Quelle est la production donnant le coût moyen minimal ?
   Calculer alors le coût total et le coût marginal correspondant au coût moyen minimal.

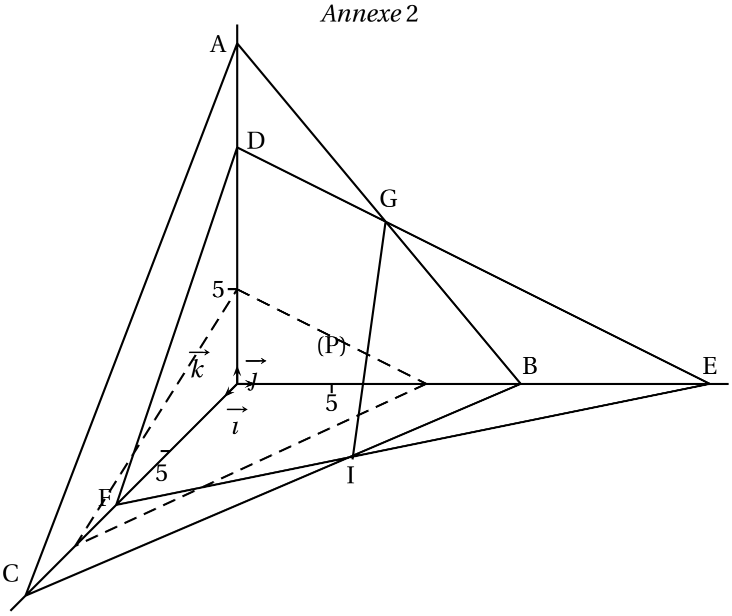
Annexe 3
Courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction f.



Annexe 1



Annexe 2



Baccalauréat ES Centres étrangers juin 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Aucun détail des calculs effectués à la calculatrice n'est exigé dans cet exercice.
Le tableau ci-dessous donne l'évolution du chiffres d'affaires réalisé à l'exportation par une entreprise.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
x_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	100	101	107	122	127	139	136	157	165

x_1 désigne le rang de l'année,
y_i désigne l'indice du chiffre d'affaires à l'exportation rapporté à la base 100 en 1990.

1. **a.** Représenter le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ associé à la série double dans un repère orthogonal. On prendra :
   • pour origine le point $M_0(0\ ;\ 100)$,
   • pour unités : 1,5 cm sur l'axe des abscisses,
   2 cm pour 10 points d'indice sur l'axe des ordonnées.

   b. Calculer les coordonnées du point moyen G associé à cette série statistique et placer ce point sur le graphique. (On donnera la valeur décimale arrondie au dixième de l'ordonnée de G.)

2. Déterminer la valeur décimale arrondie au centième du c ?fficient de corrélation linéaire de la série double. Ce résultat permet-il d'envisager un ajustement affine ? Pourquoi ?

3. Soit $\mathscr{D}$, la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

   a. Donner la valeur décimale arrondie au dixième du c ?fficient directeur de la droite $\mathscr{D}$.

   b. En utilisant les coordonnées du point moyen G, donner une équation de la droite $\mathscr{D}$.
   Tracer cette droite sur le graphique précédent.

4. En supposant que l'évolution du chiffre d'affaires se poursuive de la même façon au cours des années suivantes, estimer l'indice du chiffre d'affaires de cette entreprise en l'an 2001 (on en donnera la valeur arrondie à l'unité).

EXERCICE 2 **5 points**
(obligatoire)

Une étude statistique indique que 95 % des téléviseurs fabriqués par une entreprise sont en état de fonctionnement. On fait subir à chaque appareil un test de contrôle.
On constate que :
• quand un appareil est en état de fonctionnement, il est accepté dans 96 % des cas

à l'issue du test ;
• quand un appareil n'est pas en état de fonctionnement, il est néanmoins accepté dans 8 % des cas à l'issue du test.
On choisit au hasard un téléviseur fabriqué par l'entreprise.
On définit les évènements suivants :
F : « le téléviseur est en état de fonctionnement » ;
T : « le téléviseur est accepté à l'issue du test » ;
T : « le téléviseur est refusé à l'issue du test ».
Ainsi :
• la probabilité de l'évènement F, notée P(F) est 0,95 ;
• la probabilité P(T/F) qu'un téléviseur soit accepté à l'issue du test sachant qu'il est en état de fonctionnement est 0,96.

1. Calculer la probabilité que le téléviseur ne soit pas en état de fonctionnement.

2. a. Calculer la probabilité qu'un téléviseur soit refusé à l'issue du test sachant qu'il est en état de fonctionnement.

   b. Calculer la probabilité que le téléviseur soit refusé à l'issue du test et qu'il soit en état de fonctionnement.

   c. Calculer la probabilité que le téléviseur soit refusé à l'issue du test et qu'il ne soit pas en état de fonctionnement.

3. En déduire la probabilité pour que le téléviseur soit refusé à l'issue du test.

4. Quelle est la probabilité pour qu'un téléviseur soit en état de fonctionnement sachant qu'il est refusé à l'issue du test ? (On donnera la valeur décimale arrondie au millième du résultat.)

