∾ Baccalauréat STI 2000 ∾

L'intégrale de septembre 1999 à juin 2000

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat STI Antilles juin 2000 Génie civil, énergétique, mécanique (A et F)

Durée : 4 heures — Coefficient : 4

EXERCICE 1 — **4 points**

Chacun des 150 élèves des classes de terminales STI d'un lycée ayant effectué un stage en entreprise a rédigé un rapport de stage.
Pour rendre ce rapport de stage le plus lisible et le plus attractif possible :

- 115 élèves ont utilisé un traitement de textes ;
- 100 élèves ont utilisé un tableur ;
- 75 élèves ont utilisé à la fois un traitement de textes et un tableur.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Nombre d'élèves	ayant utilisé un traitement de textes	n'ayant pas utilisé un traitement de textes	Total
ayant utilisé un tableur	75		100
n'ayant pas utilisé de tableur			
Total	115		150

2. Un professeur étudie un des 150 rapports de stage choisi au hasard. On suppose que chaque rapport de stage a la même probabilité d'être ainsi choisi. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants

A : « l'élève ayant rédigé ce rapport de stage n'a pas utilisé de tableur » ;

B : « l'élève ayant rédigé ce rapport de stage a utilisé un traitement de textes mais pas de tableur » ;

C : « l'élève ayant rédigé ce rapport de stage n'a utilisé ni un traitement de textes, ni un tableur ».

EXERCICE 2 — **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 1 cm.

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$; on rappelle que $\text{i}^2 = -1$.
On considère les points A(4 ; 0) et $\text{C}\left(-2\sqrt{3}\ ;\ -2\right)$ d'affixes respectives $z_\text{A} = 4$ et $z_\text{C} = -2\sqrt{3} - 2\text{i}$, et les points B et D d'affixes respectives $z_\text{B} = \text{i}z_\text{A}$ et $z_\text{D} = \text{i}z_\text{C}$.

1. **a.** Calculer les modules des nombres complexes z_A et z_C.

b. En déduire les modules des nombres complexes z_B et z_D.

c. Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2. **a.** Montrer que les coordonnées de B et D sont respectivement (0 ; 4) et $\left(2\ ;\ -2\sqrt{3}\right)$.

b. Placer les points A, B, C et D dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

3. **a.** Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

b. Montrer que les diagonales du quadrilatère ABCD sont perpendiculaires.

PROBLÈME **11 points**

Le but du problème est d'étudier la position relative d'une courbe et d'une tangente à cette courbe en un point, et de calculer l'aire d'un domaine plan.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm.

Sur la figure ci-après a été tracée la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f, définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,6]$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x} + \ln x.$$

Partie A - Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,6]$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x} + \ln x.$$

1. Calculer la limite de f en zéro. On pourra mettre $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = \frac{x+2+x\ln x}{x}.$$

2. Calculer (1), $f(2)$, $f(\mathrm{e})$, $f(4)$ et $f(6)$.

3. **a.** Vérifier que, pour tout x dans l'intervalle $]0\,;\,6]$, on a :

$$f'(x) = \frac{x-2}{x^2}.$$

b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\,6]$.

c. Établir le tableau de variations de f sur $]0\,;\,6]$.

Partie B - Position de la courbe par rapport à une tangente

1. Montrer qu'une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 4 est :

$$y = \frac{x}{8} + 1 + \ln 4.$$

2. On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,6]$ par :

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{x}{8} + 1 + \ln 4\right).$$

a. Vérifier que pour tout x de $]0\,;\,6]$: $g(x) = \ln x - \ln 4 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{x}{8}$.

b. Montrer que pour tout x de $]0\,;\,6]$: $g'(x) = \dfrac{-x^2+8x-16}{8x^2}$.

c. Déterminer le signe de $g'(x)$ sur $]0\,;\,6]$.

d. Préciser le sens de variation de g sur $]0\,;\,6]$ (on ne demande pas les limites aux bornes du domaine de définition).

e. Calculer $g(4)$ et en déduire le signe de g sur $]0\,;\,6]$.

