Baccalauréat ES 2002

L'intégrale de septembre 2001 à juin 2002

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat ES Antilles – Guyane septembre 2001

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne le pourcentage de conscrits (jeunes gens ayant 18 ans dans l'année) qui sont en surpoids ou obèses.

Année	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pourcentage y_i	11,5	11,7	12,5	13,5	13,3	14,5	15,8	15,5	15,6	16,5

(Enquête du laboratoire espace, santé et territoire, université de Paris X – Nanterre)

Les résultats des calculs seront arrondis à 10^{-2} près.
Les coordonnées des points seront arrondies à 10^{-1} près.

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ associé à la série statistique dans un repère orthonormé. L'origine du repère correspond au point de coordonnées $(0\,;\,10)$.

G désigne le point moyen de ce nuage. Calculer ses coordonnées (x_0 et y_0).

Placer ce point sur le graphique.

2. **a.** Trouver une équation de la droite (D) obtenue par la méthode des moindres carrés.

b. Tracer cette droite (D) sur le graphique précédent et vérifier que le point G appartient à cette droite.

3. **a.** Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre $\rho = \dfrac{\text{cov}(x\ ;\ y)}{\sigma_x \sigma_y}$.

b. Calculer la somme S des carrés des résidus correspondant à cet ajustement.

c. Vérifier que $\dfrac{\text{S}}{\sum \left(y_i - y_0\right)^2} = 1 - \rho$.

4. En utilisant les résultats précédents donner une estimation du pourcentage de jeunes gens en surpoids ou obèses ayant 18 ans en 2001.

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

Le système éducatif français est composé du 1^er^ degré (écoles maternelles et primaires) et du 2^e^ degré (collèges et lycées).

Le personnel assurant le fonctionnement est composé de personnel enseignant et de personnel non enseignant (administration, service...).

À la rentrée 1999, on a les informations suivantes :

• 64 % du personnel est enseignant

• 40 % du personnel est dans le 1^er^ degré

• 39 % du personnel enseignant est dans le 1^er^ degré.

On utilisera les notations suivantes pour désigner les évènements :

E : « être enseignant »

$\overline{\text{E}}$: « ne pas être enseignant »

D1 : « être dans le 1^er^ degré »

D2 : « être dans le 2^{e} degré »
On choisit au hasard une personne ; après justification, les résultats des calculs seront donnés sous forme décimale à 10^{-2} près.

1. Quelle est la probabilité pour un enseignant d'être dans le 1er degré ?
2. Quelle est la probabilité pour un enseignant d'être dans le 2^{e} degré ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne du système éducatif d'être enseignant du 1er degré ?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être enseignante, sachant qu'elle est employée dans le 1er degré ?
5. Quelle est la probabilité pour une personne de ne pas être enseignante, sachant qu'elle est employée dans le 2^{e} degré ?

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

Un couple dépose au premier janvier de l'an 2000, une somme de 5 000 euros sur un compte rémunéré au taux annuel de 6 %.
Par la suite, ce couple possède une capacité d'épargne annuelle de 3 000 euros, épargne versée tous les 1er janvier sur le compte précédent.
Les intérêts sont capitalisés au 31 décembre de chaque année.
On note S_n la somme dont le couple dispose au 1er janvier de l'année $(2000+n)$.

1. Calculer les valeurs de $S_0,\ S_1,\ S_2$.
2. Montrer que l'expression de S_{n+1}, en fonction de S_n est donnée par la relation :

$$S_{n+1} = (1,06)S_n + 3000.$$

3. On pose $T_n = S_n + 50000$.
   a. Montrer que (T_n) est une suite géométrique de raison 1,06.
   b. Exprimer T_n puis S_n en fonction de n.
   c. Au 1er janvier de quelle année le couple possédera-t-il une épargne supérieure à 50 000 euros ?

PROBLÈME **10 points**
Une entreprise fabrique un produit en quantité x.
Le coût total de ce produit est donné par

$$C_{\text{T}}(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{9}{2}\ln(x+1) \quad \text{pour} \quad x \in [0\,;\,5].$$

Les coûts sont exprimés en millions d'euros et x est exprimée en milliers de tonnes.

Partie I - Étude d'une fonction auxiliaire f

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,5]$ par

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{9x}{x+1} - 9\ln(x+1).$$

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que l'on peut écrire

$$f'(x) = \frac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}.$$

Les détails du calcul de f' devront figurer sur la copie.

2. Établir le tableau de variations de f sur $[0\,;\,5]$.

3. En déduire que f s'annule sur $[0\,;\,5]$ pour une valeur unique α.

4. Déterminer un encadrement à 10^{-3} près de α. (On précisera la méthode utilisée.)

5. Déduire des résultats précédents le signe de f sur $[0\,;\,5]$.

Partie II – Étude du coût moyen

La fonction coût moyen C_m est définie sur $[0\,;\,5]$ par :

$$C_m(x) = \frac{C_{\mathrm{T}}(x)}{x} = \frac{x}{4} + \frac{9}{2} \times \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

1. Calculer $C'_m(x)$ et vérifier que l'on peut écrire $C'_m(x) = \dfrac{f(x)}{2x^2}$ où f est la fonction auxiliaire de la question **1** de la partie **I**.
Les détails du calcul de C'_m devront figurer sur la copie.

2. Étudier le sens de variation de C_m sur $[0\,;\,5]$.

3. Pour quelle production, exprimée en tonnes, à une unité près, le coût moyen est-il minimal ?
Quel est alors ce coût ?

∾ Baccalauréat ES Métropole septembre 2001 ∾

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Sur une portion de 6 kilomètres de boulevard périphérique, le trafic peut être perturbé entre 7 h et 11 h du matin.
Au début de cette portion, un panneau indique, à chaque instant, le temps de parcours d'un véhicule sur ces 6 kilomètres.
On modélise l'évolution du trafic à l'aide de la fonction f définie sur $[1\,;\,5]$ par

$$f(t) = 8\mathrm{e}\frac{\ln t}{t} + 4 \quad \text{où e est égal à } \exp(1).$$

Le nombre $f(t)$ est alors le temps de parcours indiqué sur le panneau et exprimé en minute, à un instant t exprimé en heure. Il est 7 h du matin à l'instant $t = 1$.
Le panneau indique « trafic fluide » s'il faut moins de 6 minutes pour parcourir les 6 kilomètres, il indique « trafic perturbé » s'il faut plus de 11 minutes.

1. **a.** Étudier les variations de f sur $[1\,;\,5]$ et dresser son tableau de variations.
   b. En déduire que le trafic n'est pas fluide à 7 h 10 min et qu'il ne l'est plus jusqu'à 11 h.
2. Soit g la fonction définie sur $[1\,;\,5]$ par

$$g(t) = (\ln t)^2.$$

   a. Calculer $g'(t)$ et en déduire une primitive de f sur $[1\,;\,5]$.
   b. Déterminer, à une minute près, la valeur moyenne du temps nécessaire pour parcourir les 6 kilomètres, entre 7 h et 11 h du matin.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

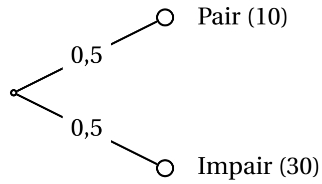
Une personne qui dispose de 20 € souhaite miser sur « pair » ou « impair » avant le lancer d'un dé.
La mise est doublée si on gagne, sinon elle est perdue.
Au premier lancer, elle mise 10 € sur « impair », et on suppose que la probabilité d'obtenir « pair » est la même que celle d'obtenir « impair ».
En revanche, aux lancers suivants, elle mise toute la somme qui lui reste ou s'arrête s'il ne lui reste plus rien. Elle décide de jouer au maximum trois fois.

1. Dans cette question, on suppose que la personne mise chaque fois sur « impair » et qu'à chaque fois la probabilité d'obtenir « pair » est égale à celle d'obtenir « impair ».
   On note X la somme qui lui reste à la fin.
   a. Illustrer la situation par un arbre pondéré.
   b. Déterminer la loi de probabilité associée à l'ensemble des valeurs prises par X ainsi que l'espérance de cette loi.
2. Pour cette question, on a constaté après une étude statistique qu'après un « impair », la probabilité d'obtenir de nouveau un « impair » est de 0,4, et qu'après un « pair », la probabilité d'obtenir de nouveau un « pair » est de 0,45.
   Le sachant, la personne mise, à partir du deuxième lancer, sur la solution la plus probable.
   On note Y la somme qui lui reste à la fin.

a. Illustrer la situation par un arbre pondéré.

b. Déterminer la loi de probabilité associée à l'ensemble des valeurs prises par Y ainsi que l'espérance de cette loi.

Remarque : *Dans les deux cas décrits par les deux questions, le premier niveau de l'arbre pondéré est donc le suivant où la somme qui reste à la personne est mise entre parenthèses :*



EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 7$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 6}{5}.$$

1. Calculer $u_1,\ u_2,\ u_3$.

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = u_n - 2.$$

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Exprimer v_n en fonction de n, et en déduire que :

$$u_n = 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 2.$$

c. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3. Illustration graphique

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{2x+6}{5}.$$

a. Tracer la représentation graphique D de f, ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

b. Placer, sur l'axe des abscisses, le point P_0 d'abscisse u_0. En utilisant les droites D et Δ, construire les points $\text{P}_1,\ \text{P}_2, \text{P}_3$ de l'axe $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\right)$ d'abscisses respectives $u_1,\ u_2,\ u_3$.

À quoi correspond, sur ce graphique, l'abscisse du point d'intersection des deux droites D et Δ ?

PROBLÈME **10 points**

Première partie

Dans une commune les habitants paient un impôt en fonction de leurs revenus.
La population est alors classée du plus faible impôt au plus fort.
Le tableau suivant indique que $(100y)$% de la recette fiscale due à cet impôt est payée par $(100x)$ % de la population.
Ainsi le couple (0,7 ; 0,25) signifie que 70 % de la population paie 25 % de la recette fiscale.

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	0	0,025	0,04	0,06	0,1	0,16	0,25	0,4	0,65	1

1. **a.** Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i,\ y_i\right)$.
Vous prendrez un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.

b. Un ajustement affine entre les variables statistiques x et y vous paraît-il approprié ?

2. *Dans cette question le détail des calculs n'est pas demandé.*
On considère la variable statistique $z = \ln(y)$ pour les valeurs de y strictement positives.

a. Recopier et compléter le tableau suivant où z_i sera arrondi à 0,01.

x_i	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$z_i = \ln y_i$	$-3,69$								

b. Donner une équation de la droite obtenue comme ajustement affine par la méthode des moindres carrés sous la forme $z = ax + b$ où a et b seront arrondis à 0,1.

c. En déduire une relation entre y et x de la forme $y = \alpha \exp(ax)$ où α sera arrondi à 0,01.

d. Recopier et compléter le tableau suivant en donnant des valeurs arrondies à 0,01.

x_i	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\alpha \exp(ax_i)$									

Comparer avec le tableau initial et donner un bref commentaire.

Deuxième partie

Soient f et g les fonctions définies sur [0 ; 1] par

$$f(x) = 0,01\exp(4,6x) \quad \text{et} \quad g(x) = x - f(x).$$

On note $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f et (Δ) la droite d'équation $y = x$ dans le repère de la première partie.

1. **a.** En utilisant $f(x)$ comme ajustement de la variable statistique y de la première partie, déterminer à 1 % près le pourcentage de la population payant la moitié de la recette fiscale.

b. Étudier les variations de f sur [0 ; 1].

c. Tracer $(\mathcal{C})$ et (Δ) sur le graphique de la première partie.

2. **a.** Résoudre l'équation $f'(x) = 1$ sur [0 ; 1] ; la solution β sera arrondie à 0,01.
Tracer la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 3.

b. Résoudre l'inéquation $f'(x) > 1$ sur $[0\,;\,1]$.

c. Donner une relation entre $g'(x)$ et $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de g sur $[0\,;\,1]$.

d. Pour quelle valeur de x la fonction g atteint-elle son maximum ?
Interpréter graphiquement ce résultat.

Baccalauréat ES Polynésie septembre 2001

EXERCICE 1 **5 points**

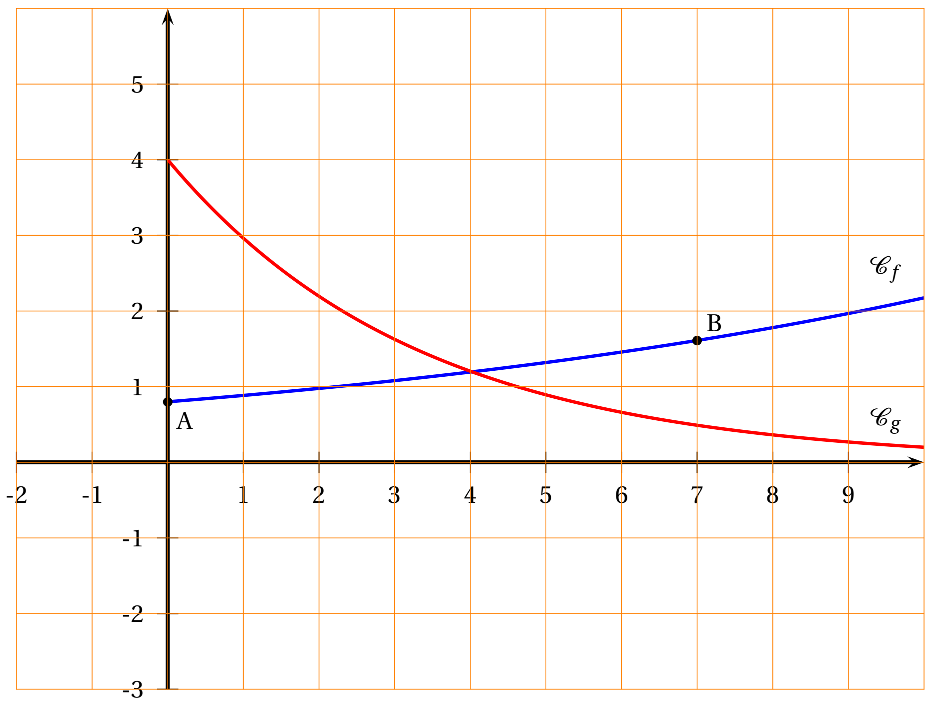
Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Sur le graphique ci-après, la courbe $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0\,;\,10]$ par :

$$f(x) = k\text{e}^{ax}, \text{où } a \text{ et } k \text{ sont deux constantes réelles.}$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A et B de coordonnées : A (0 ; 0,8) et B (7 ; 1,6).
La courbe $\mathscr{C}_g$ est la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0\,;\,10]$ par :

$$g(x) = 4\text{e}^{-0,3x}.$$



1. **a.** Déterminer les nombres a et k à 10^{-1} près.

   b. Justifier le sens de variation de g.

   c. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ dans $[0\,;\,10]$.

2. Dans une étude de marché, pour un produit donné, on a modélisé l'offre par la fonction f et la demande par la fonction g en fonction du prix unitaire x par :

$$f(x) = 0,8\text{e}^{0,1x} \quad \text{et} \quad g(x) = 4\text{e}^{-0,3x}.$$

   Le prix d'équilibre correspond à la solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

   a. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ dans $[0\,;\,10]$.

   b. Donner la valeur approchée, notée x_e à 10^{-1} près par défaut du prix d'équilibre.

3. a. Pour x appartenant à $[0\,;\,9]$ montrer que le quotient $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$ est constant.

   On donnera une valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.

   b. En déduire le taux d'accroissement, exprimé en pourcentage, de l'offre quand le prix unitaire augmente d'une unité.

4. Le prix est fixé égal au prix x_e. On augmente ce prix de 1 % ; déterminer alors le pourcentage t % de variation de la demande (on donnera un arrondi de t à 10^{-1}).

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Une maison d'édition a ouvert le 1er janvier 2002, sur Internet, un site de vente par correspondance.
Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de livres vendus par mois en milliers.