EXERCICE 2 — 5 points
(spécialité)

Le salaire annuel d'un technicien s'élevait pour l'année 1998 à 90 000 F.
Chaque année son employeur décide de l'augmenter de 2 % et de lui allouer en plus 5 000 F.
On désigne par S_0 le salaire du technicien pour l'année 1998. Pour tout entier naturel n, on désigne par S_n son salaire pour l'année $(1998+n)$.
Par exemple : S_2 est le salaire du technicien pour l'année 2000.

1. Calculer S_1 et S_2.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.

3. On définit la suite (U_n) par $U_n = S_n + 250\,000$ pour tout entier naturel.

   a. Calculer U_0.

   b. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 1,02.

c. Exprimer U_n en fonction de n.

4. **a.** Exprimer S_n en fonction de n.

b. En déduire le salaire prévu pour l'année 2005.

5. À partir de quelle année le salaire de ce technicien aura-t-il doublé ?

PROBLÈME **11 points**

L'objet de ce problème est l'étude d'une fonction et le tracé de sa représentation graphique (**partie B**) s'appuyant sur l'étude d'une fonction auxiliaire (**partie A**).
On calculera enfin une aire (**partie C**). On prendra soin de faire figurer sur la copie les calculs intermédiaires conduisant aux résultats.

Partie A

1. Soient a, b et c des nombres réels. On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax+b)\text{e}^{-x}+c$. On note g' la fonction dérivée de g.

a. Calculer $g'(x)$.

b. Le tableau de variation de g est le suivant :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$				$+$			0	-	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$e^{-2}+2$	$\searrow$	2

En utilisant les données numériques de ce tablcau, établir que $a = 1$, $b = -1$ et $c = 2$.
Ainsi, pour la suite du problème : $g(x) = (x-1)\text{e}^{-x}+2$.

2. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-1~;~0]$. On note α cette solution.

b. Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur décimale arrondie au dixième de α.

3. Étudier le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x+1-x\text{e}^{-x}.$$

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$).

   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on pourra mettre x en facteur dans l'expression de $f(x)$).

2. **a.** Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que $f'(x) = g(x)$.

   b. Dresser, en le justifiant, le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on appelle $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f et $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $y = 2x + 1$.

   a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (2x + 1)]$.

   b. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

   c. Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$.

   d. Tracer $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$ dans le plan muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

Partie C

Soient H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\mathrm{e}^{-x}(1 + x)$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que la fonction H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.

2. Hachurer sur le graphique précédent le domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite $(\mathscr{D})$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

3. Calculer l'aire S en cm^2 du domaine hachuré.

Baccalauréat ES France juin 1999

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne l'indice mensuel des dépenses d'assurance maladie d'août 94 à juin 95 (tendances observées à fin juillet 1995 - base 100 janvier 1990).

Mois	Août 94	Octobre 94	Décembre 94	Février 95	Avril 95	juin 95
Rang du mois x_i	1	3	5	7	9	11
Indice y_i	123,4	125,9	127,5	127,9	129	131,4

(Source : Département statistique de la Caisse Nationale de l'Assurance Maladie des Travailleurs Salariés).

Pour tout l'exercice, les détails des calculs statistiques ne sont pas demandés. Les résultats seront arrondis avec deux chiffres après la virgule.
On a représenté sur le document 1 de l'annexe ci-jointe le nuage de points $M_i\,(x_i\ ;\ y_i)$ associé à la série statistique dans un repère orthogonal. G désigne le point moyen du nuage. On veut réaliser un ajustement affine de ce nuage de points.

1. Déterminer les coordonnées du point G et placer ce point sur le graphique.

2. *Le modèle étudié dans cette question sera appelé « droite de Mayer ».*

a. G_1 désigne le point moyen des trois premiers points du nuage et G_2 celui des trois derniers points. Déterminer les coordonnées de G_1 et de G_2.

b. Déterminer l'équation réduite de la droite (G_1G_2) sous la forme $y = \mathrm{A}x + \mathrm{B}$.

c. Tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique précédent.

d. En utilisant la calculatrice, déterminer la somme des résidus pour cet ajustement affine :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{6} (y_i - \mathrm{A}x_i - \mathrm{B})^2.$$

3. *Le deuxième modèle proposé est celui des moindres carrés.*
La calculatrice donne :
• l'équation de la droite (D) d'ajustement de y en x :

$$y = 0,71x + 123,26.$$

• la somme des résidus pour cet ajustement $S_2 = 1,7$ (arrondie avec un chiffre après la virgule).

a. Des droites (D) et (G_1G_2) quelle est celle qui réalise le meilleur ajustement affine ? Justifier.

b. Tracer (D) sur le graphique précédent.

4. **a.** Quels sont les indices mensuels que l'on pouvait prévoir en utilisant l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés (question 3) pour les mois cités dans le tableau ci-dessous ?