3. En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et T.

4. Tracer la droite T dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de la figure.

Partie C - Calcul d'une aire

1. Soit la fonction H définie sur $]0\,;\,6]$ par :

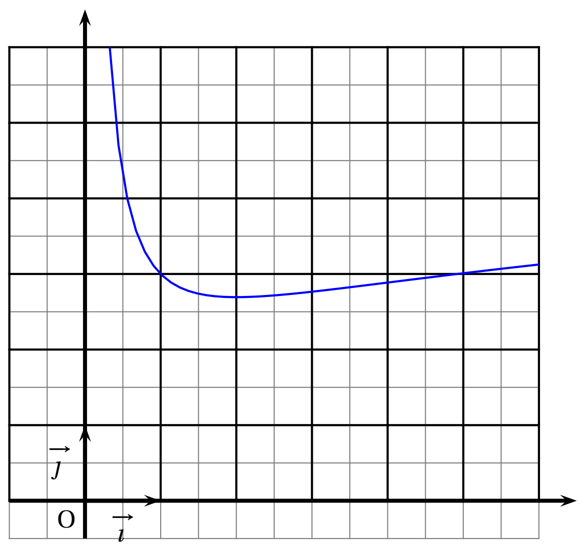
$$H(x) = (2 + x)\ln x.$$

Calculer $H'(x)$.

2. On considère la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \text{e}$. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en cm^2, de cette partie du plan.

a. Hachurer cette partie sur la figure.

b. Donner la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis sa valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.



Baccalauréat STI Antilles juin 2000 Génie électronique, électrotechnique, optique

Durée : 4 heures | Coefficient : 4

EXERCICE 1 **4 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.

Soient les nombres complexes z_1 et z_2 tels que $z_1 = \sqrt{2}+\text{i}\sqrt{6}$ et $z_2 = 2-2\text{i}$.

1. **a.** Calculer le module et un argument de chacun des deux nombres complexes z_1 et z_2.

   b. Écrire le quotient $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel.

2. $\mathscr{P}$ est le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm dans lequel les points M_1 et M_2 sont les points d'affixes respectives z_1 et z_2.
   Dans ce plan :

   a. placer les points M_1 et M_2 ;

   b. montrer qu'il existe une rotation de centre O qui transforme M_2 en M_1.
   Donner une mesure, en radian, de l'angle de cette rotation.

3. **a.** En utilisant les formes algébriques de z_1 et de z_2 données dans l'énoncé, écrire le quotient $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.

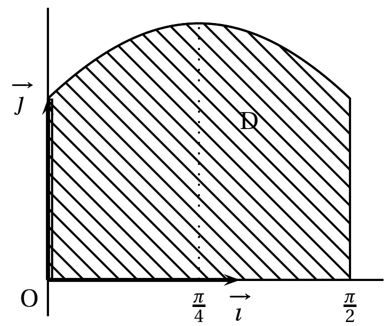
   b. Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 2 **4 points**

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$, où y désigne une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et où y'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction y.

   b. Déterminer la solution particulière f de cette équation différentielle vérifiant $f(0) = 1$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$. ($f'$ désigne la fonction dérivée de la fonction f.)

2. L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ d'unité graphique 4 cm.
   Le but de cette question est de calculer le volume V engendré par la rotation, autour de l'axe des abscisses, du domaine D hachuré sur le dessin ci-dessous :



Dans le plan rapporté au repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ le domaine D est limité par :

- la courbe représentative de la fonction f trouvée à la question précédente ;
- l'axe des abscisses ;
- l'axe des ordonnées ;
- la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right)$.

a. Montrer que, pour tout x réel :

$$[f(x)]^2 = 1 + \sin(2x).$$

b. Sachant que :

$$\mathrm{V} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x,$$

calculer la valeur exacte de V en unité de volume.

c. Donner la valeur de V arrondie au mm^3. (Exprimer le résultat en cm^3.)

PROBLÈME **12 points**

Dans ce problème :

- I désigne l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$;
- f désigne la fonction définie, pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x - 1};$$

- f' désigne la fonction dérivée de la fonction f ;
- $\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ox, Oy) d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

1. **a.** Vérifier que, pour tout x de l'intervalle I :

$$f(x) = \mathrm{e}^x + 1 + \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

b. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. a. Vérifier que, pour tout x de l'intervalle I :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{x}-2\right)}{\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)^{2}}.$$

b. Étudier, pour tout x de l'intervalle I, le signe de $f'(x)$.
En déduire le sens de variations de la fonction f et que, pour tout x de l'intervalle I, $f(x) > 0$.