Mois	Janvier 2002	Janvier 2003	Juillet 2003	Janvier 2004	Avril 2004
Rang du mois x_i	1	13	19	25	28
Nombre de livres en milliers y_i	1,2	2,5	3,5	5,1	6

1. Représenter le nuage de points $(x_i\,;\,y_j)$ dans un repère (unités graphiques : 1 cm représente deux mois en abscisse et 1 cm représente 500 livres en ordonnée).
2. L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel plutôt qu'un ajustement affine.

   Pour cela, on pose $z_i = \ln(y_i)$.

   Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant où z_i est arrondi à 10^{-3}.

Rang du mois x_i	1	13	19	25	28
$z_i = \ln(y_i)$			1,253		

3. *Dans cette question, les résultats numériques pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice, sans justification.*

   Écrire une équation de la droite d'ajustement affine D de z en x par la méthode des moindres carrés, (les coefficients seront arrondis à 10^{-2}).
4. Déduire de la question précédente une relation entre y et x de la forme $y = a\mathrm{e}^{kx}$.

   Les coefficients a et k seront arrondis à 10^{-2}.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

On considère un groupe de 500 villes d'un pays.
Chaque année les impôts locaux d'une ville peuvent augmenter ou ne pas augmenter.
n étant un entier naturel, on note :

- a_n la probabilité qu'une ville ait augmenté les impôts locaux l'année n ;
- b_n la probabilité qu'une ville n'ait pas augmenté les impôts locaux l'année n ;
- P_n la matrice $(a_n \;\; b_n)$ traduisant l'état probabiliste à l'année n.

On a constaté statistiquement que tous les ans :

- 20 % des villes qui ont augmenté les impôts l'année précédente les augmentent l'année suivante ;
- 90 % des villes qui n'ont pas augmenté les impôts l'année précédente les augmentent l'année suivante.

1. a. Chaque année, une ville peut être à l'état A « les impôts locaux ont augmenté » ou à l'état B « les impôts locaux n'ont pas augmenté ».
   Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.
   Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

   b. Vérifier que la matrice M de ce graphe est $\begin{pmatrix}0,2 & 0,8\\ 0,9 & 0,1\end{pmatrix}$

2. On a constaté qu'en 2002, les impôts locaux ont été augmentés dans 300 villes et n'ont pas été augmentés dans 200 villes.
   On note a_0 et b_0 les fréquences correspondantes.

   a. Déterminer l'état initial $P_0 = (a_0 \quad b_0)$.

   b. Calculer P_1. En déduire le nombre de villes qui augmenteront les impôts en 2003 et le nombre de celles qui ne les augmenteront pas en 2003.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel n :

$$a_n + b_n = 1 \quad \text{et} \quad P_{n+1} = P_n \times M.$$

   Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.

4. Soit $P = (x \quad y)$ l'état stable. Expliquer ce que représentent x et y et déterminer x et y en utilisant les résultats précédents.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,12]$ par

$$f(x) = \frac{5\ln x}{x^2}.$$

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{5(1-2\ln x)}{x^3}$.
2. En déduire les variations de f sur $[2\,;\,10]$ puis dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet une solution unique sur $[2\,;\,10]$ notée α puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

PARTIE B

Une ville décide de promouvoir les déplacements à vélo afin de lutter contre la pollution et a acheté un parc de 1 000 vélos qu'elle loue à la journée. On constate que la demande est fonction du prix de location et que cette demande est modélisée par la fonction f donnée ci-dessus dans la partie A définie sur $[2\,;\,10]$ où x désigne le prix de location d'un vélo pour la journée et $f(x)$ la demande en milliers de vélos.

1. En utilisant la partie A, indiquer le prix à partir duquel la demande sera inférieure à 500 vélos.
   On donnera la valeur au centime d'euro près.
2. On suppose que le prix de location est fixé à 3 euros. Calculer le pourcentage de variation de la demande à 10^{-2} près lorsque le prix augmente de 0,03 euros.

3. Le pourcentage de variation de la demande lorsque le prix augmente de 1 % est appelé « élasticité de la demande par rapport au prix ». On admet qu'une valeur approchée de ce nombre est $x\dfrac{f'(x)}{f(x)}$. On note $\mathrm{E}(x) = x\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

a. Montrer que $\mathrm{E}(x) = \dfrac{1-2\ln(x)}{\ln(x)}$.

b. Calculer E(3) arrondi à 10^{-2}. Comparer ce résultat avec celui de la question 2.

PARTIE C

1. Calculer la recette lorsque le prix est égal à 3 € (on donnera le résultat à l'euro près).

2. Exprimer en euros la recette $R(x)$ en fonction du prix x.

3. Montrer que $R'(x) = 5\,000 \times \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Étudier les variations de R sur $[2\,;\,10]$.

4. En déduire le prix de location permettant d'obtenir la recette maximum et déterminer cette recette maximum.

Le prix de la location sera arrondi au centime d'euro près et la recette à l'euro près.

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

On donne le tableau suivant indiquant l'évolution du nombre de centenaires en France depuis le début du siècle :

années	1911	1931	1946	1962	1970	1980	1992	1995	2000
x_i	11	31	46	62	70	80	92	95	100
nombre de centenaires y_i	118	241	261	440	1 273	3 112	4 323	6 060	9 264

source : INSEE

Tous les résultats statistiques seront donnés à l'aide de la calculatrice.
Le détail des calculs n'est pas demandé.

1. Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points $M\left(x_i,\ y_i\right)$: unités graphiques : 1 cm pour 10 ans sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 500 personnes sur l'axe des ordonnées.
2. On constate, au vu de ce nuage, qu'un ajustement linéaire ne semble pas le mieux adapté.
   On s'intéresse alors à la série $\left(x_i,\ \ln y_i\right)$.
   On appelle z_i une valeur approchée de $\ln y_i$ par défaut à 10^{-4} près.
   a. Recopier et compléter le tableau suivant :

x_i	11	31	46	62	70	80	92	95	100
z_i	4,770 6	5,484 7	5,564 5						9,133 8

   Pour la série $(x_i\ ;\ z_i)$ du tableau précédent, donner le coefficient de corrélation linéaire (on en donnera une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près) et justifier qu'un ajustement, linéaire est envisageable.

   b. Déterminer l'équation $z = ax + b$ de la droite D de régression de z en x par la méthode des moindres carrés. Les nombres a et b seront donnés à 10^{-5} par défaut.
3. Si l'évolution restait la même, estimer le nombre de centenaires en France en 2015.

Exercice 2 — 6 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Des calculs statistiques effectués sur les élèves de terminale d'un lycée, concernant l'année scolaire 1999-2000. ont donné les renseignements suivants :
en juin 2000, les élèves de terminale se répartissaient ainsi : 45 % en S, 25 % en L, et 30 % en ES. Les taux, arrondis, de réussite au baccalauréat ont été les suivants :

S	L	ES
87 %	85 %	79 %

À la fin du mois de décembre 2000, sur l'ensemble des élèves, qui étaient en terminale dans ce lycée en juin de la même année, on en choisit un au hasard.
Dans la suite de l'exercice, on appelle :

S l'évènement « l'élève choisi était en S l'année scolaire précédente »,
L l'évènement « l'élève choisi était en L l'année scolaire précédente »,
E l'évènement « l'élève choisi était en ES l'année scolaire précédente »,
R l'évènement « l'élève choisi a été reçu au baccalauréat ».

1. **a.** Donner $p(\text{E})$, $p(\text{R} / \text{E})$ et montrer que $p(\text{R} \cap \text{E}) = 0{,}237$.

b. Calculer $p(\text{R} \cap \text{S})$ et $p(\text{R} \cap \text{L})$.

c. En déduire que la probabilité que cet élève choisi au hasard ait été reçu au baccalauréat est 0,841.

2. Lorsque les élèves, **reçus au baccalauréat**, sont venus au lycée chercher leur diplôme, on s'est renseigné sur leur poursuite d'études, et on a obtenu les résultats suivants :

élèves issus de	S	L	ES
poursuite d'études en faculté	40 %	60 %	40 %

On appelle :

F l'évènement « l'élève choisi est en faculté »,
E' l'évènement $\text{R} \cap \text{E}$,
L' l'évènement $\text{R} \cap \text{L}$,
S' l'évènement $\text{R} \cap \text{S}$.

a. Donner $p(\text{F} / \text{E}')$.

b. Calculer $p(\text{F} \cap \text{E}')$.

c. Montrer que la probabilité que l'élève choisi soit en faculté est 0,378 9.

3. À la même date, on choisit, toujours au hasard, un élève qui se trouvait en terminale de ce lycée l'année scolaire précédente et **qui se trouve maintenant en faculté**.

a. Pourquoi les évènements $\text{F} \cap \text{E}'$ et $\text{F} \cap \text{E}$ sont-ils les mêmes ?

b. Calculer la probabilité que l'élève choisi soit issu de terminale ES ? (En donner une valeur approchée par excès à 10^{-4} près).

EXERCICE 2 — 6 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Des adolescents (5 garçons et 7 filles) passent ensemble des vacances.
Ils décident de tirer au sort deux d'entre eux chaque jour pour former une équipe chargée d'effectuer les courses.

1. *Pour le tirage au sort fait le premier jour, on donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.*

a. Combien d'équipes différentes peuvent-ils obtenir par ce tirage au sort ?

b. Calculer la probabilité que l'équipe soit constituée de deux filles.

c. Montrer que la probabilité que l'équipe soit mixte est $\dfrac{35}{66}$.

Dans les questions suivantes, les résultats seront donnés sous forme décimale : valeurs approchées par défaut à 10^{-4} près.

2. On suppose dans cette question que les vacances durent 6 jours. Ils recommencent chaque jour le tirage au sort dans les mêmes conditions (indépendamment des résultats des jours précédents).

a. Calculer la probabilité que le sort désigne des équipes mixtes exactement quatre fois.

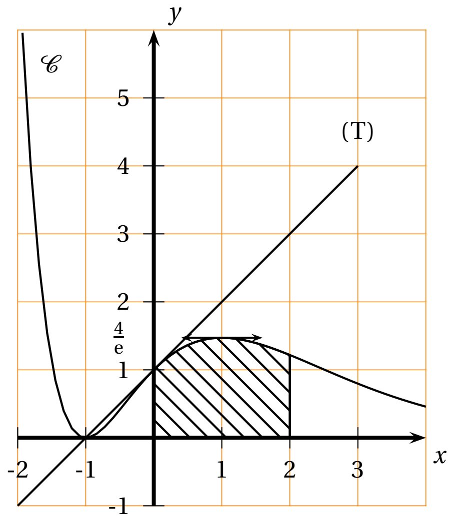
b. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois une équipe mixte.

3. Quelle durée minimale doit avoir leur séjour pour que la probabilité que les courses soient effectuées au moins une fois par deux adolescents de sexe différent dépasse 0,999 ?

PROBLÈME **8 points**

Partie A :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Sur le graphique ci-contre, la courbe $(\mathscr{C})$ représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La droite (T) est la tangente à la courbe au point A d'abscisse 0.



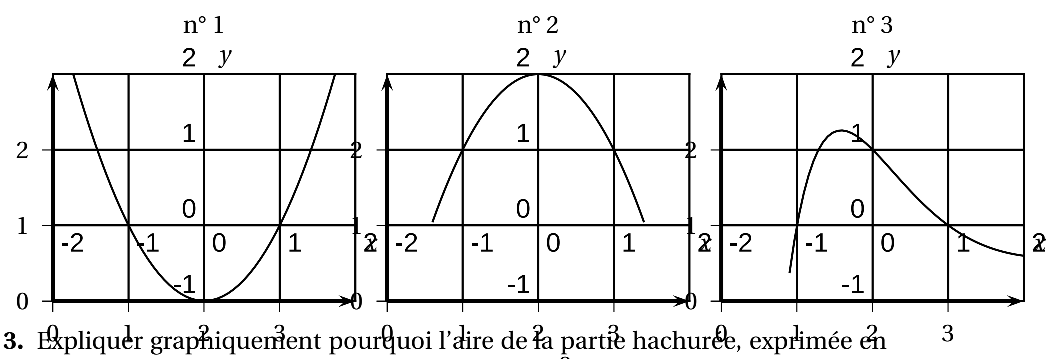
1. À partir du graphique, reproduire et compléter le tableau suivant :

x	-1	0	1
$f(x)$			
$f'(x)$			

Justifier les valeurs de $f'(-1)$ et $f'(0)$.

2. La fonction f a pour dérivée une fonction f' dont la courbe est l'une des trois suivantes.

Indiquer laquelle en justifiant votre réponse.



3. Expliquer graphiquement pourquoi l'aire de la partie hachurée, exprimée en unités d'aire, est un nombre compris entre 2 et $\dfrac{8}{e}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 + 2x + 1\right) e^{-x}.$$

1. Montrer que pour tout réel x on a : $f(x) \geqslant 0$.

2. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Déterminer alors la limite de f en $+\infty$.

Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de f ? Si oui préciser laquelle.

3. **a.** Montrer que la dérivée de f est définie par $f'(x) = (-x^2+1)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier alors les variations de f suivant les valeurs de x. Dresser le tableau de variations de f.

4. **a.** Montrer que, sur l'intervalle $[1~;~3]$, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α unique.

b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. En fait la représentation graphique de la fonction f est la courbe $(\mathscr{C})$ dessinée dans la **partie A**.

a. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \left(-x^2 - 4x - 5\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

Calculer $g'(x)$.

b. Calculer $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée par excès à 10^{-2} près.

c. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie décembre 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne la dépense de consommation finale des ménages français en biens d'équipement pour les années 1993 à 1998.

Année	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Dépense y_i en milliards de francs	34,6	35,8	18,8	40,5	41,5	46,1

(Source INSEE, Comptes Nationaux)

Le détail des calculs statistiques, à effectuer à la machine, n'est pas demandé.

1. **a.** Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ en prenant comme unités graphiques : 2 cm pour 1 rang en abscisses et 1 cm pour 1 milliard de francs en ordonnées, en faisant débuter la graduation à 30 sur l'axe des ordonnées.

   b. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et placer ce point sur le graphique.

   On veut réaliser un ajustement affine de ce nuage de points afin d'obtenir une prévision pour l'année 1999 de la dépense des ménages français en biens d'équipement.

2. Dans cette question on utilise la méthode d'ajustement dite de la droite de Mayer.

   a. On désigne par G_1 le point moyen des trois premiers points (M_1, M_2 et M_3) du nuage et par G_2 le point moyen des trois derniers points (M_4, M_5 et M_6) du nuage.

   Calculer les coordonnées de G_1 et G_2 puis placer ces deux points sur le graphique.

   b. Démontrer que l'équation réduite de la droite (G_1G_2) est $y = 2,1x + 32,2$.

   Tracer (G_1G_2) sur le graphique.

   c. Calculer la prévision pour l'année 1999 de la dépense des ménages français en biens d'équipement obtenue en utilisant la droite (G_1G_2).

3. Dans cette question, on utilise la méthode des moindres carrés.

   a. Soit D la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés ; elle a pour équation réduite $y = 2,18x + b$.

   Justifier que $b = 31,92$ en utilisant le point moyen G.

   Tracer D sur le graphique.

   b. Calculer la prévision pour l'année 1999 de la dépense des ménages français en biens d'équipement obtenue en utilisant la droite D.

4. Le montant réel de la dépense pour l'année 1999 a été de 48,8 milliards de francs.

   Commenter, au vu de cette donnée, les prévisions obtenues par les deux méthodes d'ajustement envisagées précédemment.

EXERCICE 2 **6 points**

Enseignement obligatoire

Une entreprise fabrique un article qui doit répondre à des normes précises. On considère que 8 % des articles produits ne sont pas conformes aux normes. Un test de contrôle en fin de fabrication est censé repérer les articles non conformes. Cependant le test comporte une certaine marge d'erreur ; une étude a établi que
• 5 % des articles conformes aux normes sont refusés par le test ;
• 10 % des articles non conformes aux normes sont acceptés par le test.
On considère un article pris au hasard au moment de passer le test. On note :
C l'évènement « l'article est conforme aux normes » ;
T l'évènement « l'article est accepté par le test ».
$\overline{\text{C}}$ et $\overline{\text{T}}$ désignent les évènements contraires respectifs de C et T.
La probabilité d'un évènement E est notée $p(\text{E})$; la probabilité conditionnelle de E sachant que F est réalisé est notée $p_{\text{F}}(\text{E})$.