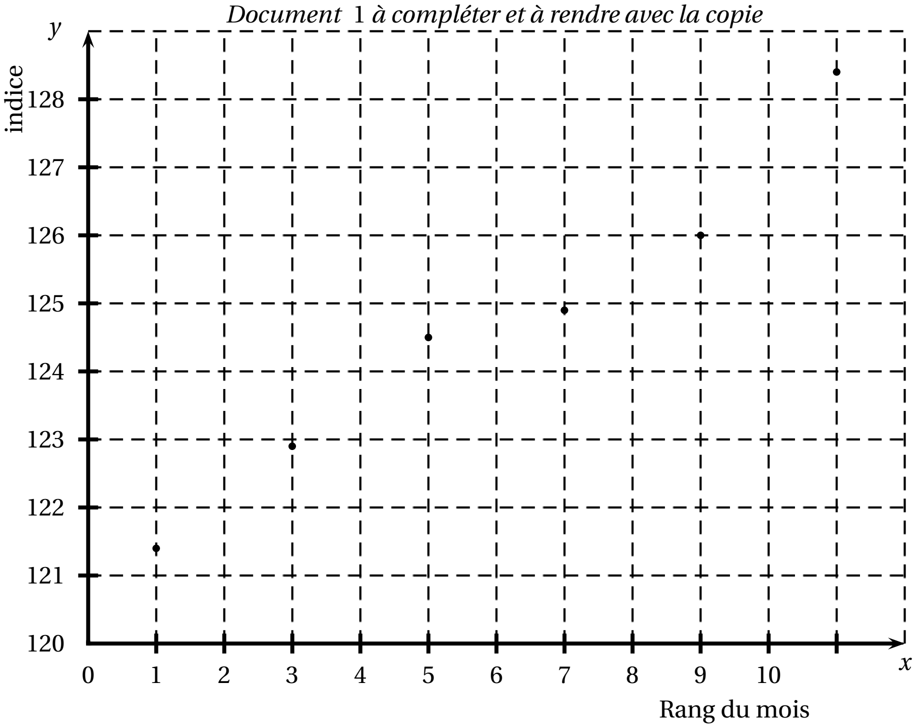
b. Recopier le tableau ci-dessous et le compléter.

Mois	nov. 95	déc. 95	janvier 96
Indices prévisionnels calculés par l'ajustement affine des *moindres carrés*			
Tendances réellement observées	134,3	133,4	133,5

c. Quel commentaire peut-on faire ?

Annexe

Document 1 *à compléter et à rendre avec la copie*



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

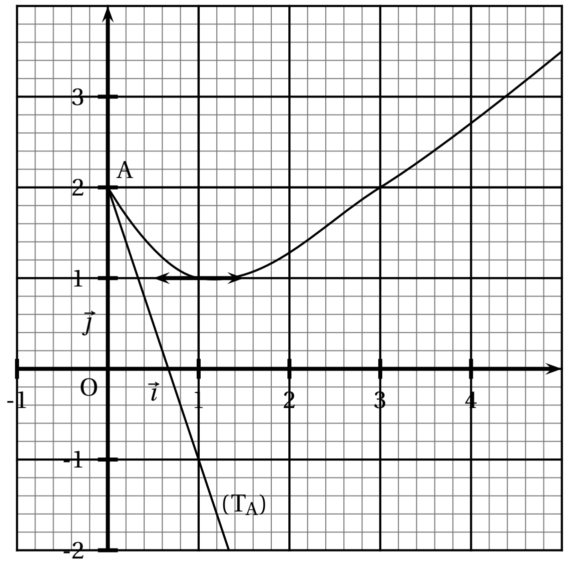
La courbe ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$.

On note f' la fonction dérivée de f.

La droite (T_A) est la tangente au point A d'abscisse 0.

La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1.

Enfin, la fonction f est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$ et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$.



1. À partir des informations portées sur le graphique et complétées par les précisions précédentes, répondre aux questions suivantes :

   a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

x	0	1
$f(x)$		
$f'(x)$		

   b. Donner le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$, complété par la limite en $+\infty$.

2. On considère la fonction g inverse de la fonction c'est-à-dire $g = \dfrac{1}{f}$.
   On note g', la fonction dérivée de g.

   a. Déterminer $g(0)$, $g(1)$, $g(3)$.

   b. Quel est le sens de variation de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$?
   Justifier la réponse donnée.

   c. Déterminer les valeurs $g'(0)$, $g'(1)$.

   d. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

3. On souhaite traduire graphiquement les informations obtenues pour la fonction g. Tracer une courbe qui satisfait aux résultats obtenus à la question 2, dans un repère orthonormal (unité 2 cm) sur une feuille de papier millimétré ; le tracé des tangentes aux points d'abscisses 0 et 1 devra apparaître sur la figure.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ représenté sur le document 2 de l'annexe ci-jointe. Le plan (R) est représenté par ses traces sur les plans de coordonnées ; il a pour équation : $x + z = 2$.

1. On donne les points A, B, C définis par leurs coordonnées respectives : A(6 ; 0 ; 0), B(0 ; 3 ; 0) et C(0 ; 0 ; 6).

a. Placer les points A, B, C dans le repère $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ et tracer le triangle ABC.

b. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (1 ; 2 ; 1).
Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (P) passant par A, B et C.

d. Vérifier que le plan (P) a pour équation $x + 2y + z = 6$.