3. a. Résoudre, dans l'intervalle I, l'équation, d'inconnue x, $f(x) = \frac{9}{2}$.

b. Déduire, du résultat obtenu à la question précédente, les coordonnées des points A et B, points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite dont une équation est $y = \frac{9}{2}$.
(A est le point d'intersection dont l'abscisse est la plus petite.)

Partie B

Soit la fonction g définie, pour tout x de l'intervalle I, par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{x} + 1.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté au repère $(\mathrm{O}x, \mathrm{O}y)$.
$\mathscr{C}_g$ est donnée sur le graphique ci-après.
On note h la fonction définie, pour tout x de l'intervalle I, par :

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

1. a. Étudier, pour tout x de l'intervalle I, le signe de $h(x)$; en déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_f$, par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$.

b. Résoudre dans l'intervalle I, l'inéquation, d'inconnue x, $h(x) \leqslant 0,05$.
On admet que deux points du plan de même abscisse sont indiscernables sur un dessin dès que la différence de leurs ordonnées a une valeur absolue inférieure à $0,05$.
Déterminer un demi-plan dans lequel les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont indiscernables.

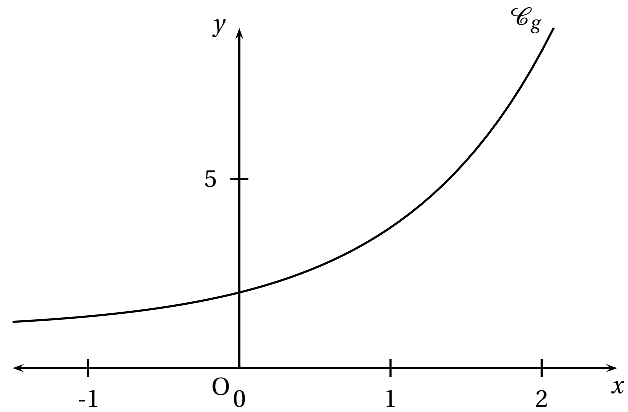
c. Tracer, avec soin, la courbe $\mathscr{C}_f$ sur le graphique ci-après.

2. Montrer que, pour tout x de I :

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}-1} - 1\ ;$$

en déduire une fonction primitive de h sur I.

3. Calculer l'aire S de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = \ln 2$ et $x = \ln 3$.
(Exprimer le résultat en cm^2.)



y
$\mathscr{C}_g$
5
-1
O
0
1
2
x

Baccalauréat STI France juin 2000
Génie mécanique (B, C, D, E), des matériaux

Durée : 4 heures Coefficient : 4

EXERCICE 1 **5 points**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

On appellera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre solution.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On appelle A_0, A_1 et A_2 les points d'affixes respectives

$$z_0 = 3 + \text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad z_1 = 1 + \text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad z_2 = 1 - \text{i}\sqrt{3}.$$

a. Placer les points A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.

b. Démontrer que le triangle $\text{A}_0\text{A}_1\text{A}_2$ est rectangle.

c. En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par A_0, A_1 et A_2.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour imiter la Française des jeux, un particulier crée un jeu de loterie instantanée pour lequel 500 tickets ont été imprimés.
Les tickets gagnants se répartissent de la manière suivante :

Nombre de tickets	Somme en francs gagnée par ces tickets
1	1 000
4	200
5	100
90	10

1. Calculer la probabilité qu'un ticket tiré au hasard soit un ticket gagnant.

2. Le prix de vente du ticket est de 10 francs.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque ticket, associe son gain (en tenant compte des 10 francs d'achat : à chaque ticket gagnant 100 F, X associe ainsi 90 F).

a. Déterminer toutes les valeurs prises par X.

b. Calculer la probabilité de l'évènement $X = -10$.

c. Déterminer la loi de probabilité associée à X.

d. Calculer et interpréter l'espérance de X.