1. **a.** Déduire des données les probabilités $p(\text{C})$, $p\left(\overline{\text{C}}\right)$, $p_{\text{C}}(\text{T})$, $p_{\overline{\text{C}}}(\text{T})$, $p_{\text{C}}(\overline{\text{T}})$ et $p_{\overline{\text{C}}}(\overline{\text{C}})$ (on pourra faire un arbre).

   b. Calculer $p(\text{T} \cap \text{C})$ et $p\left(\text{T} \cap \overline{\text{C}}\right)$. En déduire que $p(\text{T}) = 0,882$.

   c. Quelle est la probabilité que le contrôle donne un résultat erroné ?

2. Le coût de fabrication d'un article est 80 F.

   Tout article refusé par le test est détruit.

   Chaque article accepté par le test est mis sur le marché et vendu 120 F mais lorsqu'un tel article n'est pas conforme aux normes, l'entreprise doit rembourser 140 F au client (prix d'achat plus 20 F de frais de port) et l'article litigieux est détruit.

   Soit X le nombre indiquant le bénéfice ou la perte correspondant à un article choisi au hasard. L'ensemble des valeurs de X est : $\{+40,\ -80,\ -100\}$.

   a. Exprimer les évènements $(X = 40)$, $(X = 80)$ et $(X = -100)$ en utilisant C, $\overline{\text{C}}$, T et $\overline{\text{T}}$.

   b. Donner la loi de probabilité associée à ces trois valeurs.

   c. Calculer l'espérance de cette loi. Quelle interprétation peut-on en donner ?

EXERCICE 2 **6 points**

Enseignement de spécialité

Dans un certain milieu professionnel M, toute personne est tenue de posséder un agenda et de le renouveler chaque année. On supposera qu'aucune personne n'achète plus d'un agenda.
Deux fournisseurs, désignés respectivement par a et b, se partagent le marché des agendas dans le milieu M (donc tout individu faisant partie de M se fournit soit auprès de a, soit auprès de b).
On cherche à prévoir les parts de marché futures de a et b en faisant l'hypothèse que d'une année sur l'autre :
• 76 % des clients de a restent fidèles à a ;
• 64 % des clients de b restent fidèles à b.
Pour l'année 2000, 40 % des individus faisant partie de M ont choisi a et les autres ont choisi b.
On considère une personne prise au hasard dans M.
On note, pour tout entier naturel n :
A_n l'évènement « l'année 2000 + n, la personne choisit a ».
B_n l'évènement « l'année 2000 + n, la personne choisit b ».

1. a. Déduire des données les probabilités $p(A_0)$, $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{B_n}(A_{n+1})$.

   b. Démontrer la relation $p(A_{n+1}) = 0,76 \times p(A_n) + 0,36 \times p(B_n)$.

   c. On pose, pour tout entier naturel n, $p_n = p(A_n)$. Justifier la relation $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,36$.

2. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = 0,6 - p_n$.

   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,4 ; préciser son premier terme u_0.

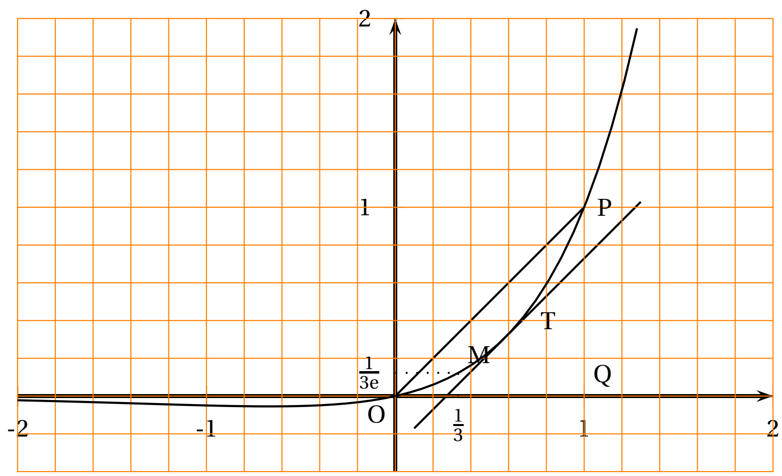
   b. Exprimer u_n puis p_n en fonction de n.

   c. Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Exprimés en pourcentages, les nombres $p(A_n)$ et $p(B_n)$ constituent les prévisions, pour une future année $2000 + n$, des parts de marché respectives de a et b.
   Quelle évolution peut-on prévoir à long terme pour les parts de marché respectives de a et b si le comportement de la clientèle reste toujours le même ?

PROBLÈME **10 points**

Sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1. Expression de la fonction
   La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{mx+p}$, m et p étant deux constantes.

   a. En utilisant les points P(1 ; 1) et $\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3\mathrm{e}}\right)$ de la courbe $\mathscr{C}$, démontrer que m et p vérifient : $\left\{\begin{array}{rcl} m+p &=& 0\\ m+3p &=& -3\end{array}\right.$.

   b. En déduire que $f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{3}{2}(x-1)}$.

2. Tableau de variations de f

   a. Calculer la limite de f en $+\infty$. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

   b. Vérifier que

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2}x + 1\right)\mathrm{e}^{\frac{3}{2}(x-1)}.$$

   c. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de f.

3. Point de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite (OP)

a. On admet que f' est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$.
Démontrer que, dans l'intervalle $[0\,;\,1]$, l'équation $f'(x) = 1$ a une solution unique t.
Donner un encadrement de t d'amplitude 10^{-2}.

b. Justifier que t est l'abscisse du point T de la courbe $\mathscr{C}$, situé entre O et P où la tangente est parallèle à la droite (OP).

4. Aire du domaine situé entre la courbe et le segment [OP]
On note $\mathscr{A}$ la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, le segment [OQ] et le segment [PQ] et S la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et le segment [OP].

a. Justifier que $S = \dfrac{1}{2} - \mathscr{A}$.

b. Déterminer pour quelle valeur du réel k la fonction

$$G \quad : \quad x \longmapsto k\mathrm{e}^{\frac{3}{2}(x-1)}.$$

est une primitive de la fonction $g \quad : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{3}{2}(x-1)}$.

c. Vérifier que $f(x) = \dfrac{2}{3}\left(f'(x) - g(x)\right)$. En déduire une primitive F de f.

d. Démontrer que $\mathscr{A} = \dfrac{2}{9}\left(1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$.
Donner alors la valeur exacte de S puis une valeur approchée de S à 10^{-2} près.

Baccalauréat ES Nouvelle–Calédonie mars 2002

EXERCICE 1 **5 points**

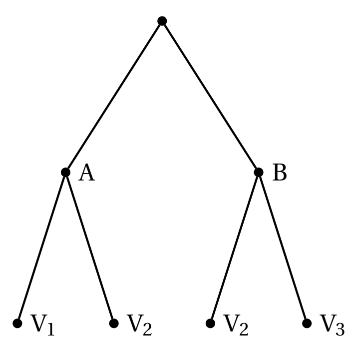
Les résultats seront donnés, dans cet exercice, sous la forme d'une fraction.
Un club a organisé en l'an 2000, à l'intention de ses adhérents, trois voyages différents.
Deux contrats sont proposés (à l'exclusion de toute autre possibilité)

- un contrat ($\mathscr{A}$) avec l'obligation d'effectuer au plus deux voyages ;
- un contrat ($\mathscr{B}$) avec l'obligation d'effectuer au moins deux voyages.

1 200 membres ont participé à au moins l'un de ces trois voyages et 800 ont choisi le contrat de type ($\mathscr{A}$).
On choisit au hasard un des participants.
On note :

- A l'évènement : « A choisi un contrat de type ($\mathscr{A}$) » ;
- B l'évènement : « A choisi un contrat de type ($\mathscr{B}$) » ;
- V_1 l'évènement : « A effectué exactement 1 voyage » ;
- V_2 l'évènement : « A effectué exactement 2 voyages » ;
- V_3 l'évènement : « A effectué exactement 3 voyages » ;
- $p(E)$ la probabilité de l'évènement E ;
- $p_F(E)$ la probabilité de l'évènement E sachant que F est réalisé.

On sait de plus que plus que $p_A(V_1) = \dfrac{3}{4}$ et $p_{V_2}(A) = \dfrac{2}{3}$.
Pour répondre aux questions suivantes on pourra s'aider de l'arbre ci-dessous (en le complétant au fur et à mesure)



1. **a.** Déterminer $p(A)$ et $p(B)$.

   b. Déterminer $p(A \cap V_1)$ et en déduire que $p(V_1) = \dfrac{1}{2}$.

   c. Déterminer $p(A \cap V_2)$ et en déduire que $p(V_2) = \dfrac{1}{4}$.

   d. Calculer $p(V_3)$.

   e. Déterminer $p_B(V_2)$. À quoi correspond ce nombre ?

2. On répète 5 fois, de façon indépendante, le choix au hasard d'un des participants.
   Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de membres, parmi les 5 choisis, ayant effectué exactement 2 voyages.

   a. Déterminer $p(X = 0)$.

b. Déterminer $p(X \geqslant 1)$.

c. Déterminer $p(X = 3)$.

EXERCICE 1 **4 points**

Dans cet exercice, les résultats numériques pounvnt être obtenus à l'aide de la calculatrice sans justification.

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de départs à la retraite au sein d'une entreprise à effectif stable.

Année	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
y_i	50	53	53	58	57	59	63	64

x_i désigne le rang de l'année ; y_i désigne le nombre de départs à la retraite.

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ associé à la série double dans un repère orthogonal ayant pour origine le point $M_0(0\ ;\ 50)$, et pour unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

2. Dans cette question les résultats seront donnés à 10^{-2} près par défaut.

a. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. (Hors programme 2003,)

b. Peut-on envisager un ajustement affine ? Pourquoi ?

c. Donner une équation de la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

d. Tracer cette droite sur le graphique précédent.

3. En supposant que l'évolution se poursuive de la même façon pour les années suivantes, déterminer une estimation, arrondie à l'entier le plus proche, du nombre de départs à la retraite dans cette entreprise en 2000, puis en 2003.

4. En réalité, 64 employés ont fait valoir en 2000 leur droit à la retraite.

Soit T : estimation théorique obtenue pour l'année 2000.

Soit R : nombre réel donné ci-dessus.

On considère la différence T − R.

Quel pourcentage cette différence représente-t-elle par rapport à l'estimation théorique ?

PROBLÈME **11 points**

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Unités graphiques $\dfrac{1}{4}$ cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I = [0 ; 60] par

$$g(x) = \frac{x-8}{10(x+2)}.$$

On désigne par Γ sa courbe représentative relativement au repère $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Calculer la dérivée de la fonction g.

b. Étudier le sens de variations de la fonction g.

c. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de Γ avec l'axe des ordonnées, puis avec l'axe des abscisses.

d. Déterminer le signe de la fonction g sur I.

2. Démontrer que Γ admet en un point A et un seul une tangente parallèle à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{9}x + 10$.

3. a. Vérifier que, pout tout x de I, $g(x) = \dfrac{-1}{x+2} + \dfrac{1}{10}$.

   b. Déterminer une primitive de la fonction g sur I.

   c. Calculer le nombre réel $\displaystyle\int_{10}^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$. Préciser, en justifiant, ce que représente géométriquement ce nombre.

Partie B

On considère la fonction B définie sur I = [0 ; 60] par

$$B(x) = 0,1x - \ln(x+2) - 1.$$

1. a. Démontrer que la fonction B est dérivable sur I.

   b. Démontrer que petit tout réel x appartenant à I on a $B'(x) = g(x)$.

   c. Dresser le tableau de variations de B.

2. a. Démontrer que l'équation $B(x) = 0$ admet dans l'intervalle [49 ; 50] une solution et une seule. On note α cette solution.

   b. Déterminer un encadrement à 10^{-1} près de α.

   c. Déduire des questions 1. c. et 2. a. que l'équation $B(x) = 0$ admet dans l'intervalle I = [0 ; 60] une solution et une seule.

3. Tracer la courbe représentative de la fonction B dans le repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie C

Une entreprise produit quotidiennement x voitures ($0 \leqslant x \leqslant 60$) pour un coût total exprimé en millions de francs par

$$C(x) = 0,2x + \ln(x+2) + 1.$$

Chaque voiture produite est vendue, et ce, au prix de 300 000 francs. On appelle $R(x)$ la recette totale (en millions de francs) résultant de la vente de x voitures.

1. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
2. Exprimer le terme $R(x) - C(x)$ en fonction de x. Que représente ce terme ?
3. Déterminer le nombre minimal de voitures à fabriquer journellement pour rentabiliser l'entreprise.
4. Pour quelle production quotidienne de voitures la perte de l'entreprise est-elle maximale ?

Baccalauréat ES Pondichéry avril 2002

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On donne les valeurs d'un indice boursier au premier de chaque mois entre janvier et septembre 2001.

Date	1/01	1/02	1/03	1/04	1/05	1/06	1/07	1/08	1/09
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Indice y_i	7100	6900	6800	6600	6500	6350	6400	6250	6000

Les calculs seront effectués à l'aide de la calculatrice. Aucun détail de ces calculs n'est demandé.

1. Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$. On prendra 1 cm pour deux unités en abscisse et 1 cm pour 200 points d'indice en ordonnées, en commençant au point (0 ; 5 000).
2. Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ arrondi à 0,01.
3. On considère que ce coefficient justifie un ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Donner une équation de la droite D d'ajustement affine de y en x (les coefficients étant arrondis à 0,01). Tracer D dans le repère.
4. On suppose que la tendance se poursuit.

   a. En utilisant cet ajustement, donner une estimation à 10 points près de cet indice boursier au 1$^{\text{er}}$ janvier 2002.

   b. Calculer le mois à partir suquel on peut estimer que cet indice sera inférieur à 5 000. Comment peut-on vérifier ce résultat graphiquement ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un jardinier propose ses services pour la plantation de la pelouse dans un lotissement nouvelllement construit. Il dispose de deux produits : soit un gaézon sport, soit un gazon anglais.

Parmi les foyers du lotissement, 60 % se déclarent intéressés par cette offre ; cependant le jardinier sait par expérience que, parmi ceux qui se disent intéressés, 50 % se décident pour le gazon sport, 30 % pour le gazon anglais, les autres renonçant finalement à faire appel à lui.

On note :

I l'évènement « le foyer est intéressé » ;
S l'évènement « le foyer prend du gazon sport » ;
A l'évènement « le foyer prend le gazon anglais » ;
R l'évènement « le foyer renonce à faire appel au jardinier ».

Un foyer du lotissement est pris au hasard.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   - « le foyer est intéressé et prend du gazon sport » soit I $\cap$ S ;
   - I $\cap$ A ;
   - I $\cap$ R.
2. Calculer la probabilité que le jardinier ne plante pas la pelouse dans ce foyer.

3. La plantation du gazon sport est facturée 2 000 € et celle du gazon anglais s €. On appelle X la variable aléatoire égale au montant (qui peut être nul) versé au jardinier par un foyer pris au hasard dans le lotissement.
   a. Donner la loi de probabilité de X.
   b. Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de s.
   c. Calculer s pour que le jardinier espère gagner en moyenne 1 200 € par foyer dans ce lotissement.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Soit M la matrice carrée d'ordre 5 :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Construire le graphe associé à M. On appelllera A, B, C, D, E les sommets.
   Ce graphe est-il connexe ? Est-il complet ?
2. Existe-t-il une chaîne eulérienne ?
   Existe-t-il un cycle eulérien ?
3. Donner un encadrement du nombre chromatique du graphe et déterminer sa valeur.
4. a. Calculer M^2.
   b. Combien y-a-t-il de chaînes de longueur 2 entre A et B ? Entre C et A ?
5. Combien y-a-t-il de chaînes de longueur 3 entre B et D ?