2. On a placé dans le repère les points G, E et F à coordonnées entières. Le point G est situé sur l'axe $(0\,;\ \vec{\jmath})$ le point E dans le plan $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ et le point F dans le plan $\left(O\,;\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
Le plan (Q) passant par les points G, E et F est parallèle auplan $(0\,;\ \vec{\jmath},\ \vec{k}$.

a. Donner l'équation du plan (Q).

b. Donner les coordonnées des points G, E et F.

c. Parmi les points E, F et G, quels sont ceux situés dans le plan (P) ?

d. Quelle est la nature de l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x\,;\ y\,;\ z)$ vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 2 \\ x+2y+z & = & 6. \end{array}\right.$$

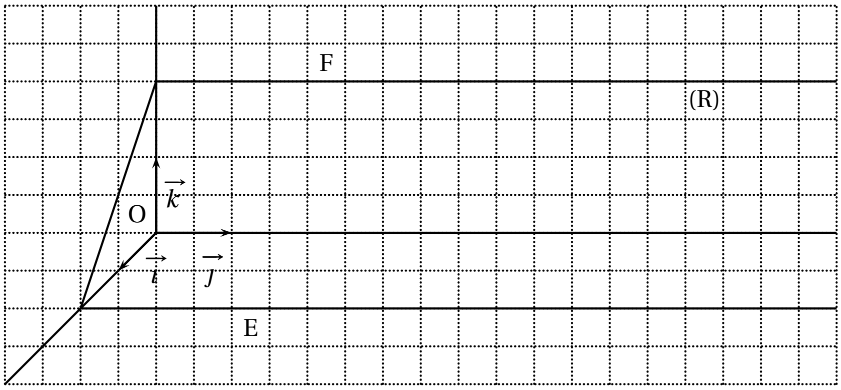
e. Représenter cet ensemble sur l'annexe 2 ci-jointe.

3. On considère le système S de trois équations à trois inconnues x, y, z :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x+ & & z & = & 2 \\ & y & & = & 2 \\ x & +2y & +z & = & 6. \end{array}\right.$$

Quel est l'ensemble des points du plan R dont les coordonnées sont les solutions du système S ?

Document 2 à compléter et à rendre avec la copie



PROBLÈME **9 points**

On a tracé dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]\,0\,;\,4\,]$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} - \ln x.$$

Dans tout le problème, on donnera les résultats arrondis à 10^{-3}.

⋆ **A. - Étude théorique liée à la fonction f**

1. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,4]$.

b. Étudier la limite de f en 0.

c. Donner le tableau de variation de f.

2. Soit (Z) la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations : $y = \frac{1}{2}$, $x = 1$ et $x = 3$.

a. Justifier que l'on a $f(x) \geqslant \frac{1}{2}$ sur $]\,0\,;\,4\,]$ et exprimer à l'aide d'une intégrale (que l'on n'essaiera pas de calculer dans cette question) l'aire $\mathscr{A}_Z$, en unités d'aire, de la partie (Z) du plan.

b. Soit g la fonction définie sur $]\,0\,;\,4\,]$ par $g(x) = x\ln x - x$.
Calculer $g'(x)$.

c. En déduire la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}_Z$, en unités d'aire.

⋆ **B. - Probabilité et jeu**

Au cours de l'élaboration d'une phase d'un jeu vidéo inspiré du golf, on cherche à évaluer la probabilité de gagner. L'écran est le carré AOFB. Les sommets du carré ont pour coordonnées :

$$A(0\,;4) \quad O(0\,;0) \quad F(4\,;0) \quad B(4\,;4).$$

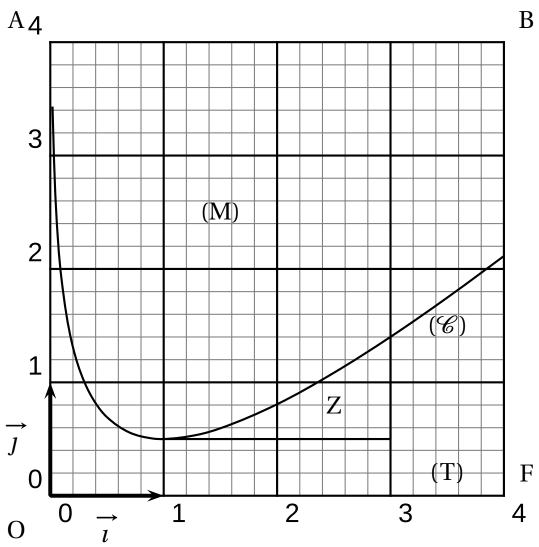
La courbe $(\mathscr{C})$ partage l'écran en deux parties :
- la partie de l'écran située strictement au-dessus de la courbe représente une mare et elle est notée (M) ; - la partie de l'écran située au-dessous de la courbe représente le terrain de jeu et elle est notée (T). La partie (Z) définie au paragraphe **A** est donc incluse dans (T).

1. Dans cette question, le jeu consiste à simuler le lancer d'une balle. On admet que la probabilité d'atteindre une partie de l'écran est donnée par :

$$\frac{\text{Aire de la partie de l'écran considérée}}{\text{Aire du carré AOFB}}$$

Cette probabilité est indépendante de l'unité graphique choisie. Déterminer, par le calcul, la probabilité que la balle atteigne la zone (Z).