PROBLÈME **10 points**

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]1~;~+\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \frac{x-1}{\mathrm{e}^x}.$$

1. Déterminer la valeur exacte de $g(2)$.
2. Calculer la limite de la fonction g en 1.
3. **a.** En remarquant que :

$$g(x) = 1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x} + \frac{1}{\mathrm{e}^x},$$

calculer la limite de la fonction g en $+\infty$.

b. Déduire de **3. a.** que la courbe représentative de la fonction g admet une asymptote horizontale en $+\infty$, dont on précisera une équation.

4. **a.** On note g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$.

b. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]1~;~+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de g.

d. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]1~;~+\infty[$.
(On ne demande pas de tracer la courbe représentative de la fonction g).

Partie B - Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]1~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x} - \frac{1}{\mathrm{e}^2} + \ln(x-1).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 5 cm.

1. **a.** Calculer la limite de la fonction f en 1.
En déduire l'existence d'une asymptote Δ à la courbe $\mathscr{C}$, dont on précisera une équation.

b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.

b. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x-1}$.

c. En déduire le sens de variations de f sur $]1~;~+\infty[$. Dresser le tableau de variations de f.

3. **a.** Calculer $f(2)$.

b. Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère défini précédemment.

Partie C - Calcul d'aire

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $]1~;~+\infty[$ par :

$$F(x) = -\frac{1}{\mathrm{e}^x} + (x-1)\ln(x-1) - \left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)x.$$

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]1\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire en cm^2 de la partie de plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.
Déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

b. Donner une valeur de $\mathscr{A}$ en cm^2 à 10^{-2} près.

Baccalauréat STI France juin 2000 Génie mécanique, civil, Génie énergétique

Durée : 4 heures | Coefficient : 4

EXERCICE 1 **5 points**

1. i est le complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
   On considère les nombres complexes suivants :

$$a = \sqrt{3} + \mathrm{i} \qquad b = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}.$$

   Déterminer le module et un argument de $a,\ b$ et $\dfrac{a}{b}$.

2. Soit $z = \cos\dfrac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{12}$. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ avec 4 cm comme unité graphique. On considère les points $M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$ d'affixes respectives $z,\ z^2,\ z^3,\ z^4$.
   a. Déterminer le module et un argument de $z,\ z^2,\ z^3,\ z^4$.
   b. En laissant vos traits de construction sur la copie, placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan complexe.

EXERCICE 2 **4 points**

Un professeur organise un tournoi de football entre des équipes d'élèves de seconde et des équipes d'élèves de première. Voici les résultats des huit matchs joués le premier jour du tournoi.

	Équipe de seconde	Équipe de première
1$^{\text{er}}$ match	2 buts	1 but
2$^{\text{e}}$ match	2 buts	0 but
3$^{\text{e}}$ match	3 buts	3 buts
4$^{\text{e}}$ match	1 but	3 buts
5$^{\text{e}}$ match	0 but	1 but
6$^{\text{e}}$ match	0 but	0 but
7$^{\text{e}}$ match	1 but	4 buts
8$^{\text{e}}$ match	3 buts	2 buts

On choisit un match au hasard parmi les huit matchs du premier jour du tournoi ; tous les matchs ont la même probabilité d'être choisis

1. **a.** Montrer que la probabilité p_1 qu'aucun but n'ait été marqué au cours de ce match est égale à $\dfrac{1}{8}$.
   b. Quelle est la probabilité p_2 que le match soit nul (c'est-à-dire que chaque équipe ait marqué le même nombre de buts) ?
2. Pour chaque match, on calcule la différence entre les nombres de buts marqués par les deux équipes, de façon à trouver un nombre positif ou nul. On définit ainsi une variable aléatoire X. Par exemple, pour le 5$^{\text{e}}$ match, la valeur de X est égale à 1 et pour le 8$^{\text{e}}$ match, elle est aussi égale à 1.

a. Donner les quatre valeurs possibles de X.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

PROBLÈME **11 points**

Dans tout le problème, le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x+2+\ln x}{x}.$$

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$est tracée à la dernière page (à compléter au fur et à mesure et à rendre avec la copie).

Partie I - Étude de la fonction *f*

1. D'après le graphique, il semble que l'axe des ordonnées soit asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

Le prouver par le calcul.

2. **a.** Vérifier que pour tout x de $]0~;~+\infty[$, $f(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c. En déduire l'existence d'une asymptote D à la courbe $\mathcal{C}$. Donner son équation et la tracer sur la dernière page.