PROBLÈME **11 points**
Commun à tous les candidats

Une société d'achats en ligne veut analyser le déroulement d'une vente promotionnelle « flash » qu'elle a organisée sur l'Internet.
Cette vente, d'une durée annoncée de trois minutes, a provoqué sur son site un flux financier que l'on peut supposer continu et dont la vitesse instantanée a été variable en fonction du temps.
On a pu modéliser cette vitesse pendant les trois minutes de l'ouverture du site par la fonction f définie par

$$f(t) = 20t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

où t est le temps exprimé en minutes ($t \in [0\,;\,3]$) et $f(t)$ est la vitesse instantanée de ce flux, exprimée en milliers d'euros par minute.
Sauf indication contraire, les résultats numériques seront arrondis au millième.

Partie A

Étude de la vitesse instantanée pendant les trois minutes de la vente.

1. Déterminer la fonction dérivée de f.
2. Démontrer que la vitesse admet un maximum. Donner un arrondi au millième de ce maximum.

3. Dessiner la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère orthogonal (unités : 5 cm en abscisse, 1 cm en ordonnées) et préciser la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 (on calculera son coefficient directeur).

Partie B

Détermination de la vitesse moyenne pendant les trois minutes de la vente.

1. Vérifier que la fonction F définie sur $[0\,;3]$ par

$$F(t) = -20\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

est une primitive de f sur $[0\,;3]$.

2. En déduire l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $t = 0$ et $t = 3$ exprimée en unités d'aire, puis en cm^2.
3. Quelle est la valeur moyenne de f sur $[0\,;3]$?
4. Quelle a été la somme totale transférée à la fin des trois minutes (à un euro près) ?

Partie C

Au cours des trois minutes, la somme d'argent transférée en fonction du temps écoulé (exprimée en milliers d'euros) est représentée par la fonction g définie par :

$$g(t) = 20 - 20\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad \text{avec } t \in [0\ ;\ 3].$$

1. Étudier les variations de g.
2. Tracer la courbe représentative de g et la tangente au point d'abscisse 0 dans le repère précédent.
3. On veut savoir à partir de quel instant t_0 il y a eu au moins 18 000 euros transférés.

   a. Donner un encadrement d'amplitude 0,1 de t_0 en utilisant le graphique.

   b. Résoudre l'inéquation $g(t) \geqslant 18$. En déduire une expression de la valeur exacte de t_0 et sa valeur approchée à une seconde près par excès.

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

En l'absence d'indications spécifiques, les résultats seront arrondis à 10^{-2} *près. On effectuera les calculs statistiques à l'aide de la calculatrice. Aucun détail n'est alors demandé.*

Après injection d'une substance médicamenteuse, un laboratoire de recherche mesure l'évolution de la quantité de cette substance dans le sang d'un individu.
Après une série de mesures, on obtient les résultats donnés dans le tableau indiqué en annexe (document 1), où x désigne le temps écoulé depuis l'injection (exprimé en minutes) et y désigne la quantité de substance (exprimée en dixièmes de grammes par litre). Le nuage de points correspondant est indiqué sur le document 2 de la feuille annexe.
Les mesures réalisées pour $x = 10$ et $x = 60$ ayant été plusieurs fois vérifiées, on juge que les points A et B sont fiables. On se propose de modéliser ce nuage à l'aide de la courbe représentative d'une fonction, afin de réaliser une prévision sur les points d'abscisses 50 et 70 pour lesquels les mesures n'ont pas été effectuées.
Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

1. On propose un premier modèle d'ajustement du nuage par une courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = a\ln(x) + b$, et on impose à la courbe de passer par les points A et B.

   a. Déterminer alors les réels a et b.

   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur la feuille annexe (document 2).

   c. Prévoir, à l'aide de ce premier modèle, les quantités mesurables pour $x = 50$ et $x = 70$.

2. Dans cette question, on détermine un deuxième modèle d'ajustement du nuage.

   a. Compléter le tableau (document 3) qui figure sur la feuille annexe avec des résultats arrondis à 10^{-3} près. Calculer alors le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(t,\ y)$. Un ajustement affine paraît-il alors envisageable ?

   b. Déterminer une équation de la droite de régression de y en t par la méthode des moindres carrés.

   c. Montrer que ce second modèle conduit à des prévisions de y, pour $x = 50$ et $x = 70$, égales à 2,70 et 1,04 respectivement.

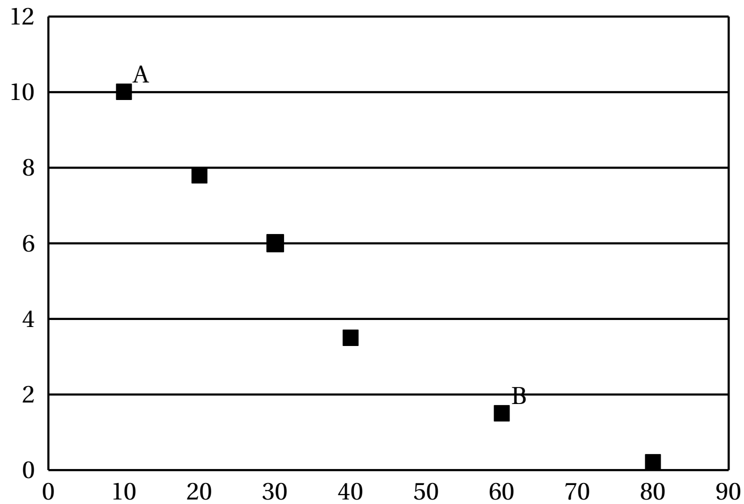
3. Une autre équipe de recherche a effectué les mesures pour $x = 50$ et $x = 70$ dans les mêmes conditions et a obtenu respectivement $y = 2,4$ et $y = 0,6$. Quel modèle doit-on préférer pour ajuster ce nuage ?

ANNEXE
Feuille à rendre avec la copie
Exercice 1

Tableau des coordonnées des points du nuage (document 1) :

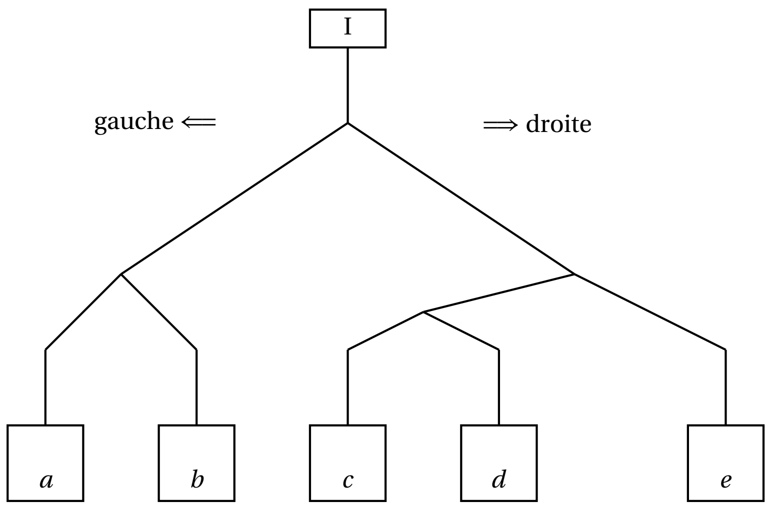
x	10	20	30	40	60	80
y	10	7,8	6	3,5	1,5	0,2

Nuage de points (document 2) :



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



On considère le circuit de billes schématisé par la figure ci-dessus. Un joueur lâche une bille en I et on admet qu'à chaque bifurcation la bille prend la direction gauche avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.

1. Réaliser un arbre pondéré modélisant cette expérience aléatoire.

2. **a.** Utiliser cet arbre pour déterminer les probabilités des évènements élémentaires suivants, sous forme de fractions irréductibles :

A : « La bille arrive en a » ;

B : « La bille arrive en b » ;

C : « La bille arrive en c » ;

D : « La bille arrive en d » ;

E : « La bille arrive en e ».

Vérifier que la probabilité de l'évènement D est $\frac{9}{64}$.

b. Parmi les évènements précédents, quel est l'évènement le moins probable ? Le plus probable ?

3. Le joueur gagne 48 points si la bille arrive en a, 16 points si elle arrive en b et 64 points si elle arrive en c. Il ne gagne rien si la bille arrive en d et il perd 32 points si elle arrive en e.

a. On note X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus : ainsi si la bille arrive en e, on a $X = -32$. En utilisant les résultats de la deuxième question, donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer alors $\text{E}(X)$, espérance mathématique de X. Le joueur a-t-il intérêt à jouer ?

c. L'organisateur du jeu se doit de proposer un jeu équitable (c'est-à-dire tel que $\text{E}(X) = 0$). Pour cela il décide de modifier le nombre de points perdus si la bille arrive en e. Quel nombre de points perdus doit-il choisir pour que $\text{E}(X) = 0$?

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme

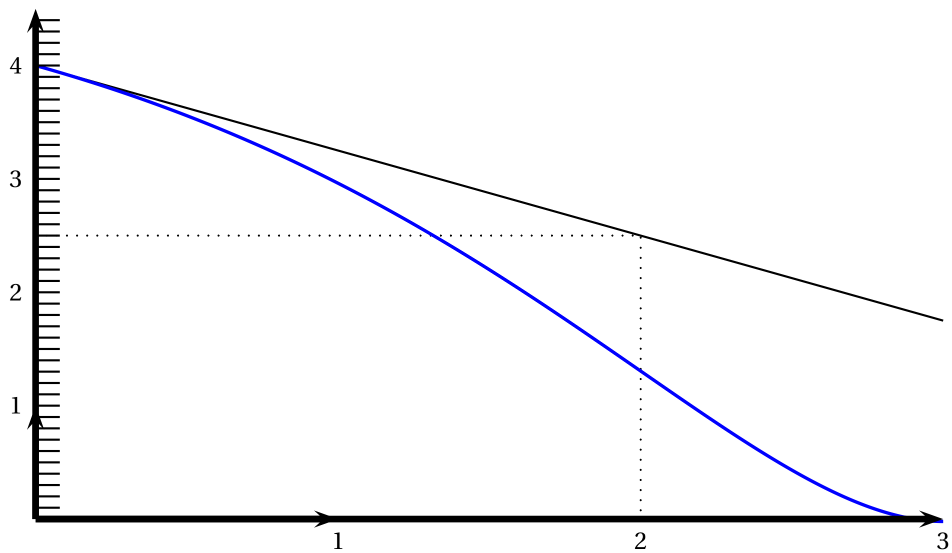
$$f(x) = k + \frac{1}{4}(ax+b)\mathrm{e}^x,$$

où a, b et k sont des nombres réels que l'on se propose de déterminer dans la **partie A**.

Partie A

Sur la figure ci-dessous, on peut lire la représentation graphique de la fonction f obtenue sur l'intervalle $[0\,;\,3]$ à l'aide d'un logiciel de tracé ou d'une calculatrice graphique. On précise que :

- A est le point de la courbe d'abscisse 3,
- Au point A, la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses,
- Le point B(0 ; 4) est un point de la courbe,
- La droite (BC) est tangente à la courbe au point B, avec C (2 ; 2,5).



1. Déterminer une équation de la droite (BC).
2. Donner les valeurs des nombres $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(3)$.
3. Calculer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a, b et k, f' désignant la fonction dérivée de f.
4. Déduire des résultats des questions **2.** et **3.** les valeurs des réels a, b et k. Vérifier que pour tout x réel : $f(x) = 5 + \frac{1}{4}(x-4)\mathrm{e}^x$.

Partie B

On étudie maintenant la fonction f définie par : $f(x) = 5 + \frac{1}{4}(x-4)\mathrm{e}^x$ sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Calculer $f(3)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près. Confronter ce résultat à la figure de la première partie.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = (5 - \mathrm{e}^x) + \frac{1}{4}x\mathrm{e}^x$ et en déduire la limite de f en $-\infty$ (on rappelle que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$). Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?

3. **a.** Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
   b. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe la droite Δ, d'équation $y = 5$, en un point E dont on précisera les coordonnées.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ (unités graphiques : 1 cm sur $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\right)$ et 2 cm sur $\left(\text{O}\,;\,\vec{\jmath}\right)$.
5. En utilisant une observation graphique et la remarque de la question **1** de la **partie B**, indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ (on ne demande pas de résoudre cette équation mais il faut justifier succinctement la réponse).

Partie C

1. Vérifier graphiquement que, pour tout réel x dans l'intervalle $[-2\,;\,2]$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 5.$$

2. Démontrer que la fonction g, définie par $g(x) = (x-1)\text{e}^x$, est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h : x \mapsto x\text{e}^x$.
3. **a.** Vérifier que, pour tout réel x, on a : $5 - f(x) = \text{e}^x - \dfrac{1}{4}x\text{e}^x$.
   b. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe et les droites d'équations $x = -2,\ x = 2$ et $y = 5$. On hachurera ce domaine sur le graphique et on donnera un résultat exact, puis approché à 10^{-2} près.

Baccalauréat ES Antilles-Guyane juin 2002

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

On rappelle que l'euro est la nouvelle monnaie en usage en France.
Le tableau ci-dessous donne l'évolution du SMIC horaire converti en euros de 1995 à 2002.

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
SMIC horaire en euros y_i	5,64	5,78	6,01	6,13	6,21	6,41	6,67

(Source : INSEE)

1. Calculer le pourcentage d'évolution du SMIC horaire entre les années 1995 et 2001 (le résultat sera arrondi au centième)
2. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 10 cm pour 1 euro sur l'axe des ordonnées ; les graduations commencent à 0 sur l'axe des abscisses et à 5 sur l'axe des ordonnées)
3. Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés et les résultats seront donnés au millième.

   Le nuage de points montre qu'un ajustement affine est justifié.

   Donner une équation de la droite de régression D de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Représenter la droite D dans le repère précédent.
4. Calculer, avec cet ajustement affine, le montant du SMIC horaire en euros que l'on peut prévoir en 2005 (résultat arrondi au centième)
5. On envisage un autre modèle pour prévoir l'évolution du montant du SMIC horaire. On suppose qu'à partir de l'année 2001, le SMIC horaire progressera de 2 % par an. On désigne par u_n le montant du SMIC horaire, en euros, de l'année $(2001+n)$. On a donc $u_0 = 6,67$.

   a. Calculer le montant du SMIC horaire en 2005 (résultat arrondi au centième)

   b. À partir de quelle année le SMIC horaire aura-t-il dépassé 10 euros ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Lors d'une enquête réalisée auprès de familles d'une région, concernant leur habitation principale, on apprend que 55 % des familles interrogées sont propriétaires de leur logement, 40 % en sont locataires et enfin 5 % occupent leur logement gratuitement (ces familles seront appelées dans la suite de l'exercice « occupant à titre gratuit ».)
Toutes les familles interrogées habitent soit une maison individuelle , soit un appartement ; toute habitation ne contient qu'une seule famille.
60 % des propriétaires habitent une maison individuelle, 80 % des locataires habitent un appartement et enfin 10 % des occupants à titre gratuit habitent une maison individuelle.
On interroge au hasard une famille de la région et on note :

A l'évènement : « la famille habite un appartement » ;
L l'évènement : « la famille est locataire » ;
P l'évènement : « la famille est propriétaire » ;
G l'évènement : « la famille est occupant à titre gratuit ».
On notera $p(\text{E})$ la probabilité de l'évènement E. L'évènement contraire de E sera noté $\overline{\text{E}}$.
$p(\text{E}/\text{F})$ désignera la probabilité conditionnelle de l'évènement E par rapport à l'évènement F.