2. Dans cette question, le jeu consiste à simuler trois lancers successifs et indépendants ; on admet que, pour chaque lancer, la probabilité d'atteindre (Z) est de 0,044. On gagne lorsque deux au moins des trois balles lancées ont atteint la partie (Z). Calculer la probabilité de gagner.
On pourra s'aider d'un arbre et on fera figurer le détail des calculs sur la copie.



Baccalauréat ES La Réunion juin 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Une entreprise est équipée d'ordinateurs de trois modèles différents.
30 % sont de marque (M_1), 50 % sont de marque (M_2) et 20 % de marque (M_3).
On choisit un appareil au hasard. Tous les choix sont équiprobables. Pour i égal à 1, 2 ou 3, on appelle M_i l'évènement : « l'appareil choisi est de marque (M_i) ».
On note $p(M_i)$ la probabilité de l'évènement M_i.
on a donc $p(M_1) = 0,3$; $p(M_2) = 0,5$ et $p(M_3) = 0,2$.
On note T l'évènement : « l'appareil choisi tombe en panne » et $p(T)$ la probabilité de cet évènement.
On suppose que si un appareil tombe en panne, il est réparé et qu'il fonctionne alors correctement.
La probabilité $p_1(T)$ qu'un appareil de marque (M_1) tombe en panne est $\dfrac{1}{30}$.
La probabilité $p_2(T)$ qu'un appareil de marque (M_2) tombe en panne est $\dfrac{1}{20}$.
La probabilité $p_3(T)$ qu'un appareil de marque (M_3) tombe en panne est $\dfrac{1}{40}$.

1. **a.** Traduire toutes les données sur un arbre pondéré.

   b. Calculer la probabilité que l'appareil choisi soit de marque (M_2) et qu'il tombe en panne.

   c. Vérifier que la probabilité qu'un ordinateur tombe en panne est égale à 0,04.

   d. Quelle est la probabilité que l'appareil soit de marque (M_2) sachant qu'il est tombé en panne ?

2. *Dans cette question, on donnera le résultat à* 0,1 *près.*
   Un service de l'entreprise possède quatre ordinateurs.
   On suppose que les pannes éventuelles de ces ordinateurs sont indépendantes deux à deux.
   Quelle est la probabilité qu'aucun des quatre ordinateurs ne tombe en panne ?

EXERCICE 2 **5 points**
(obligatoire)

Dans cet exercice aucun détail des calculs statistiques effectués à la calculatrice n'est demandé.
Lors d'une période de sécheresse, un agriculteur relève la quantité totale (en m^3) utilisée par son exploitation depuis le premier jour et donne le résultat suivant :

Nombre de jours écoulés : x_i	1	3	5	8	10
Volume utilisé (en m^3) : y_i	2,25	4,3	8	17,5	27

Le plan est muni d'un repère orthogonal. On prendra pour unité graphique sur l'axe des abscisses 1 cm pour un jour et sur l'axe des ordonnées 0,5 cm pour un mètre-cube.

1. Représenter alors la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$.

2. **a.** Donner le c ?fficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ y_i)$ en arrondissant le résultat lu sur la calculatrice à 10^{-3} près.

   b. Donner l'équation de Δ droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés sous la forme $y = \alpha x + \beta$ où α et β sont les arrondis à 10^{-2} près des valeurs lues sur la calculatrice.

   c. Représenter la droite Δ sur le graphique.

3. Le nuage de points permet d'envisager un ajustement par la parabole $\mathscr{P}$ qui passe par les points A(1 ; 2,25) ; B(10 ; 27) et qui a pour équation $y = ax^2 + b$ où a et b sont deux nombres réels.

   a. Déterminer a et b et donner l'équation de la parabole $\mathscr{P}$.

   b. Représenter la parabole $\mathscr{P}$ sur le graphique.

4. Dans cette question on compare les deux ajustements à l'aide du tableau suivant :

x_i	1	3	5	8	10	
y_i	2,25	4,3	8	17,5	27	
$\lvert y_i - \alpha x_i^2 + \beta \rvert$	2,54	0,91	2,71			Total T_1 :
$\lvert y_i - a x_i^2 + b \rvert$	0	0,05	0,25			Total T_2 :