3. **a.** Prouver que, pour tout x de $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

b. Montrer que $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en e^{-1}.

c. Établir le tableau de variations de f. Dans ce tableau, on donnera la valeur exacte du maximum de f.

Partie II - Position relative de deux courbes

1. Soit g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $g(x) = \frac{x+2}{x}$ et $\mathcal{H}$ la courbe représentative de g dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

a. Étudier rapidement la fonction g sur $]0~;~+\infty[$ (dérivée, limites, tableau de variations).

b. Donner les équations des deux asymptotes de la courbe $\mathcal{H}$.

2. **a.** Calculer $f(x) - g(x)$ et étudier son signe.

b. Montrer que les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ se coupent en un point K d'abscisse 1.

c. Étudier la position relative des deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$.

3. Placer le point K et construire la courbe $\mathcal{H}$ sur la dernière page.

Partie III - Calcul d'une aire

Soit α un réel tel que $\alpha > 1$.

On note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire du domaine limité par les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ et par les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.

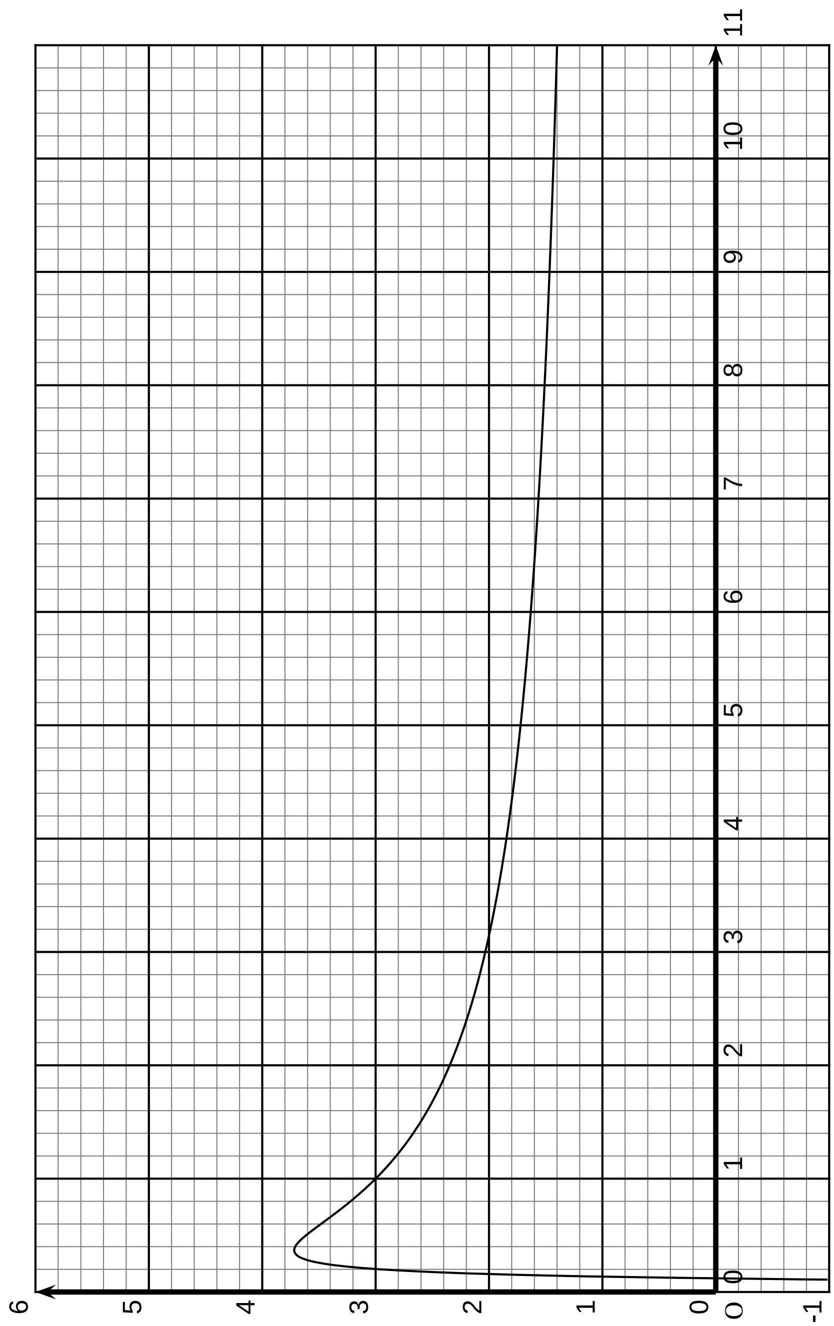
1. Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $u'(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$. Vérifier que u est une primitive de $\dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Calculer $\mathscr{A}(\alpha)$ en cm^2.

