Baccalauréat STI 2001

L'intégrale de septembre 2000 à juin 2001

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat STI France septembre 2000 Génie Civil, énergétique, mécanique (A et F)

Exercice 1 **4 points**

Les trois machines A, B et C d'un atelier ont une production totale de 10 000 pièces du même type.
Elles produisent respectivement 2 000, 3 000 et 5 000 pièces.
Par ailleurs, on constate que le nombre de pièces avec défaut est de 100 pour A, de 120 pour B et de 150 pour C.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Machine A	Machine B	Machine C	TOTAL
Nombre de pièces sans défaut				
Nombre de pièces avec défaut			150	
TOTAL	2 000			10 000

2. Une pièce est choisie au hasard dans la production totale.
Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.

a. Montrer que la probabilité p_1 pour qu'elle provienne de A est égale à $0,2$.

b. Montrer que la probabilité p_2 pour qu'elle ait un défaut est égale à $0,037$.

c. Calculer à 10^{-3} près la probabilité p_3 pour qu'elle provienne de B et qu'elle soit sans défaut.

3. Une pièce est choisie au hasard dans l'ensemble des pièces sans défaut.
Toutes ces pièces ayant la même probabilité d'être choisies, calculer à 10^{-3} près la probabilité pour qu'elle provienne de B.

Exercice 2 **4 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation

$$(z-4)\left(z^2-2z+4\right)=0.$$

2. On note A, B et C les points d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}}=4 \quad ; \quad z_{\text{B}}=1+\text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad z_{\text{C}}=1-\text{i}\sqrt{3}.$$

a. Écrire z_{B} et z_{C} sous forme trigonométrique.

b. Placer avec précision les points A, B et C dans le plan complexe.
On fera le dessin sur la copie

c. Calculer $|z_{\text{B}}-z_{\text{A}}|$, $|z_{\text{C}}-z_{\text{B}}|$ et $|z_{\text{C}}-z_{\text{A}}|$.

d. En déduire la nature du triangle ABC.

3. On note K le point d'affixe $z_{\text{K}}=-\sqrt{3}+\text{i}$.

a. Placer avec précision le point K sur la figure précédente.

b. Démontrer que le triangle OBK est rectangle isocèle.

PROBLÈME **12 points**

On se propose d'étudier, dans une première partie, quelques propriétés d'une fonction f dont la représentation graphique est donnée. On s'intéresse, dans une seconde partie, à l'une de ses primitives et, dans une troisième partie, au calcul d'une aire.

Pour tout le problème, le plan est muni du repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ *d'unité graphique* 4 cm.

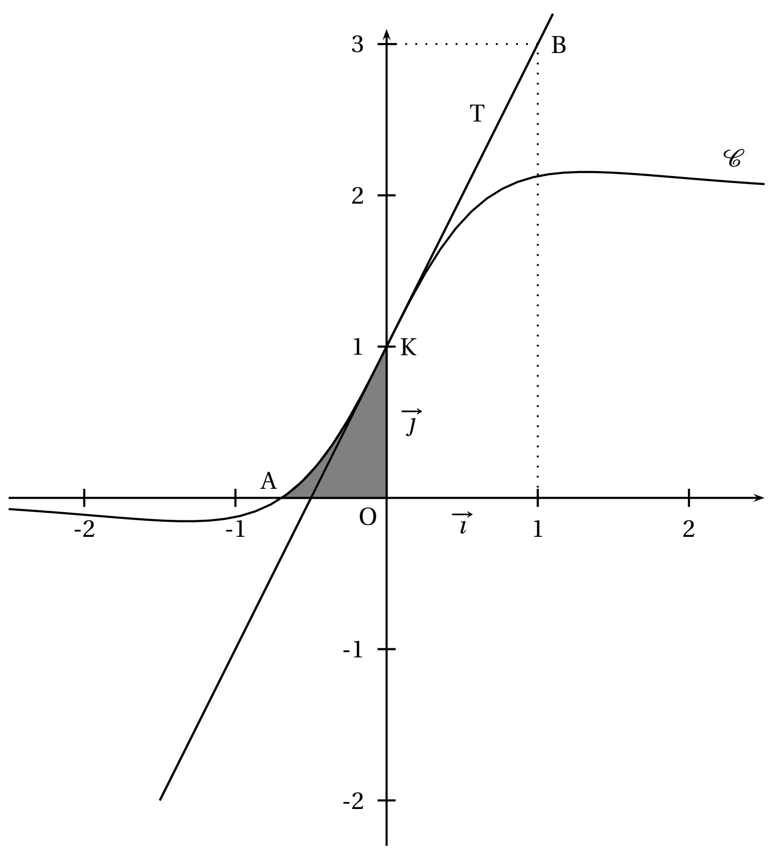
Partie A - Étude graphique d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\text{e}^{2x} - \text{e}^{x}}{\text{e}^{2x} - \text{e}^{x} + 1}.$$