1. **a.** Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes : $p\left(\overline{\text{A}}/\text{P}\right)$, $p(\text{A}/\text{L})$ et $p\left(\overline{\text{A}}/\text{G}\right)$.
   b. Construire un arbre pondéré résumant la situation.
2. Calculer la probabilité de l'évènement : « la famille est propriétaire et habite un appartement ».
3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,585
4. On interroge au hasard une famille habitant un appartement. Calculer la probabilité pour qu'elle en soit le propriétaire.
5. On interroge trois familles de la région, le choix de ces familles se faisant aléatoirement et de manière indépendante.
   Calculer la probabilité d'interroger trois familles habitant un appartement.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

La courbe de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln x$$

est donnée ci-après.
On considère la suite (u_n) à termes strictements positifs (admis) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 7 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$$

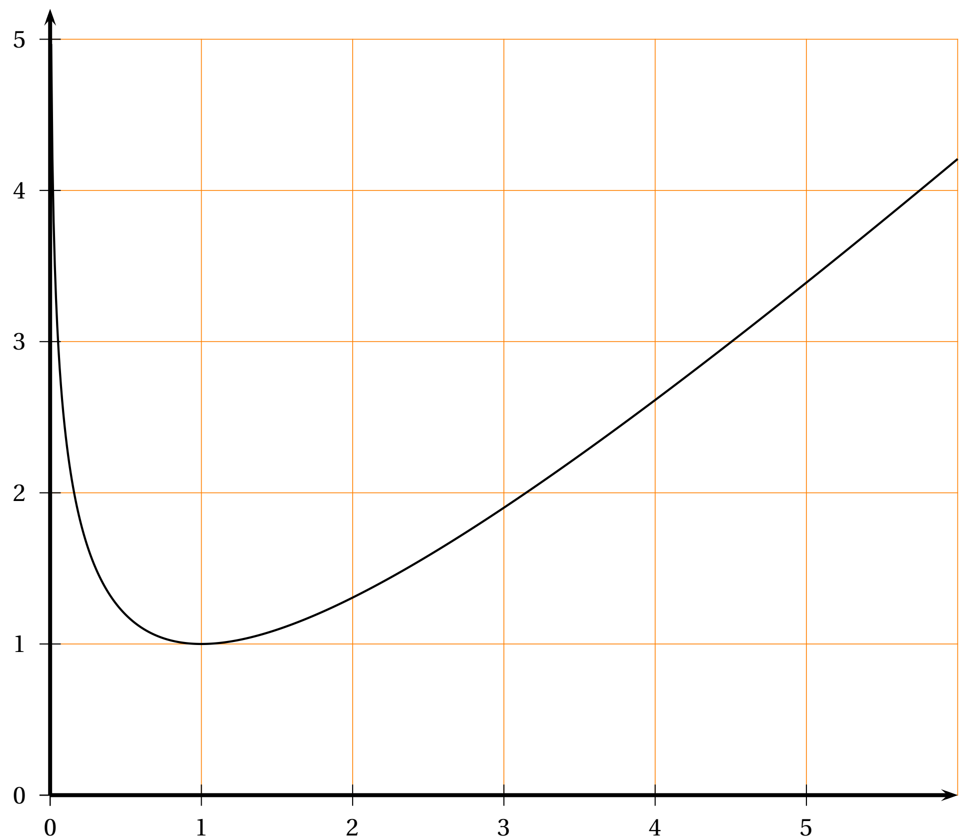
Partie A

1. Au moyen du graphique donné ci-dessous, déterminer le minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et en déduire que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 1$.
2. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n.
   Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Partie B

1. Construire dans le repère de la courbe $(\mathscr{C})$ donné ci-dessous la droite d'équation $y = x$.
2. En vous aidant de la droite (D), représenter sur l'axe des abscisses du graphique ci-dessous les cinq premiers termes de la suite (u_n).
3. Quelle conjecture peut-on faire en ce qui concerne la limite de la suite (u_n) ?

Graphique de f



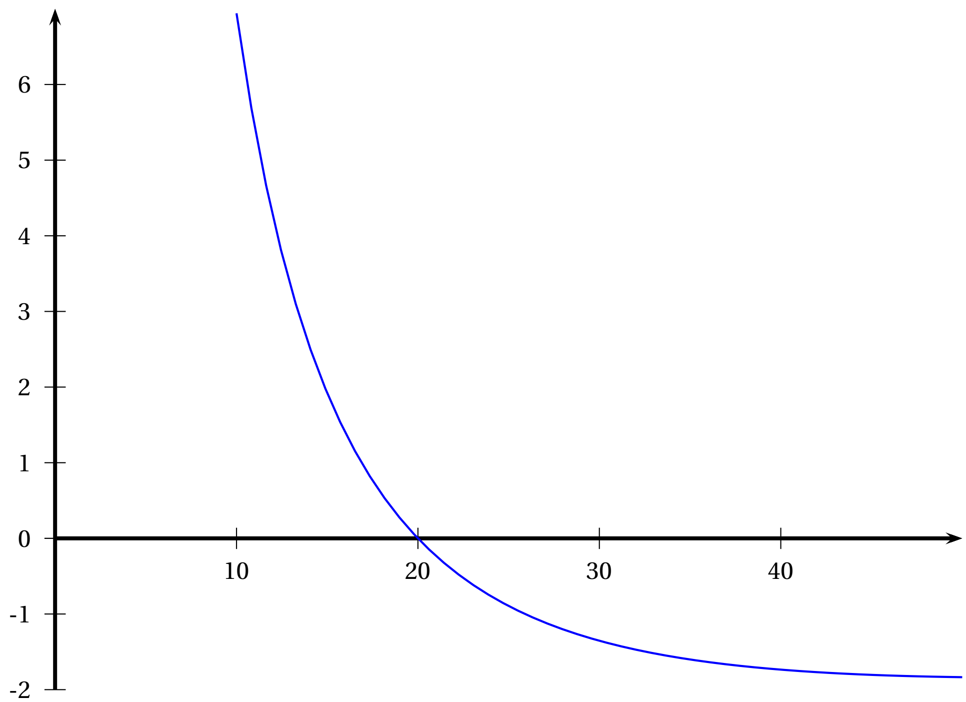
PROBLÈME **11 points**

Le but de ce problème est d'étudier des fonctions utiles pour modéliser des situations en économie : seuil de rentabilité, bénéfice maximum, etc.
On rappelle que l'euro est la nouvelle monnaie en usage en France.

Première partie

On considère la fonction g donnée sur I = $[10\,;\,50]$ par sa représentation graphique et le tableau de valeurs ci-dessous :

x	10	20	50
$g(x)$	7	0	$-1,8$



1. En utilisant les données de l'énoncé, préciser le signe de $g(x)$ sur I.
2. Soit G une primitive de g sur I.
   a. Quelle est la particularité de la courbe représentative de G au point d'abscisse 20 ?
   b. L'une des trois courbes données en annexe est représentative de la fonction G. Déterminer laquelle en donnant toutes les justifications.

Deuxième partie

Soit f la fonction définie sur I =[1 ; 20] par

$$f(x) = \frac{100}{x} \times (3 - \ln x).$$

1. **a.** Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f sur I.
   b. Montrer que $f'(x) = \dfrac{100}{x} \times (\ln x - 4)$.
2. Étudier le signe de f' sur I. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. Calculer $f(\mathrm{e}^3)$. En déduire le signe de f sur I.
4. Soit la fonction F définie sur I par $F(x) = -50(\ln x - 3)^2 + 30$.
   a. Montrer que F est une primitive de f sur I
   b. En déduire le tableau de variation de la fonction F.
5. Donner des raisons qui permettent de considérer la fonction g de la première partie comme une bonne approximation de la fonction f.

Troisième partie

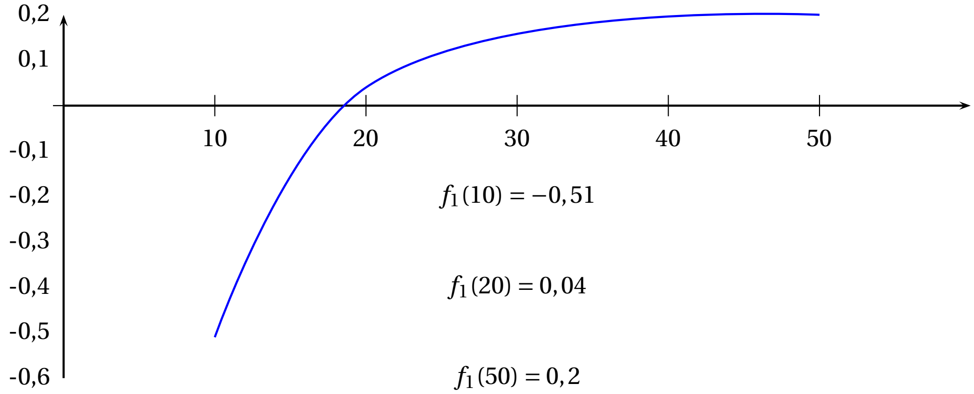
La société Dumoulin, qui fournit des hangars préfabriqués pour l'industrie peut en produire jusqu'à 50 par mois.
Son bénéfice, pour q unités produites (q entier entre 10 et 50) est donné par :

$$B(q) = -50(\ln q - 3)^2 + 30 \quad \text{en milliers d'euros.}$$

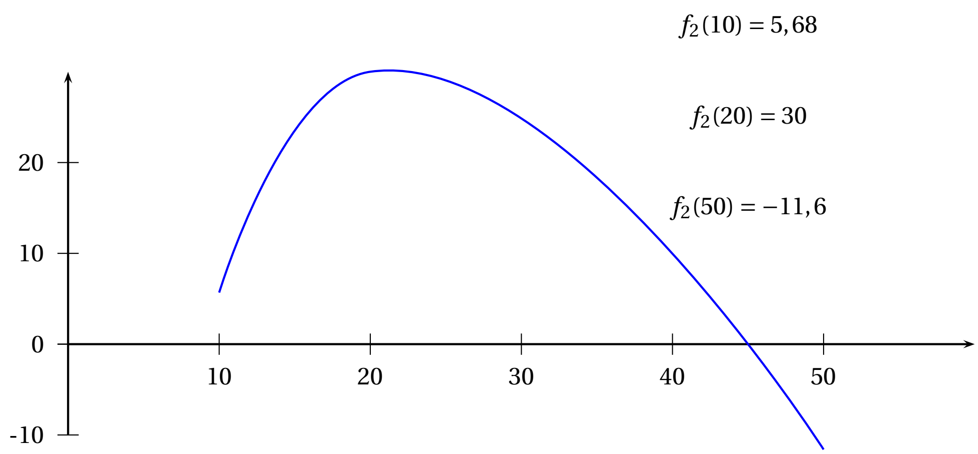
1. À partir des études précédentes, ou de la calculatrice, déterminer l'ensemble des valeurs de q qui permettent d'obtenir un résultat positif.
2. Déterminer la valeur de q qui permet d'obtenir un bénéfice maximum. Préciser ce bénéfice maximum.

Annexe

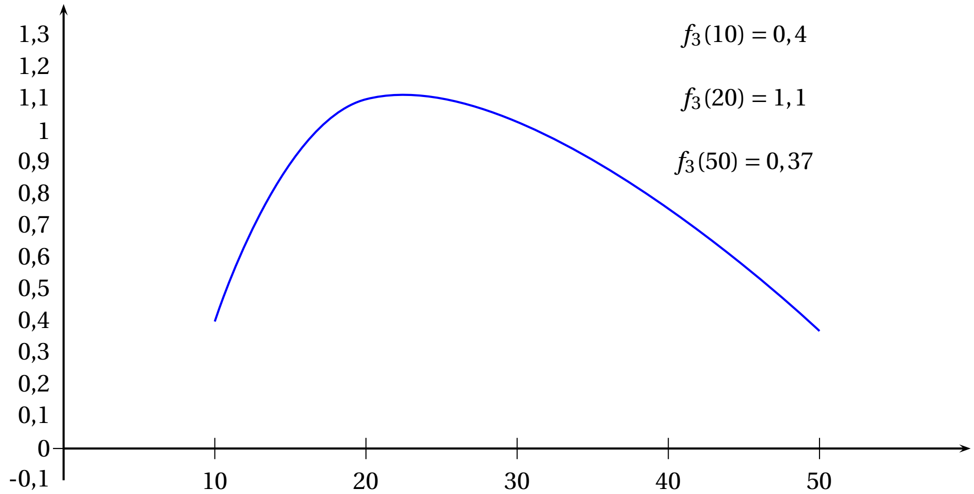
Courbe numéro 1



Courbe numéro 2



Courbe numéro 3



On rappelle que l'euro est la nouvelle monnaie en usage en France.

Un dé à 6 faces a été testé sur un grand nombre de lancers. On a obtenu les résultats partiels suivants pour chaque face :

Face	1	2	3	4	5	6
Fréquence	a	0,15	0,10	0,10	0,15	b

Par la suite, on assimile ces fréquences aux probabilités des évènements correspondants.

1. **a.** Montrer que $a + b = 0,5$.

b. On considère la variable aléatoire égale au numéro de la face obtenue ; sachant que son espérance mathématique est égale à 3,75 quelle relation doivent vérifier a et b ?

c. En déduire que $a = 0,2$ et $b = 0,3$.

2. On lance le dé. Calculer la probabilité de l'évènement : « on obtient un numéro impair ».

3. Un joueur lance le dé trois fois de suite. Les lancers sont indépendants les uns des autres. Chaque nombre impair apparu lui fait gagner 10 euros et chaque nombre pair lui fait perdre 10 euros. On note Y la variable aléatoire égale au gain obtenu (positif ou négatif).
Tous les résultats seront arrondis au millième.

a. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de lancers donnant un nombre impair. Établir la loi de probabilité de X.

b. Quelles sont les valeurs possibles pour Y ?

c. Établir la loi de probabilité de Y.

d. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(Y)$. Ce jeu est-il favorable au joueur ?

Baccalauréat ES Asie juin 2002

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Une statistique publiée en l'an 1998 donne le nombre d'abonnés à internet dans le monde, à la fin de l'année indiquée :

Année	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3
Nombre d'abonnés en millions : y_i	26	55	101	150

Pour tout l'exercice, les détails des calculs statistiques ne sont pas demandés.

1. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique $(x_i ; y_i)$.
(Prévoir sur l'axe des y des graduations jusqu'à 500).
2. Des prévisions ont été réalisées pour les années 1999, 2000 et 2001 à l'aide d'un ajustement affine par la méthode des moindres carrés.
   a. Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x, les coefficients étant arrondis au dixième. Tracer cette droite sur le graphique.
   b. Calculer avec cet ajustement les prévisions p, q et r du nombre d'abonnés à internet pour les années 1999, 2000 et 2001.
3. Le nombre d'abonnés à internet pour les années 1999 et 2000 est maintenant connu, on obtient le nouveau tableau :

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre d'abonnés en millions : y_i	26	55	101	150	248	407

   a. Placer les nouveaux points sur le graphique. L'ajustement choisi à la question **2** ne paraît plus pertinent ; on essaie donc un autre ajustement.
   b. Pour cela, on pose $z_i = \ln(y_i)$.
   Calculer, arrondies au centième, les valeurs $z_i = \ln(y_i)$ pour i entier variant de 0 à 5, et les présenter dans un tableau. Donner une équation de la droite d'ajustement affine de z en x, les coefficients étant arrondis au centième.
   c. En déduire l'ajustement : $y = 30\mathrm{e}^{0,53x}$.
   d. Calculer avec cet ajustement la nouvelle prévision r' pour l'année 2001.
   Quelle serait, avec ce deuxième ajustement, la prévision pour 2002 en millions d'abonnés ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Une entreprise vend des calculatrices d'une certaine marque. Le service après-vente s'est aperçu qu'elles pouvaient présenter deux types de défaut, l'un lié au clavier et l'autre lié à l'affichage.
Des études statistiques ont permis à l'entreprise d'utiliser la modélisation suivante :
La probabilité pour une calculatrice tirée au hasard de présenter un défaut de clavier est égale à 0,04.

En présence du défaut de clavier, la probabilité que la calculatrice soit en panne d'affichage est de 0,03.
Alors qu'en l'absence de défaut de clavier, la probabilité de ne pas présenter de défaut d'affichage est de 0,94.
On note C l'évènement : « la calculatrice présente un défaut de clavier », A l'évènement « la calculatrice présente un défaut d'affichage ». On notera $p(\text{E})$ la probabilité de l'évènement E. L'évènement contraire de E sera noté $\overline{\text{E}}$.
$p_{\text{F}}(\text{E})$ désignera la probabilité conditionnelle de l'évènement E par rapport à l'évènement F.
Dans cet exercice, les probabilités seront écrites sous forme de nombres décimaux arrondis au millième.