3. En remarquant que $\ln \alpha$ est strictement positif, calculer α pour que $\mathscr{A}(\alpha) = 8$ cm^2. Hachurer l'aire correspondante sur le graphique (dernière page) à rendre avec la copie.

Document à rendre avec la copie

Courbe représentative de la fonction f



Baccalauréat STI France juin 2000
Génie électrotechnique, électronique, optique

Durée : 4 heures Coefficient : 4

EXERCICE 1 **4 points**

Un test d'aptitude consiste à poser à chaque candidat une série de quatre questions indépendantes. Pour chacune d'elles, deux réponses sont proposées dont une et une seule est correcte.
Un candidat répond chaque fois au hasard (on suppose donc l'équiprobabilité des réponses).

1. On note V une réponse correcte et F une réponse incorrecte : VFFV signifie que la première et la quatrième réponse sont correctes et la deuxième et la troisième sont incorrectes.

   Établir la liste des seize résultats possibles (que l'on pourra présenter à l'aide d'un arbre).
2. Quelle est la probabilité pour que le candidat donne la bonne réponse :
   a. à la première question posée ?
   b. à une seule des questions posées ?
   c. aux quatre questions posées ?
3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses correctes données par le candidat.
   a. Donner les différentes valeurs prises par X.
   b. Donner la loi de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance mathématique de X.
4. Un candidat sera reconnu apte s'il donne au moins trois réponses correctes. Quelle est la probabilité qu'un candidat répondant au hasard soit reconnu apte ?

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On considère les nombres complexes $z_{\text{A}} = 5 - 5\text{i}$ et z_{B} de module égal à $5\sqrt{2}$ et d'argument égal à $-\dfrac{7\pi}{12}$, d'images respectives A et B.

1. **a.** Placer le point A.
   b. Calculer le module et un argument de z_{A}.
2. Soit la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$.
   a. Quelle est la transformation géométrique associée à f.
   b. Montrer par le calcul que $f\left(z_{\text{A}}\right) = z_{\text{B}}$.
   c. En déduire la construction de B (on laissera les traits de la construction).
3. **a.** Exprimer $\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$ sous forme algébrique.
   b. Calculer $f\left(z_{\text{A}}\right)$ sous forme algébrique.

c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{-7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{-7\pi}{12}\right)$.