On trouvera sur le graphique ci-après, le tracé de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f et le tracé de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point K(0 ; 1), dans le repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On admet que le point K est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$ et que le point B(1 ; 3) appartient à la tangente T.



1. On se propose de démontrer certaines propriétés de la courbe $\mathscr{C}$.

a. Étudier la limite de f en $-\infty$ et préciser l'asymptote à $\mathscr{C}$ correspondante.

b. On admet que pour tout réel x, $f(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \frac{2 - e^{-x}}{1 - e^{-x} + e^{-2x}}.$$

En déduire la limite de f en $+\infty$ et préciser l'asymptote à $\mathscr{C}$ correspondante.

c. Vérifier, par le calcul, que le point A$(-\ln 2\ ;\ 0)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}$.

2. Grâce à une lecture graphique, répondre aux questions suivantes en justifiant vos réponses.

a. Déterminer la valeur de $f'(0)$.

b. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B - Étude d'une primitive de f sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$

Soit F la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$ par

$$F(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right).$$

et Γ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier la limite de F en $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe Γ.

2. a. Vérifier que pour tout réel x, $F(x)$ peut s'écrire :

$$F(x) = 2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right).$$

b. Calculer la limite de F en $+\infty$, puis la limite de $F(x) - (2x)$ en $+\infty$.

c. En déduire que la courbe Γ admet une droite asymptote.

3. a. Démontrer que f est la fonction dérivée de F sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$.

b. Vérifier que $F(-\ln 2) = \ln \frac{3}{4}$.

c. Déduire de la **partie A** le tableau de variations de la fonction F.

4. Recopier et compléter le tableau suivant en donnant les résultats à 10^{-2} près :

x	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$F(x)$									

5. Sur la feuille de papier millimétré, tracer dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm, les droites d'équations respectives $y = 2x$ et $y = 0$, puis la courbe Γ.

Partie C - Calcul d'une aire

1. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0} f(x)\,dx$.

2. En déduire la valeur exacte en cm^2 de l'aire du domaine AOK (grisé sur la courbe jointe) et en donner une valeur approchée à un millimètre carré près par excès.

∽ Baccalauréat STI France septembre 2000
Génie électronique, électrotechnique, optique ∾

EXERCICE 1 **5 points**

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 - 6z + 12 = 0.$$

2. **a.** Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm, placer les points A et B images respectives des nombres complexes $z_{\mathrm{A}} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_{\mathrm{B}} = \overline{z_{\mathrm{A}}}$ où $\overline{z_{\mathrm{A}}}$ désigne le nombre complexe conjugué de z_{A}.

b. Écrire z_{A} et z_{B} sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et θ réel.

3. **a.** Calculer $\dfrac{z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}}$.

b. En déduire que $z_{\mathrm{B}} = z_{\mathrm{A}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et interpréter géométriquement ce résultat.

4. On pose : $z' = z - 2 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. On note T la transformation géométrique du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z'.

a. Caractériser cette transformation T.

b. Calculer l'affixe z_{D} de l'image D du point A par cette transformation.

c. Calculer l'affixe du point C tel que ABCD soit un parallélogramme.

d. Compléter la figure en plaçant C et D.