1. **a.** Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes :

$$p_{\overline{\text{C}}}(\text{A}),\ p_{\text{C}}(\text{A}) \quad \text{et} \quad p(\text{C}).$$

   b. Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.
2. On choisit une calculatrice de cette marque au hasard.
   a. Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente les deux défauts.
   b. Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de clavier.
   c. En déduire $p(\text{A})$.
   d. Montrer que la probabilité de l'évènement « la calculatrice ne présente aucun défaut » arrondie au millième est égale à 0,902.
3. Un client choisit au hasard trois calculatrices de cette marque.
   a. Calculer la probabilité pour que les trois calculatrices ne présentent aucun défaut.
   b. Calculer la probabilité pour qu'au moins une calculatrice ait un défaut.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

On rappelle que l'euro, est la nouvelle monnaie en usage en France.
Les résultats numériques seront donnés arrondis à l'unité.
En janvier 2002, un artisan a réalisé une recette de 2 300 euros alors que ses coûts se sont élevés à 800 euros. Son bénéfice est donc de 1 500 euros. Grâce à une clientèle en augmentation, la recette, c'est-à-dire le chiffre d'affaires de cet artisan, augmente de 1 % tous les mois.
Cependant les coûts, c'est-à-dire les frais, augmentent pendant le même temps de 2,5 %.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	janvier 2002	février 2002	mars 2002
Rang du mois	0	1	2
Recette	2 300		
Coûts	800		
Bénéfice	1 500		

2. Pour le mois de rang n, avec n entier naturel, on note R_n le montant de la recette, C_n le montant des coûts et B_n le montant du bénéfice.
   a. Exprimer R_n et C_n en fonction de n ; justifier votre réponse.
   b. Montrer que $B_n = 2300 \times (1,01)^n - 800 \times (1,025)^n$.

3. Pour étudier le sens de variations de la suite (B_n), on étudie le signe de $B_{n+1} - B_n$.

a. Établir que, pour tout entier positif n,

$$B_{n+1} - B_n = 23 \times (1,01)^n - 20 \times (1,025)^n.$$

b. Établir que :

$$23 \times (1,01)^n - 20 \times (1,025)^n > 0 \quad \text{équivaut à} \quad \left(\frac{1,025}{1,01}\right)^n < \frac{23}{20}.$$

En déduire les valeurs de n telles que l'inégalité $B_{n+1} - B_n > 0$ soit vérifiée. Que peut-on dire de la suite (B_n) dans ce cas ?

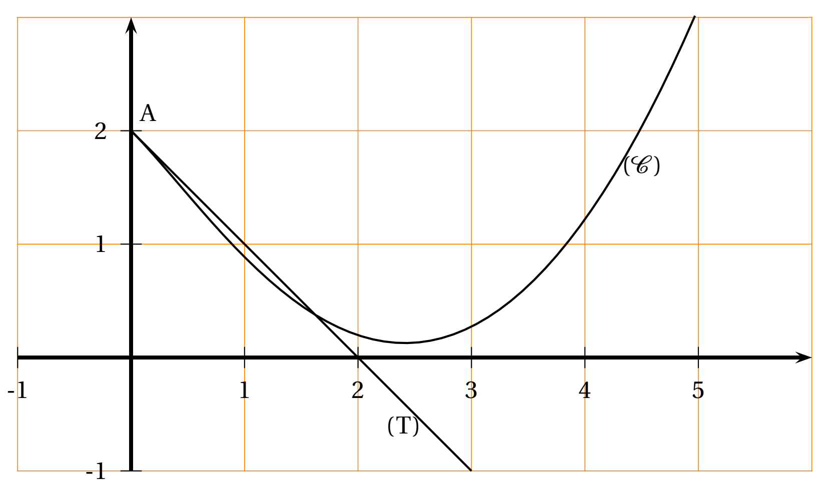
4. Le bénéfice de cet artisan peut-il diminuer ? Si oui, à partir de quel mois obtiendra-t-il une baisse par rapport au mois précédent ?

PROBLÈME **10 points**

On rappelle que l'euro est la nouvelle monnaie en usage en France.
Le but du problème est d'étudier le coût marginal et le coût total de production d'un produit dans une entreprise.
L'objet de la **partie A** est de déterminer une fonction h satisfaisant à des conditions données.
L'objet de la **partie B** est l'étude de propriétés d'une fonction f.
L'objet de la partie **C** est d'utiliser certains résultats de la **partie A** pour répondre à des questions d'ordre économique.

Partie A

La courbe $(\mathscr{C})$, donnée ci-dessous, est la courbe représentative d'une fonction h définie sur $[0 ; +\infty[$.
Le point A a pour coordonnées $(0 ; 2)$. La droite (T) est tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.



1. Préciser $h(0)$.
Déterminer à l'aide d'une lecture graphique le nombre dérivé $h'(0)$. (Justifier la réponse).

2. La fonction h, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ est de la forme :

$$h(x) = ax^2 + bx + c + 2\ln(x+1) \quad \text{où} \quad a,\ b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

On note h' la dérivée de la fonction h. Exprimer $h'(x)$ en fonction de a et b.

3. On donne $h'(3) = \dfrac{1}{2}$.
En utilisant ce résultat et les résultats de la question **1** déterminer chacune des valeurs $a,\ b$ et c.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\text{I} = [0\ ;\ 5]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 2 + 2\ln(x+1).$$

1. **a.** Calculer la dérivée f' de la fonction f.

b. Montrer que pour tout x de l'intervalle I :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x+1}.$$

c. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle I.

d. En déduire les variations de f sur $[0\ ;5]$.

2. Soit g la fonction définie sur I par :

$$g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x.$$

a. Calculer la dérivée de la fonction g.

b. En déduire une primitive de la fonction f sur I.

c. Calculer la valeur exacte, puis la valeur approchée à 10^{-3} près, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie C

Sur l'intervalle $[0\ ;5]$, la fonction f de la partie précédente représente le coût marginal de productioi un liquide conditionné en flacons d'un litre, en fonction de la quantité produite.
On rappelle que le coût marginal de production est assimilé à la dérivée du coût total.
x représente le volume en milliers de litres, x variant sur l'intervalle $[0\ ;5]$;
$f(x)$ représente le coût marginal en milliers d'euros.

1. Quel est le coût marginal en euros, du 3 000$^{\text{e}}$ litre produit ?

2. Pour quelle quantité produite le coût marginal est-il minimum ? (donner la valeur au litre près).

3. Les coûts fixes sont de 1 000 euros.

a. Montrer, en utilisant le résultat de la **partie B**, question **2. b**, que le coût total est donné par l'expression définie sur $[0\ ;5]$ par :

$$C(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2(x+1)\ln(x+1) + 1.$$

b. Calculer $C(5) - C(0)$ à un euro près et interpréter en termes de coût cette différence.
Comparer ce résultat à celui à la **partie B** question **2. c** et expliquer cette réponse.

Baccalauréat ES Centres étrangers I juin 2002

Calculatrice autorisée

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les détails des calculs effectués à la calculatrice ne sont pas demandés.
Sauf indication contraire, les valeurs obtenues seront données sous forme décimale arrondie à 10^{-2} *près.*

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'une petite ville proche d'une métropole en pleine expansion.

Année	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Rang de l'année (x_i)	0	5	10	15	20	25	30	35
Population (y_i)	5 400	5 600	7 000	8 000	8 750	11 200	13 900	15 000

1. Le plan est rapporté à un repère orthogonal :

- Sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour 5 années ;
- Sur l'axe des ordonnées, on placera 5 000 à l'origine et on choisira 1 cm pour 1 000 habitants.

a. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$.

b. Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série statistique $(xi\ ;\ y_i)$ et placer ce point sur le graphique.

c. Déterminer l'équation de la droite $\mathcal{D}$ d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer $\mathcal{D}$ sur le graphique précédent.

d. En supposant que ce modèle reste pertinent jusqu'en 2020, quelle serait la population de cette ville, à une unité près, en 2020 ?

2. **a.** Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant :

Rang de l'année (x_i)	0	5	10	15	20	25	30	35
$z_i = \ln(y_i)$								

b. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x_i\ ;\ z_i)$.

c. Déterminer l'équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés.

d. En supposant que ce second modèle reste pertinent jusqu'en 2020, donner une nouvelle prévision, à une unité près, de la population de cette ville en 2020.

3. Les crédits alloués par l'État aux municipalités étant proportionnels au nombre d'habitants, quel modèle permet la prévision la plus favorable aux finances de la ville en 2020 ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Un jeu consiste à lancer de la main gauche, une balle dans un seau. Parmi l'ensemble des joueurs, $\frac{5}{6}$ sont droitiers et $\frac{1}{6}$ sont gauchers.

Pour un joueur droitier, la probabilité de mettre la balle dans le seau est $\frac{1}{4}$.

Pour un joueur gaucher, cette probabilité est $\frac{1}{2}$.

1. On choisit au hasard un individu dans cette population. On note :
G l'évènement « l'individu choisi est gaucher »,
S l'évènement « l'individu met la balle dans le seau ».

a. Déterminer la probabilité de l'événement G $\cap$ S.

b. Calculer la probabilité de l'évènement S.

c. Calculer la probabilité que la personne choisie soit droitière, sachant qu'elle a mis la balle dans le seau.

2. Dans cette question on a sélectionné Paul qui est un joueur droitier. Il lance deux balles l'une après l'autre ; on suppose les deux lancers indépendants.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de balles dans le seau après les deux lancers.

a. Déterminer les valeurs prises par X

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 6 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}u_n + 2 \end{array}\right.$$

On pose $v_n = u_n - 3$.

1. **a.** Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme v_0 et la raison.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. Déduire, en utilisant la question précédente, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2. On constate que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, v_n est strictement positif et on pose $w_n = \ln v_n$.
Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

3. **a.** Exprimer w_n en fonction de n.

b. Pour quelle valeur de n a-t-on : $w_n = -\ln\left(27^3\right) - \ln 9$?

PROBLÈME **10 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (ax+b)\text{e}^{cx}, \text{ où } a,\ b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Calculer a, b et c pour que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$, par le point B$(0\,;\,1)$ et qu'elle admette en B une tangente ayant un coefficient directeur égal au nombre 1.

2. On supposera désormais que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

   a. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote pour $\mathscr{C}$.

   b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ et en déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que, sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 2\right]$, l'équation $f(x) = 1$ a une solution unique α.

   Donner la valeur décimale arrondie à 10^{-1} de α.

5. Écrire une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point B.

6. Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

Partie B

On donne la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = (-2x-3)\mathrm{e}^{-x} + 3.$$

1. Montrer que F est la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui s'annule pour $x = 0$.

2. Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 1$.

   Donner une valeur approchée de cette aire à 10^{-2} près.

Baccalauréat ES Métropole juin 2002

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les résultats numériques seront obtenus à l'aide de la calculatrice ; aucun détail des calculs statistiques n'est demandé.

Le tableau suivant donne la dépense, en millions d'euros, des ménages en produits informatiques (matériels, logiciels, réparations) de 1990 à 1998.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Dépense y_i	398	451	423	501	673	956	1 077	1 255	1 427

Source INSEE

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ et le point moyen dans un repère orthogonal tel que 2 cm représentent une année en abscisse et 1 cm représente 100 millions d'euros en ordonnée (ainsi 398 sera représenté par 3,98 cm).

2. **a.** Donner la valeur arrondie à 10^{-3} du coefficient de corrélation linéaire de la série $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$. Un ajustement affine vous paraît-il justifié ?

b. Écrire une équation de la droite d'ajustement affine D de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3}). Représenter D dans le repère précédent.

c. En utilisant cet ajustement affine, donner une estimation de la dépense des ménages (arrondie à un million d'euros) en produits informatiques en 2000.

3. L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose $z_i = \ln y_i$.

a. Recopier et compléter le tableau suivant où z_i est arrondi à 10^{-3} :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
z_i	5,986	6,111	6,047	6,217					

b. Donner la valeur arrondie à 10^{-3} du coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i,\ z_i)$. Écrire une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3}).

c. En utilisant cet ajustement, donner une estimation de la dépense des ménages (arrondie à un million d'euros) en produits informatiques en 2000.

4. En 2000 les ménages ont dépensé 68,9 milliards d'euros pour la culture, les loisirs et les sports et 3,1 % de ces dépenses concernent les produits informatiques.

Avec lequel des deux ajustements l'estimation faite est-elle la meilleure ?

Quel est le salaire brut annuel moyen ?

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une école de commerce a effectué une enquête, en janvier 2000, auprès de ses jeunes diplômés des trois dernières promotions afin de connaître leur insertion professionnelle. À la première question, trois réponses et trois seulement sont proposées :
A « La personne a une activité professionnelle » ;
B « La personne poursuit ses études » ;
C « La personne recherche un emploi ou effectue son service national ».

On a constaté que 60 % des réponses ont été envoyées par des filles. Dans l'ensemble des réponses reçues, en a relevé les résultats suivants :
* 65 % des filles et 55 % des garçons ont une activité professionnelle ;
* 20 % des filles et 15 % des garçons poursuivent leurs études.

1. On prend au hasard la réponse d'un jeune diplômé.
   a. Montrer que la probabilité qu'il poursuive ses études est égale à 0, 18.
   b. Calculer la probabilité qu'il exerce une activité professionnelle.
2. On prend au hasard la réponse d'une personne qui poursuit ses études ; quelle est la probabilité que ce soit la réponse d'une fille (on donnera le résultat sous forme fractionnaire) ?
3. On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante trois réponses (on suppose que ce choix peut être assimilé à un tirage successif avec remise).
   À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité que l'une au moins des réponses soit celle d'un jeune diplômé poursuivant ses études.
4. Dans l'ensemble des réponses des jeunes diplômés exerçant une activité professionnelle, la répartition des salaires bruts annuels en milliers d'euros est la suivante :

Salaire brut annuel S	$20 \leqslant S < 22$	$22 \leqslant S < 26$	$26 \leqslant S < 30$	$30 \leqslant S < 34$	$34 \leqslant S < 38$	$38 \leqslant S < 40$
Pourcentage	5	15	28	22	20	10

Quel est le salaire brut annuel moyen ?

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Julie possède depuis plusieurs mois un téléphone mobile pour lequel elle a souscrit un forfait mensuel de deux heures. Soucieuse de bien gérer ses dépenses, elle étudie l'évolution de ses consommations.
Elle a constaté que :
• Si pendant le mois noté n elle a dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant noté $(n+1)$ est $\frac{1}{5}$.
• Si pendant le mois noté n elle n'a pas dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant est $\frac{2}{5}$.
Pour n entier naturel strictement positif, on désigne par A_n l'événement « Julie a dépassé son forfait le mois n » et par B_n l'événement contraire. On pose $p_n = p(\mathrm{A}_n)$ et $q_n = p(\mathrm{B}_n)$; on a $p_1 = \frac{1}{2}$.
Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. **a.** Donner les probabilités de A_{n+1} sachant que A_n est réalisé et de A_{n+1} sachant que B_n est réalisé.

b. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, les égalités suivantes sont vraies :

$$p\left(\mathrm{A}_{n+1} \cap \mathrm{A}_n\right) = \frac{1}{5}p_n \qquad \text{et} \qquad p\left(\mathrm{A}_{n+1} \cap \mathrm{B}_n\right) = \frac{2}{5}q_n.$$

En déduire que l'égalité suivante est vraie : $p_{n+1} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}p_n$.

2. Pour tout entier naturel $n > 1$ on pose : $u_n = p_n - \dfrac{1}{3}$.

Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_1.

3. Écrire u_n puis p_n en fonction de n. Déterminer la limite de (p_n).

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 3x + 3\right)\mathrm{e}^x - 4.$$

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 appartenant à $]\,1\ ;\ 2[$.

Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de x_0.

3. Déduire des résultats précédents le signe de $f(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty\,[$.

Partie B

Une entreprise fabrique un produit, en quantité x exprimée en tonnes, sa capacité de production ne pouvant dépasser 3 tonnes. Le coût total de fabrication de ce produit, en centaines de milliers d'euros, est donné par :

$$C_T(x) = (x - 3)\mathrm{e}^x + 3x + 4.$$

Le coût moyen est défini sur $]0\ ;\ 3]$ par la formule suivante :

$$C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x}.$$

1. Pour tout x de $]0\ ;\ 3]$ calculer $C'_m(x)$ et vérifier que l'égalité suivante est vraie : $C'_m(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.