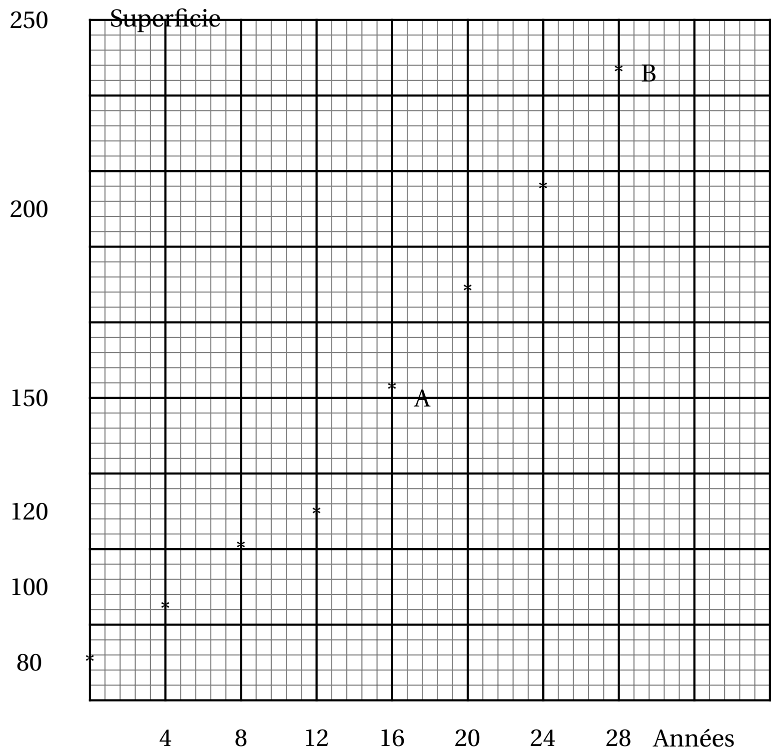
On ne demande pas de recopier ce tableau.
Les deux totaux calculés évaluent pour chaque ajustement la somme des écarts entre les ordonnées des points du nuage et les ordonnées des points de même abscisse de l'ajustement.
Donner les arrondis à 10^{-1} près des deux totaux T_1 et T_2 calculés ci-dessus. (Aucun détail n'est demandé.)
En déduire l'ajustement qui parait le mieux adapté.

EXERCICE 2 — 5 points
(spécialité)

Dans cet exercice aucun détail des calculs effectués à la calculatrice n'est demandé. Dans une région de 1000 km^2, la superficie des terrains urbanisés entre 1970 et 1998 est donnée par le tableau suivant :

Années	1970	1974	1978	1982	1986	1990	1994	1998
Rang : x_i	0	4	8	12	16	20	24	28
Superficie (en km^2) : y_i	80	94	110	129	152	178	205	236
Y_i	4,38	4,54	4,70	4,86	5,02	5,18	5,32	5,46

Le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ est représenté ci-dessous.



Les estimations de superficie demandées dans l'exercice seront données en km^2 *et arrondies à l'unité.*

1. **a.** Donner l'arrondi r à 10^{-2} près du coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ y_i)$.

b. Donner l'estimation E_1 obtenue par la méthode des moindres carrés de la superficie des terrains urbanisés en 2010.

2. Au vu de la forme du nuage, on effectue un autre ajustement.
On calcule $\ln y_i$. On appelle Y_i l'arrondi à 10^{-2} près de $\ln y_i$. Les valeurs Y_i sont données dans le tableau considéré.

a. Donner l'arrondi r' à 10^{-4} près du coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ Y_i)$.

b. On prendra $Y = 0,039x + 4,39$ pour équation de la droite de régression de Y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
Calculer la valeur y estimée pour l'année 2010.
En déduire une estimation E_2 de la superficie des terrains urbanisés en 2010.

3. On fait un troisième ajustement du nuage de points en utilisant la droite $\mathscr{D}$ passant par les points A(16 ; 152) et B(28 ; 236).

a. Donner une équation de la droite $\mathscr{D}$.

b. En déduire l'estimation E_3 faite avec cet ajustement, de la superficie des terrains urbanisés en 2010.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 + (-x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Calculer $g'(x)$ ou g' désigne la fonction dérivée de g et étudier son signe selon les valeurs de x.

2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$. Préciser $g(3)$.
   On ne demande pas les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + (x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal. On prendra 2 cm pour une unité graphique.

1. Démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = g(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.

2. Calculer la limite de f en $-\infty$.

3. **a.** Vérifier que $f(x) = x + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$. On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

   b. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   c. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.
   On précisera les coordonnées de leur point d'intersection A.

4. Donner le tableau de variations de la fonction f.

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que la droite Δ.

Partie C

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = x + (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$$

   soit une primitive de f.

2. Calculer en cm^2 l'aire du domaine du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
   En donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

Baccalauréat ES Liban juin 1999

EXERCICE 1

Commun à tous les candidats

Tous les jours, Obélix part en promenade en quête soit de casques romains pour sa collection, soit de sangliers qu'il ne trouve que dans la forêt. Il ne rentre au village que lorsqu'il a atteint l'un ou l'autre de ses objectifs.
Durant sa promenade, soit il rencontre des Romains à la sortie du village avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$, soit il entre dans la forêt. Une fois dans la forêt, la probabilité de rencontrer des Romains est égaie à $\frac{1}{5}$, celle de rencontrer des sangliers est égale à $\frac{4}{5}$.
Pour faciliter la résolution de cet exercice, on pourra représenter les données précédentes sur un arbre.

1. **a.** Calculer la probabilité qu'Obélix « récolte » des casques dans la forêt.

   b. Calculer la probabilité qu'Obélix « récolte » des sangliers.

2. Le druide Panoramix voit Obélix entrer dans le village les bras chargés de casques romains. Quelle est la probabilité qu'Obéiix ait atteint la forêt ?