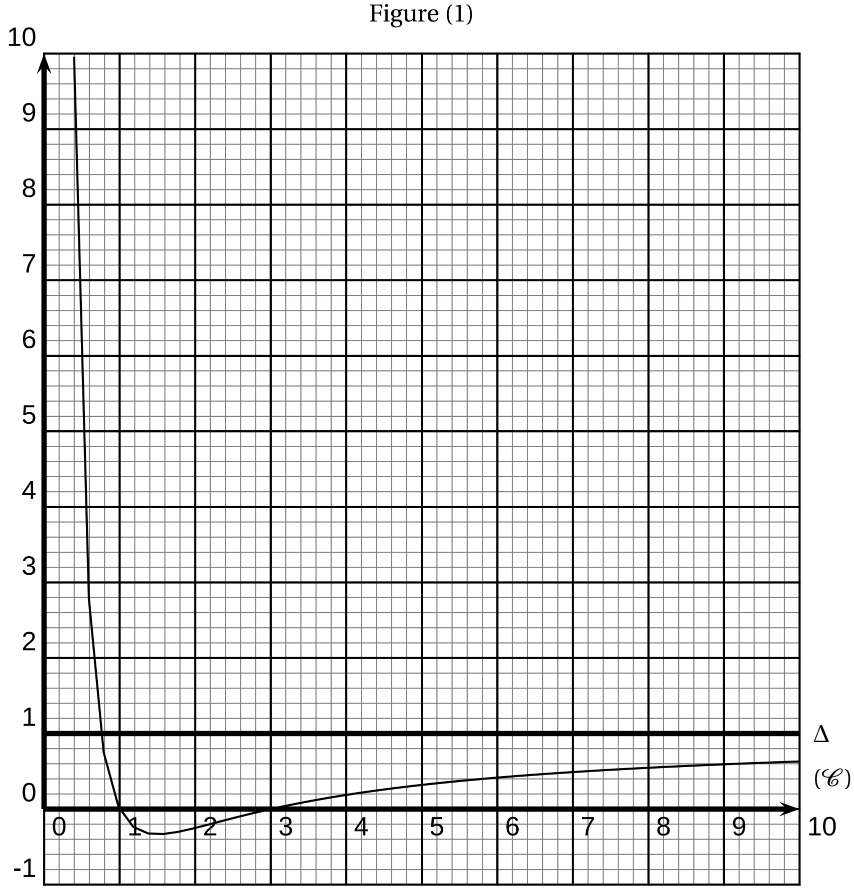
PROBLÈME 12 points

Les trois parties du problème peuvent être traitées séparément.

Partie A : Exploitation d'un graphique

On considère la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$, dont la représentation graphique $(\mathscr{C})$ obtenue sur l'écran d'une calculatrice est donnée sur la figure (1) ci-dessous.

Figure (1)



On précise que la courbe $(\mathscr{C})$ ne coupe l'axe des abscisses qu'en deux points et qu'elle admet l'axe des ordonnées et la droite (Δ) qui est parallèle à l'axe des abscisses comme asymptotes :

I À partir de cette représentation graphique :

1. déterminer :

   a. la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0 ;

   b. la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

2. dresser un tableau donnant le signe de $g(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

II On admet que : $g(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2}$ où $a,~b$ et c sont trois nombres réels.

1. En calculant la limite de $\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2}$ lorsque x tend vers l'infini, montrer que $a = 1$.
2. Lire $g(1)$ et $g(3)$ sur le graphique et en déduire un système de deux équations permettant d'obtenir b et c.
3. Résoudre ce système et exprimer $g(x)$ en remplaçant a, b et c par leurs valeurs.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\;;\;+\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{3}{x} - 4\ln x + x.$$

1. **a.** En mettant x en facteur dans l'expression de $f(x)$, montrer que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$.

   b. En mettant $\dfrac{1}{x}$ en facteur dans l'expression de $f(x)$, montrer que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à $-\infty$. (On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = 0$.)
2. **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = g(x)$.

   b. Utiliser les résultats de la **partie A** pour en déduire le tableau de variation de f.

   c. Calculer les valeurs exactes de $f(1)$ et $f(3)$.

II En utilisant le tableau de variations de f, justifier que l'équation $f(x) = 0$

1. **a.** n'admet pas de solution dans l'intervalle $]0\;;\;3[$,

   b. admet une solution unique, notée x_0 dans l'intervalle $[3\;;\;10]$,

   c. n'admet pas de solution dans l'intervalle $]10\;;\;+\infty[$.
2. Compléter le tableau (document à rendre avec votre copie) et en déduire un encadrement d'amplitude 10^{-2} de x_0.

Partie C : Calcul d'aires

1. Montrer que $f(\sqrt{3}) = -2\ln 3$ (détailler les calculs sur votre copie).
2. Le tracé de la courbe $(\mathscr{C})$ représentant g dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est donné sur la figure (2). (Document à rendre avec votre copie).

   a. Soit D le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $(\mathscr{C})$ d'une part et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = 3$ d'autre part.

   Calculer la valeur exacte de son aire A exprimée en unités d'aires. (On rappelle que $g = f'$).

   b. Tracer la droite (L) d'équation $x = \sqrt{3}$ et montrer qu'elle partage le domaine D en deux domaines d'aires égales.

DOCUMENT À RENDRE AVEC LA COPIE

Tableau à compléter (partie B 2)

x	9,15	9,16	9,17	9,18	9,19	9,20	9,21	9,22	9,23	9,24	9,25
$f(x)$											

Figure 2