En déduire le sens de variation de C_m sur $]0\ ;\ 3]$.

2. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimum ?

Quel est le coût moyen minimum (arrondi au millier d'euros) d'une tonne de ce produit ?

Partie C

Une tonne du produit fabriqué est vendue 300 000 euros ; toute la production est vendue.

1. a. Le bénéfice algébrique, en centaines de milliers d'euros, réalisé après la fabrication et la vente de x tonnes du produit est noté $B(x)$. Montrer l'égalité suivante : $B(x) = (3 - x)\mathrm{e}^x - 4$.

b. Étudier le sens de variation de B sur $[0\,;3]$.
Quelle est la production pour laquelle le bénéfice est maximum ?

2. **a.** Tracer la courbe représentative de B dans un plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 5 cm pour une tonne en abscisse et 2 cm pour 100 000 euros en ordonnée).

b. À l'aide du graphique, déterminer à 0,1 près les quantités à produire pour que l'entreprise réalise un gain.

Baccalauréat ES La Réunion juin 2002

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Jean-Paul, marathonien émérite, note ses temps de passage lors d'un entraînement :

Distances parcourues x_i en mètres	200	300	400	500
Temps de passage y_i en secondes	40	60	82	104

Pour les questions 1 et 2, les détails des calculs statistiques ne sont pas demandés.

1. **a.** Représenter sur papier millimétré, le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé à la série double, dans un repère orthogonal.
   On prendra pour unités : 1 cm pour 50 mètres sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 10 secondes sur l'axe des ordonnées.
   b. Calculer les coordonnées du point moyen G associé à cette série statistique et placer ce point sur le graphique.
2. Déterminer la valeur du coefficient de corrélation linéaire de la série double $(x_i\ ;\ y_i)$ (à 10^{-4} près).
   Peut-on envisager un ajustement affine ? Pourquoi ?
3. Pour effectuer des prévisions, Jean-Paul utilise la droite $\mathcal{D}$ de coefficient directeur 0,21 passant par le point G.
   a. Déterminer alors une équation de $\mathcal{D}$.
   b. Tracer $\mathcal{D}$ sur le graphique.
   c. Calculer le temps de passage prévisible aux 1 000 m.
   d. En fait, aux 1 000 m, Jean-Paul a un temps de passage de 220 secondes.
   Par rapport à la valeur reelle, calculer (à 0,01 près) le pourcentage d'erreur commise dans sa prévision de temps de passage aux 1 000 m.
4. Peu satisfait de ses prévisions sur des distances plus longues, Jean-Paul recherche pour la série ci-dessous un ajustement par une fonction trinôme du second degré :

Distances parcourues x_i en km	0	0,2	1
Temps de passage y_i en secondes	0	40	220

   a. Déterminer a, b, c pour que la parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$ passe par les trois points de ce nuage.
   b. Aux 2 000 m, Jean-Paul a un temps de passage de 8 minutes.
   Laquelle des deux méthodes d'ajustement permet la meilleure prévision ?

Exercice 2 **6 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

En annexe 1 est donnée la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f.
En annexe 2 est donnée la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative d'une fonction g.
L'unité est le cm.
La droite (T) est la tangente en A à $\mathcal{C}_f$.
La droite (T$'$) est la tangente en B $\mathcal{C}_g$.

1. **a.** Lire $f(0)$, $f(1)$, $f(5)$.

   b. La fonction f' étant la dérivée de la fonction f, donner, en jusfifiant, $f'(1)$ et $f'(5)$.

   c. Déterminer alors une équation de la droite (T).

   d. La fonction f étant définie par $f(x) = 3x - 8 + \dfrac{12}{x+1}$ calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par les droites d'équations $x = 0$, $x = 5$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

2. **a.** Lire $g(1)$, $g(4)$, $g(9)$.

   b. Donner en justifiant, $g'(9)$.

3. Soit u la fonction définie sur $[0\,;\,5]$ par $u(x) = (g \circ f)(x)$.

   a. Déterminer $u(0)$, $u(1)$ et $u(5)$.

   b. Calculer $u'(5)$.

   c. En utilisant le sens de variation de chacune des fonctions f et g donner le tableau de variations de la fonction u sur l'intervalle $[0 : 5]$.

Exercice 2 **6 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit (r_n) la suite définie, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par :

$$\begin{cases} r_1 & = & 0,6 \\ r_{n+1} & = & 0,5r_n + 0,4 \end{cases}$$

Soit (u_n) la suite définie, pour $n \geqslant 1$, par $u_n = r_n - 0,3$.

   a. Prouver que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5. Déterminer u_1.

   b. En déduire l'expression du terme général de (u_n) et de celui de (r_n) fonction de n.

   c. Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, la suite (r_n) a une limite que l'on calculera.

2. Amateur de jeux vidéo, Albert fait l'acquisition d'un jeu de voitures de course. Lors de son premier essai, il a seulement 6 chances sur 10 de terminer le circuit indemne.

S'il réussit le n-ième esai, sa probabilité de réussir l'essai suivant est 0,9.

S'il manque le n-ième essai, sa probabilité de réussir l'essai suivant est de 0,4.

Pour $n \geqslant 1$, on note p_n la probabilité de l'événement R_n « Albert réussit le n-ième essai ».

   a. À partir des données du texte, évaluer p_1, et les probabilités conditionnelles, suivantes : $p\left(\mathrm{R}_{n+1}/\mathrm{R}_n\right)$ et $p\left(\mathrm{R}_{n+1}/\overline{\mathrm{R}}_n\right)$.

   b. Déterminer en fonction de p_n, les probabilités suivantes : $p\left(\overline{\mathrm{R}}_n\right)$, $p\left(\mathrm{R}_{n+1} \cap \mathrm{R}_n\right)$ et $p\left(\mathrm{R}_{n+1} \cap \overline{\mathrm{R}}_n\right)$.

   c. En déduire que $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

   d. Que nous apprend sur le jeu la réponse à la question **1 c** ?

PROBLÈME **8 points**

L'objet de ce problème est de rechercher un coût moyen de production minimal, connaissant le coût marginal.

I - Des résultats préliminaires susceptibles d'être utilisés ensuite

1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 2x - 2 + \mathrm{e}^{-x}.$$

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Déterminer f' dérivée de f, ainsi que le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

c. Établir le tableau de variations de la fonction f.

d. Prouver que, dans $[0\,;\,1]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution α.

Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

e. En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$.

2. Montrer que la dérivée de la fonction $g\,:\,x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est la fonction $g'\,:\,x \longmapsto (1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

II - Recherche du coût total

Une usine fabrique un produit dont le coût marginal C **en milliers d'euros**, est donné par la formule :

$$C(x) = 3x^2 - 4x + 2 + (x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

x représentant la quantité de produit en centaines de grammes.
On rappelle que le coût marginal C peut être assimilé à la dérivée du coût total C_{T}.
Déterminer $C_{\mathrm{T}}(x)$ sachant que $C_{\mathrm{T}}(0) = 0$.

III

Pour une production de x **centaines de grammes** on appelle $C_m(x)$ le çoût moyen d'un **gramme**, en milliers d'euros. La fonction C_m est définie sur $[0\,;\,+\infty[$.

1. Prouver que $C_m(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2 - \mathrm{e}^{-x}}{100}$.

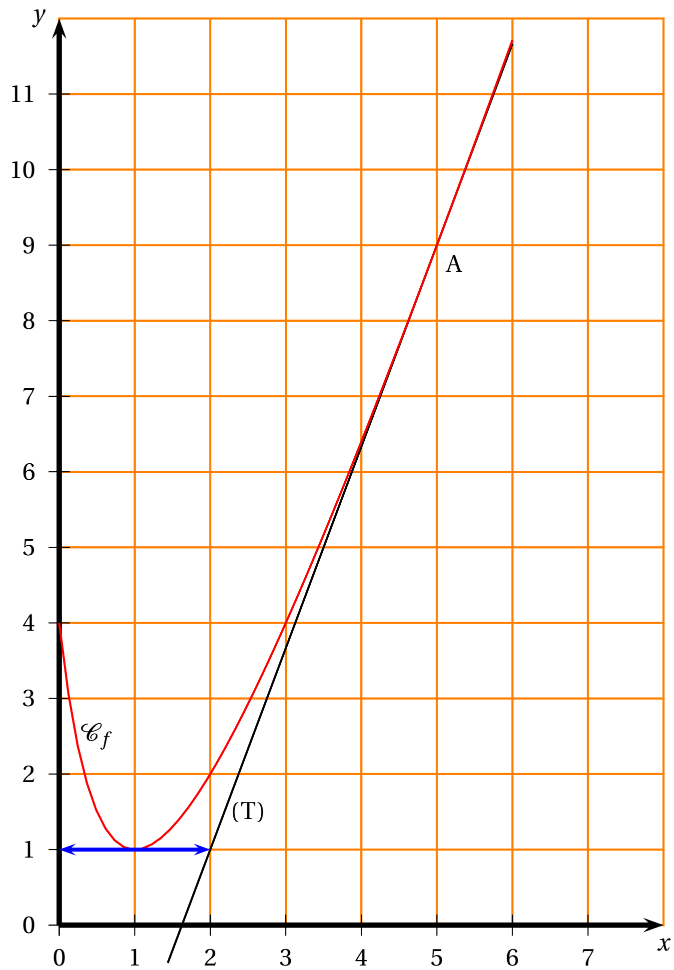
2. **a.** Calculer $C'_m(x)$ et prouver que $C'_m(x)$ et $f(x)$ ont le même signe.

b. En déduire les variations de C_m. On ne demande pas les calculs de limites.

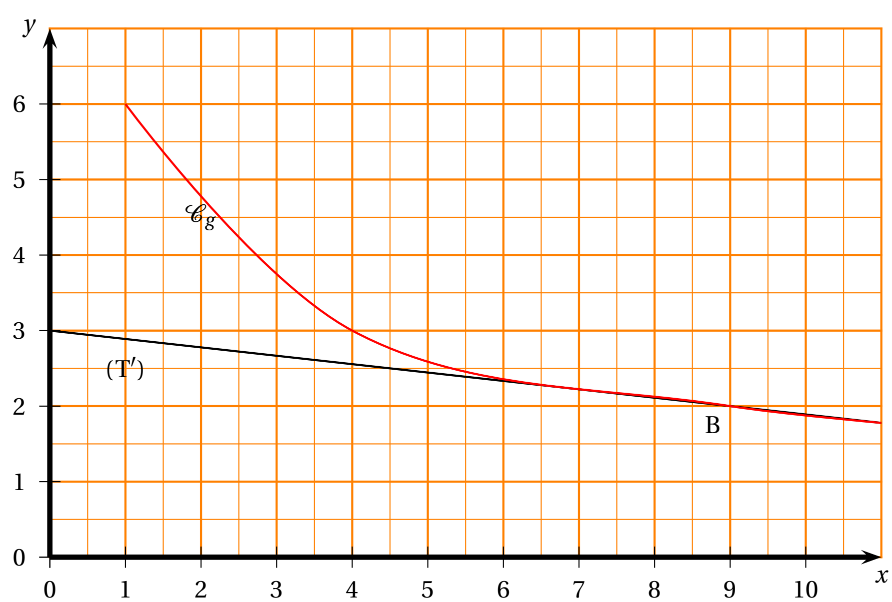
c. Donner une valeur approchée de la production donnant un coût moyen minimal.

d. Calculer, au centième près, le coût moyen en euros pour une production de 76 grammes.

ANNEXE 1



ANNEXE 2



Baccalauréat ES Liban juin 2002

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 4 cm), la courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$. La courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptotes les axes de coordonnées, passe par le point A$(1~;~0)$, par le point B$\left(\sqrt{\text{e}}~;~\dfrac{1}{2\text{e}}\right)$ et elle admet au point B une tangente horizontale.

1. En utilisant ces renseignements et une lecture graphique :

a. Donner le tableau de variations de f avec le signe de la dérivée et les limites aux bornes de l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

b. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2. On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

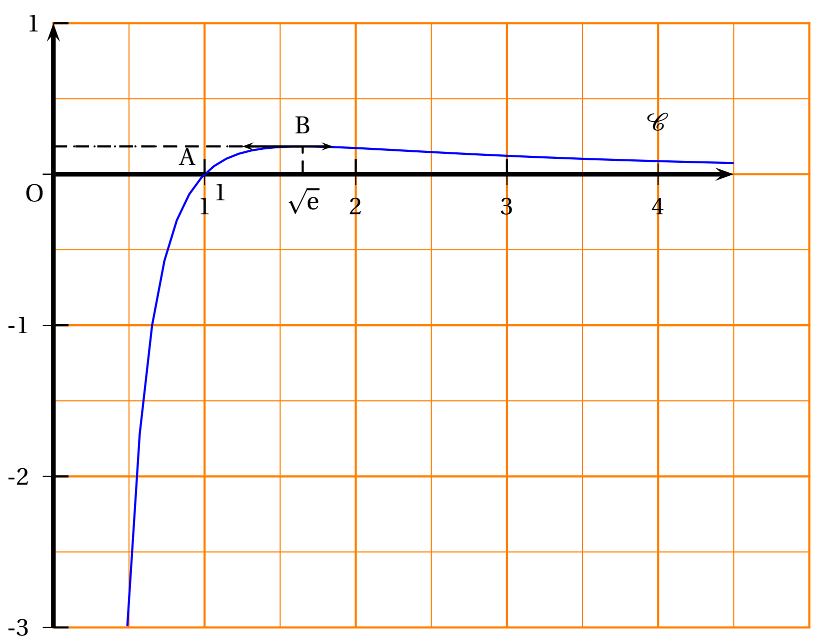
$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}.$$

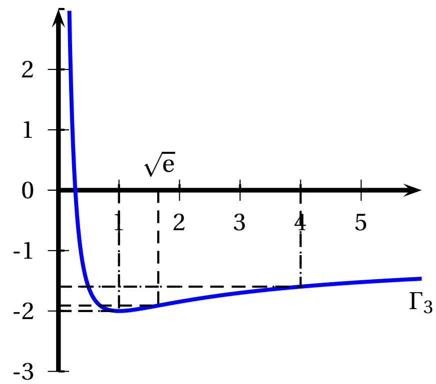
où f' désigne la fonction dérivée de f.

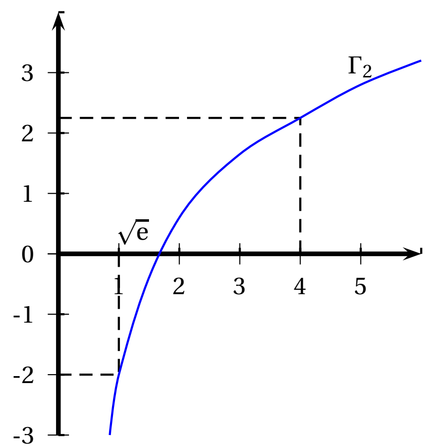
b. Étudier les variations de f.

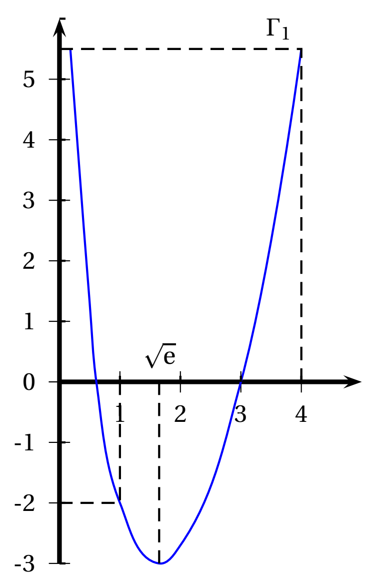


3. Soit F la primitive de f qui prend la valeur -2 en 1. La représentation graphique de F est l'une des trois courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3 données ci-après, dans un repère orthonormal (unités graphique : 1 cm.)