3. Panoramix observe le manège d'Obélix pendant 3 jours.
   Quelle est la probabilité qu'Obélix revienne de ses promenades au moins une fois avec des sangliers ? (On donnera une valeur décimale approchée par défaut à 10^{-3} près de cette probabilité.)

EXERCICE 2

Jean et Pierre sont deux jumeaux : Jean, qui est fumeur, dépense 3 000 F par an pour l'achat de ses cigarettes. Pierre, qui ne fume pas, lui demande d'imaginer les économies qu'il réaliserait s'il plaçait cette somme plutôt que de continuer à fumer.
Il lui propose de déposer tous les ans, le 2 janvier, cette somme de 3 000 F sur un compte rémunéré à intérêts composés par la banque, au taux annuel de 3 %. La banque ajoute chaque année, le 31 décembre, les intérêts acquis sur le compte.
Le 2 janvier 1999, il verse 3 000 F et les intérêts acquis sont capitalisés le 31 décembre 1999. Tous les ans, le 2 janvier, il verse à nouveau 3 000 F.

1. Quelle est la somme disponible sur le livret aux dates suivantes :

   a. Le 3 janvier 2000 ?

   b. Le 3 janvier 2001 ?

2. On note u_0 la somme disponible sur le livret le 3 janvier 1999, u_1 la somme disponible sur le livret le 3 janvier 2000, u_2 la somme disponible sur le livret le 3 janvier 2001, u_n la somme disponible sur le livret le 3 janvier de l'année $1999+n$, où n désigne un entier naturel.
   Montrer qu'on a la relation $u_{n+1} = 1,03u_n + 3000$.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 100000$.

   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.

4. Pierre affirme qu'en moyenne, un fumeur s'arrête après avoir fumé pendant trente ans. De quelle somme Jean aurait-il pu disposer le 3 janvier 2029 ?

PROBLÈME

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie pour tout réel x, par

$$f(x) = x\left(\mathrm{e}^{-x} + 1\right).$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentant f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du plan. (Unité graphique : 2 cm.)

Partie A

Soit la fonction g définie, pout lout réel x, par

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}(1 - x) + 1.$$

1. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations (on ne demande pas de limites).
2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x réel.

Partie B

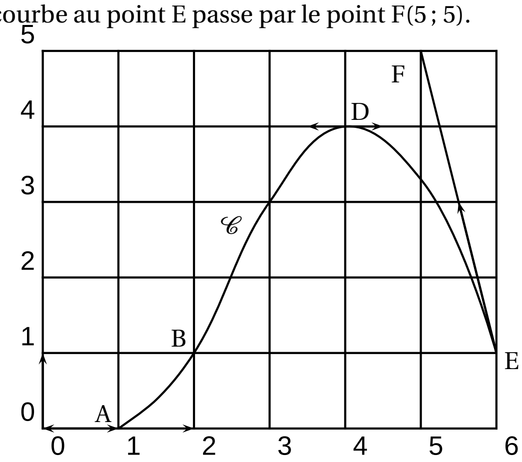
1. On rappelle que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$. Déterminer, en les justitiant, les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $y = x$. Démontrer que $(\mathscr{D})$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
   Étudier les positions de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$.
3. Si f' désigne la fonction dérivée de f, calculer $f'(x)$. À l'aide de la question A 2., déterminer les variations de f puis dresser son tableau de variations.
4. Déterminer une équation de la tangente (T_0) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
5. Déterminer par le calcul les coordonnées du point de $(\mathscr{C})$ où la tangente (T_1) est parallèle à l'asymptote $(\mathscr{D})$.
6. Tracer $(\mathscr{D})$, (T_0), (T_1) et $(\mathscr{C})$.

Baccalauréat ES Polynésie juin 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,6]$. Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthogonal est donnée ci-contre.
La courbe $(\mathscr{C})$ passe par les points A$(1\,;\,0)$, B$(2\,;\,1)$, D$(4\,;\,4)$ et E$(6\,;\,1)$. Les tangentes à la courbe aux points A et D sont parallèles à l'axe des abscisses.
La tangente à la courbe au point E passe par le point F$(5\,;\,5)$.



Partie I

Par lecture graphique, résoudre l'équation $f(x) = 0$ et donner le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[\,1\,;\,6]$.

Partie II

On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]\,1\,;\,6\,]$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** Calculer $g(2)$, $g(4)$ et $g(6)$.

   b. Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers 1.
   Que peut-on en déduire pour la courbe (Γ) ?

   c. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $]\,1\,;\,6\,]$ en donnant les justifications nécessaires.

   d. Déterminer $f'(4)$; en déduire $g'(4)$.

2. Tracer la courbe (Γ) ainsi que son asymptote et la tangente au point d'abscisse 4.

EXERCICE 2 **4 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le tableau suivant donne pour les années indiquées, le nombre de demandes d'emploi en fin d'année dans une région.

	1996	1997
Total	85 079	85 240
Moins de 25 ans	22 238	20 276
De 25 ans à 39 ans	54 719	55 994
50 ans et plus	8 122	8 970
Hommes	39 998	39 766
Moins de 25 ans	10 176	9 170
De 25 ans à 39 ans	25 528	25 853
50 ans et plus	4 284	4 743
Femmes	45 091	45 474
Moins de 25 ans	12 062	11 106
De 25 ans à 39 ans	29 191	30 141
50 ans et plus	3 838	4 227

Source : ANPE-INSEE Poitou-Charentes.