Déterminer celle des courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3 qui représente F, en justifiant la réponse.







4. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire du domaine plan limite par :
- la courbe $\mathscr{C}$,
- l'axe des abscisses,
- les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.

a. Exprimer $\mathscr{A}$, en unités d'aire, à l'aide de la fonction F.

b. Utiliser la représentation graphique de F pour donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$, à 10^{-1} près, en cm^2.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Dans une entreprise, les salariés sont classés en deux catégories : cadres et employés. Une entreprise emploie 30 cadres et 240 employés. Au cours de négociations sur la réduction du temps de travail, dite RTT, on propose aux salariés trois formules :

- Formule n° 1 : une RTT de 30 minutes par jour de travail,
- Formule n° 2 : une RTT d'un vendredi après-midi sur deux,
- Formule n° 3 : une RTT de 12 jours de travail par an.

Une enquête a été réalisée auprès de tous les salariés de l'entreprise, chacun remplissant une fiche mentionnant son statut (cadre ou employé) et son choix de RTT. On a obtenu les résultats suivants :

- Aucun cadre n'a choisi la formule n° 1,
- Parmi les employés :
  - 36 ont choisi la formule n° 1,
  - 99 ont choisi la formule n° 2.
- 40 % des salariés ont choisi la formule n° 2.

On extrait, au hasard, la fiche d'un salarié. On notera :
C l'évènement « le salarié est un cadre »,
E l'évènement « le salarié est un employé »,
R1 l'évènement « le salarié a choisi la formule n° 1 »,
R2 l'évènement « le salarié a choisi la formule n° 2 »,
R3 l'évènement « le salarié a choisi la formule n° 3 ».
$p(\text{A})$ désigne la probabilité d'un évènement A et $p_{\text{B}}(\text{A})$ celle de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé. Les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Déterminer les probabilités $p(\text{C})$ et $p(\text{E})$.
2. Parmi les probabilités $p(\text{R1} \cap \text{C})$, $p(\text{R1} \cap \text{E})$, $p(\text{R2} \cap E)$, $p_{\text{E}}(\text{R1})$, $p_{\text{E}}(\text{R2})$, $p(\text{R2})$ indiquer celles qui correspondent aux quatre résultats du sondage et donner leur valeur numérique.
3. **a.** Calculer la probabilité que le salarié soit un cadre ayant choisi la formule n° 2.

   b. Démontrer que la probabilité que le salarié ait choisi la formule n° 2, sachant qu'il s'agit d'un cadre, est $\dfrac{3}{10}$.
4. Calculer la probabilité $p(\text{R1})$, puis la probabilité $p(\text{R3})$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

L'espace est rapporte à un repère orthonormal $\left(\text{A}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
ABCDEFGH est un pavé défini par $\overrightarrow{\text{AB}} = 2\vec{\imath}$; $\overrightarrow{\text{AD}} = 6\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{\text{AE}} = 4\vec{k}$.
I, J et K sont les milieux respectifs de [EF], [FB] et [AD]

1. Placer les points I, J et K sur la figure donnée ci-dessous. Donner les coordonnées des points B, D et E. Puis vérifier par le calcul que I, J et K ont pour coordonnées respectives (1 ; 0 ; 4), (2 ; 0 ; 2) et (0 ; 3 ; 0).
2. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $y = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $2x + z = 6$.

   a. Donner un vecteur $\vec{n}_1$ normal au plan $\mathscr{P}_1$ et un vecteur $\vec{n}_2$ normal au plan $\mathscr{P}_2$.

   b. En déduire que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

   c. Soit Δ l'intersection des deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
   Montrer que Δ est la droite (IJ).

3. Soit $\overrightarrow{n}\,(2\,;\,2\,;\,1)$.

a. Montrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$ et $\overrightarrow{\text{IK}}$

b. En déduire que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

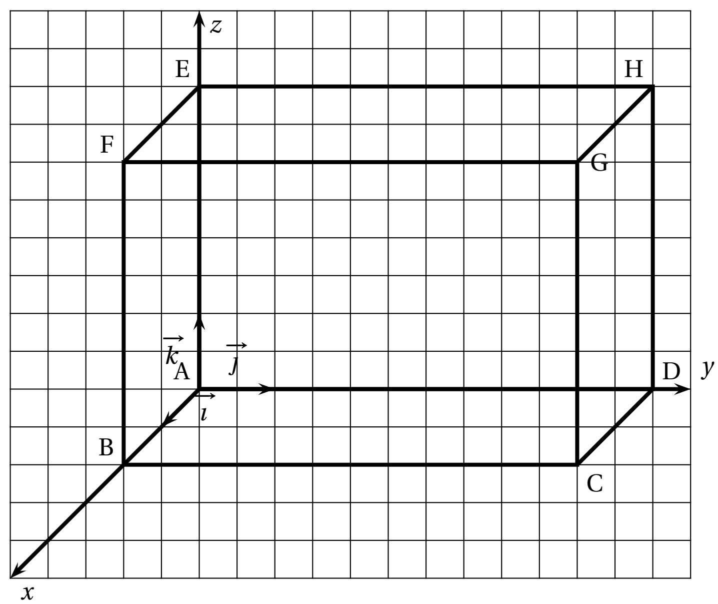
c. Montrer alors que le plan (IJK) a pour équation $2x + 2y + z = 6$.

4. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $5x + y = 5$.

a. Déterminer les coordonnées des points R et T, intersections du plan $\mathscr{P}$ avec les axes (Ax) et (Ay) respectivement.

b. Vérifier que le point I appartient au plan $\mathscr{P}$.

c. Sur la figure, placer les points R et T, puis dessiner la trace du plan $\mathscr{P}$ sur le plan (xAy).



PROBLÈME **10 points**

Le taux de pénétration au radiotéléphone pour la France est donné par le tableau suivant :

Semestre/Année	1/95	2/95	1/96	2/96	1/97	2/97	1/98
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6
Taux y_i	1,4	2,0	2,7	4,0	6,0	9,9	12,9

Semestre/Année	2/98	1/99	2/99	1/00	2/00	1/01
Rang x_i	7	8	9	10	11	12
Taux y_i	18,7	24,4	33,9	39,9	48,7	54,2

(Source : Autorité de régulation des télécommunications)

Dans la première ligne du tableau, 1/95 désigne le 1$^{\text{er}}$ semestre 1995 et 2/95 le 2$^{\text{e}}$ semestre 1995. Dans la troisième ligne du tableau, un taux de 2,0, par exemple, indique que 2 personnes sur 100 sont équipées d'un radiotétéléphone. On propose d'étudier deux modèles d'ajustement dans les **parties A et B** et de comparer les prévisions pour les années à venir dans la **partie C**.

Partie A - Ajustement affine (modèle A)

Dans cette partie, aucun détail des calculs statistiques n'est demandé.

1. Représenter graphiquement le nuage de points associés à la série statistique $(x_i\ ;\ y_j)$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour un semestre sur l'axe des abscisses et 1 cm pour un taux de 5 % sur l'axe des ordonnées) (on prendra la feuille de papier millimétré dans le sens de la largeur). Le nuage de points montre qu'un ajustement affine est justifié.
2. Écrire une équation de la droite d'ajustement affine $\mathscr{D}$ de y en x par la méthode des moindres carrés ; les coefficients seront arrondis à 10^{-2} près.
3. Tracer la droite $\mathscr{D}$ sur le graphique.

Partie B - Ajustement à l'aide d'une fonction (modèle B)

On obtient un autre ajustement du nuage à l'aide de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{80}{1+56\mathrm{e}^{-0,4x}}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g.

1. Étudier le sens de variations de g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Calculer la limite de g en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. Construire, dans le repère précédent, la partie de la courbe $\mathscr{C}$ obtenue sur l'intervalle $[0\,;\,25]$.

Partie C

Avec le modèle A, on note f la fonction affine représentée par la droite D.
Avec le modèle B, si x est l'entier désignant la durée écoulée en nombre de semestres depuis le 1[er] semestre 1995, alors $g(x)$ représente le taux de pénétration au radiotéléphone correspondant à ce nombre de semestres.

1. Prévoir le taux de pénétration au radiotéléphone, à 10^{-1} près, pour chacun des deux modèles précédents :
   a. pour le deuxième semestre 2002.
   b. pour le deuxième semestre 2004.
2. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations suivantes :

$$f(x) \geqslant 65 \qquad \text{et} \qquad g(x) \geqslant 65.$$

   b. En déduire le plus petit entier n tel que $f(n) \geqslant 65$ et le plus petit entier p tel que $g(p) \geqslant 65$.
   c. Interpréter les résultats obtenus.
3. Calculer $f(24)$. Commenter le résultat obtenu.
4. En supposant que le modèle B soit valide à long terme, et en utilisant les questions **B 1** et **B 2**, que peut-on déduire pour le taux de pénétration au radiotéléphone pour les années à venir ?

Baccalauréat ES Polynésie juin 2002

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne l'évolution du prix d'un paquet de café en francs au 31 décembre de l'année $1900 + n$.

Rang n_i de l'année	70	80	88	94	96	98	99	100
Prix y_i en francs	3	5,5	10	15,50	19,30	19,40	20	21

Sauf autre précision, tous les résultats et coefficients demandés seront arrondis à 10^{-3}.

A – Ajustement affine

Le détail des calculs n'est pas demandé.

1. **a.** Représenter graphiquement le nuage. Que peut-on en déduire ?

   b. Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement affine de y en n.

2. En supposant que ce modèle mathématique reste valable jusqu'à l'an 2002, donner une estimation du prix, en euros, arrondi au centime, d'un paquet de café au 31/12/2002. On rappelle qu'un euro vaut 6,559 57 francs.

B – Ajustement exponentiel

1. Le détail des calculs n'est pas demandé.

   a. Recopier et compléter le tableau suivant où $z_i = \ln y_i$ (valeurs arrondies à 10^{-3}).

n_i	70	80	88	94	96	98	99	100
z_i	1,099	1,705	2,303		2,960			

   b. Représenter graphiquement le nuage. Que peut-on en déduire ?

   c. Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement affine de z en n.

2. Déduire du **B 1 c** une expression de y en fonction de n de la forme $y = \alpha \cdot \beta^n$. Cet ajustement est dit exponentiel.
3. En supposant que ce modèle exponentiel reste valable jusqu'en 2002, donner une estimation du prix en euros, arrondi au centime, d'un paquet de café au 31/12/2002.
4. Quelle est la meilleure estimation du prix au 31/12/2002 d'un paquet de café ? Justifier.

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Un jeu consiste à lancer une première fois un dé à six faces :

- si le joueur obtient un « six », il gagne 10 euros ;
- s'il obtient un « un », un « deux » ou un « trois », il ne gagne rien et le jeu s'arrête ;
- s'il obtient un « quatre » ou un « cinq », le joueur lance le dé une deuxième fois ;

– s'il obtient un « six », il gagne alors 5 euros, sinon il ne gagne rien et le jeu s'arrête.

Pour participer à ce jeu, chaque joueur mise 2 euros.
Le « gain » d'un joueur est la différence entre ce qu'il reçoit à l'issue de la partie et sa mise ; un gain peut donc être négatif. Soit G le gain d'un joueur donné à chaque partie.

1. Quelles sont les valeurs prises par G ?
2. Premier cas : le joueur joue avec un dé bien équilibré.
   a. Montrer que $p(G = 3) = \dfrac{1}{18}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
   b. Déterminer la loi de probabilité de G, puis l'espérance mathématique de G. Ce jeu est-il à l'avantage du joueur ?
3. Deuxième cas : le joueur joue avec un dé pipé.
   On note p_i la probabilité d'obtenir la face marquée « i » pour $1 \leqslant i \leqslant 6$.
   On sait que p_6 est le double de p_1 et que $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$.
   a. Déterminer les valeurs de p_i pour $1 \leqslant i \leqslant 6$.
   b. Montrer alors que $p(G = 3) = \dfrac{4}{49}$
   c. Déterminer la loi de probabilité de G.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Le conseil municipal d'une station touristique de montagne a décidé de faire équiper une falaise afin de créer un site d'escalade.
L' équipement doit se faire depuis le pied de la falaise. Deux entreprises spécialisées dans ce genre de chantier ont été contactées et ont envoyé des devis.
On se propose d'étudier ceux-ci.

Devis de l'entreprise A :

Le premier mètre équipé coûte 20 €, puis chaque mètre supplémentaire équipé coûte 4 € de plus que le mètre précédent (20 € pour équiper une falaise de un mètre, 20 € + 24 € = 44 € pour équiper une falaise de deux mètres, 20 € + 24 € + 28 € =
72 € pour une falaise de trois mètres, etc.)

Devis de l'entreprise B :

Le premier mètre équipé coûte 10 €, puis chaque mètre supplémentaire équipé coûte 5 % de plus que le mètre précédent (10 € pour équiper une falaise de un mètre, 10 € + 10,50 € = 20,50 € pour équiper une falaise de deux mètres, 10 € + 10,5 € + 11,025 € = 31,525 € pour une falaise de trois mètres, etc.).

On appelle u_n le prix du n-ième mètre équipé et S_n le prix de l'équipement d'une falaise de n mètres de hauteur indiqués par l'entreprise A.
On appelle v_n le prix du n-ième mètre équipé et R_n le prix de l'équipement d'une falaise de n mètres de hauteur indiqués par l'entreprise B.

1. Exprimer u_n puis S_n en fonction de n.
2. Exprimer v_n puis R_n en fonction de n.
3. Calculer le prix à payer pour équiper une falaise de 50 mètres de hauteur avec chacune des deux entreprises. Préciser l'entreprise la moins chère. On arrondira les prix à l'euro près.

4. Le conseil municipal a décidé d'accorder un budget de 24 000 € pour équiper ce site. Calculer la hauteur de la falaise qui peut être équipée avec cette somme par chacune des deux entreprises A et B (arrondir au mètre près).

PROBLÈME 10 points

Partie A – Étude d'une fonction

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I = [0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 0,4x + \mathrm{e}^{-0,4x+1}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm en abscisse, 4 cm en ordonnée).

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 0,4x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
   c. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D).
2. **a.** Résoudre sur l'intervalle I l'inéquation suivante :

$$1 - \mathrm{e}^{-0,4x+1} > 0.$$

   b. À l'aide de la question précédente, étudier les variations de la fonction f sur I.
   c. Dresser le tableau de variations de f. En déduire le signe de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. **a.** Montrer que la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0 passe par le point B(2,5 ; 1).
   b. Construire $(\mathscr{C})$, (D) et (T).

Partie B - Application économique

Soit x le nombre d'objets, exprimé en centaines, fabriqués par une usine, $f(x)$ est leur coût total, exprimé en milliers d'euros, On suppose que x appartient à l'intervalle $J = [2,5\ ;\ +\infty[$.
Chaque objet est vendu 5 euros pièce.
On suppose que la fabrication est vendue dans sa totalité.

1. **a.** Exprimer la recette $R(x)$, en milliers d'euros, en fonction du nombre x de centaines d'objets fabriqués.
   b. Construire, sur le graphique précédent, la courbe représentative (Δ) de la fonction R traduisant cette recette.
   c. Vérifier graphiquement que (Δ) et $(\mathscr{C})$ se coupent en un seul point, On désigne par α l'abscisse de ce point ; en donner une valeur approchée à 10^{-1}.
2. **a.** Montrer que le bénéfice, noté $B(x)$, s'exprime en milliers d'euros par :

$$B(x) = 0,1x - \mathrm{e}^{-0,4x+1}.$$

   b. Quel est, en euros, le bénéfice obtenu en fabriquant 1 000 objets ? On donnera une valeur arrondie à l'euro.
   c. Calculer $B(x)$ et étudier le sens de variation de B sur $[2,5\ ;\ +\infty[$.

d. Démontrer que l'équation $B(x) = 0$ admet une solution unique sur J appartenant à $[2{,}5\,;\,10]$.
Montrer que cette solution est le nombre α défini dans la question **1. c**.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

e. En déduire le nombre entier minimum d'objets à produire pour réaliser un bénéfice.