Les résultats des calculs seront donnés sous forme approchée à 10^{-2} *près par défaut.*

1. **a.** Déterminer le pourcentage d'évolution du total des demandes d'emploi entre 1996 et 1997.

   b. Le nombre de demandes d'emploi est en baisse pour une tranche d'âge seulement.
   Calculer le pourcentage d'évolution des demandes d'emploi des hommes pour cette tranche d'âge.
2. En 1996, une entreprise est subventionnée pour employer une personne de moins de 25 ans. Elle choisit une personne au hasard parmi les demandeurs d'emploi concernés. Tous les choix sont équiprobables.
   Quelle est la probabilité que la personne embauchée soit une femme ?

3. L'entreprise désire créer un emploi en 1998 et choisit au hasard une personne dans les demandeurs d'emploi de 1997. Tous les choix sont équiprobables.
   Calculer la probabilité p que la personne embauchée soit un homme.
   Vérifier que 0,46 est une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de p.

4. Dans cette question, on prendra p égal à 0,46. L'entreprise choisit trois demandeurs d'emploi de 1997. Les choix sont indépendants et on assimilera ce choix à un tirage avec remise.

   a. Quelle est la probabilité qu'elle choisisse trois hommes ?

   b. Quelle est la probabilité qu'elle choisisse un homme et un seul
   On pourra utiliser un arbre pondéré.

EXERCICE 2 — **4 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour financer ses études, une étudiante fait du démarchage par téléphone pour vendre un produit qui lui rapporte 20 francs. Elle ne peut vendre qu'un produit par appel.
Lorsqu'elle compose un numéro de téléphone, trois possibilités se présentent :
• l'évènement A « Personne ne répond » de probabilité $p(\text{A})$ égale à 0,3 ;
• l'évènement B « Le répondeur téléphonique diffuse un message » avec une probabilité $p(\text{B})$ égale à 0,1 ;
• l'évènement C « Un correspondant répond » de probabilité $p(\text{C})$ égale à 0,6.

1. La probabilité que l'étudiante vende son produit sachant qu'un correspondant répond à son appel est égale à 0,4.
Les probabilités qu'elle vende son produit dans les autres cas sont nulles. Vérifier que la probabilité que l'étudiante réalise une vente lors d'un appel téléphonique fait au hasard est égale à 0,24.

2. Lorsque personne ne répond à son appel téléphonique, l'étudiante débourse 0 franc.
Lorsqu'un répondeur téléphonique diffuse un message, l'étudiante débourse 1 franc.
Lorsqu'un correspondant répond, l'appel coûte 1 franc et dans ce cas
▷ si l'étudiante vend son produit, qui lui rapporte 20 francs, elle aura donc fait un gain de +19 francs,
▷ si elle ne vend pas son produit, elle aura perdu 1 franc.
On considère la variable aléatoire X correspondant au gain algébrique possible lors d'un appel téléphonique de l'étudiante.

a. Démontrer que la probabilité que le gain algébrique soit égal à -1 est 0,46.

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

3. On suppose que l'étudiante compose successivement de manière indépendante cinq numéros de téléphone au hasard. Déterminer la probabilité qu'elle réalise exactement trois ventes.

PROBLÈME **12 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On prendra pour unité graphique 2 cm.
On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (-\ x+4)\mathrm{e}^{x-1} \text{ et } g(x) = \ln\left(\frac{x+6}{2x+2}\right).$$

Dans le repère choisi, on appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f et (Γ) la courbe représentative de g.

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2. Vérifier que la fonction dérivée de f est définie pour tout x positif par $f'(x) = (-x+3)\mathrm{e}^{x-1}$.

3. Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation. On précisera $f(0)$, $f'(0)$, $f(3)$, $f'(3)$.

4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

5. Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{x-1}$ soit une primitive de la fonction f.

Partie B

On considère la fonction u définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$u(x) = \frac{x+6}{2x+2}.$$

1. Vérifier que, pour tout x positif, $u(x)$ est strictement positif.

2. **a.** Déterminer la limite de $u(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

   b. Étudier le sens de variation de u.
   Dresser le tableau de variations de u et retrouver le résultat de la question **1.** de la partie **B**.

3. En utilisant les résultats précédents, déterminer le sens de variation de la fonction g et démontrer que la courbe (Γ) admet une asymptote (D) au voisinage de $+\infty$ dont on donnera une équation.

4. Tracer la courbe (Γ) et la droite (D) sur le même graphique que celui de la partie **A**.

5. Soit G la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$G(x) = (x+6)\ln(x+6) - (x+1)\ln(2x+2).$$

   Démontrer que G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Partie C

1. Résoudre, à l'aide des représentations graphiques faites, l'inéquation $g(x) \leqslant f(x)$.

2. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2 du domaine du plan constitué des points $M(x\,;\,y)$ tels que :

$$2 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } g(x) \leqslant y \leqslant f(x).$$

   Donner l'arrondi de $\mathscr{A}$ à l'unité près.