EXERCICE 2 **4 points**

Soient I et J les intégrales définies par :

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x} \sin x \,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x} \cos x \,\mathrm{d}x.$$

1. Soit f et u les fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x) \qquad \text{et} \qquad u(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x.$$

a. Montrer que u est une primitive de f.

b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. **a.** Déterminer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale J.

3. **a.** Déterminer une relation entre I, J et K.

b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 + x + 2\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, unité : 2 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. En remarquant que :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) x^2 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

   et en admettant que $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right) = 0$, déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour $(\mathscr{C})$?

2. **a.** Calculer $f'(x)$. Montrer que :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 5x + 4\right) \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

   b. Étudier le signe de $f'(x)$.
   En déduire le tableau de variations de f.

3. Déterminer une équation de la droite (D), tangente à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse -2.

4. Recopier et compléter le tableau de valeurs :

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1
$f(x)$										

   Les valeurs de $f(x)$ seront arrondies avec deux décimales.
   Représenter (D) puis $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) \mathrm{e}^{\frac{x}{2}},$$

   où a, b et c sont des constantes réelles.
   Calculer $g'(x)$. Déterminer les nombres a, b et c pour que g soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

6. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-4 ; 0]$.

Baccalauréat STI Nouvelle–Calédonie décembre 2000 Génie énergétique, civil, mécanique

EXERCICE 1 **5 points**

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 4 boules rouges portant respectivement les numéros 0, 1, 2, 4 et l'urne U_2 contient 3 boules vertes portant respectivement les numéros 1, 3, 5.
On tire au hasard et simultanément une boule de l'urne U_1 et une boule dc l'urne U_2.

- a désigne le numéro de la boule tirée de U_1 et b celui de la boule tirée de U_2.
- z est le nombre complexe dont la partie réelle est a et la partie imaginaire b.
  On suppose que les écritures algébriques $z = a + \mathrm{i}b$ possibles sont équiprobables.

Les probabilités demandées seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Dresser une liste de toutes les écritures algébriques possibles de z.
2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   a. E_1 : « $z = 1 + 3\mathrm{i}$ »,
   b. E_2 : « $z + \overline{z} = 2$ ».
3. On désigne par A l'évènement « le module de z est 5 », et par B l'évènement « z est un imaginaire pur ».
   a. Calculer la probabilité de l'évènement A puis celle de l'évènement B.
   b. Définir par une phrase l'évènement A $\cap$ B. Calculer la probabilité de cet évènement.
   c. En déduire la probabilité de l'évènement A $\cup$ B.
4. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe $a + b$.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

EXERCICE 2 **5 points**

On appelle f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0\,;\ 1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; unité graphique 10 cm.

1. Représenter la courbe $(\mathscr{C})$.
2. a. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   b. En déduire que la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ est égale à $\mathrm{e} - 2$. Donner l'arrondi au centième de μ.

   On désigne par $(\mathscr{P})$ la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$, et par $(\mathscr{R})$ la partie du plan limitée par la droite d'équation $y = \mu$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

3. a. Représenter $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{R})$ en utilisant des hachures.
   b. Justifier le fait que $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{R})$ ont la même aire.
4. On désigne par V_1 le volume, exprimé en unités de volume, du solide engendré par la rotation de la partie $(\mathscr{P})$ autour de l'axe des abscisses et par V_2 celui du solide engendré par la rotation de la partie $(\mathscr{R})$ autour du même axe.

$$\text{(On rappelle que } V_1 = \pi \int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

On se propose de comparer V_1 et V_2.
   a. Calculer la valeur exacte de V_1.
   b. Calculer la valeur exacte de V_2.
   c. Calculer la valeur exacte de $V_1 - V_2$ puis donner un arrondi au millième. Conclure.

PROBLÈME **10 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : détermination d'une fonction

On considère la fonction φ, définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = a - (bx+1)\ln(x+1),\ \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

La courbe $\left(\mathscr{C}_\varphi\right)$ représentative de la fonction φ satisfait aux conditions suivantes :

- $\left(\mathscr{C}_\varphi\right)$ passe par le point A de coordonnées $(0\,;\,\mathrm{e})$,
- $\left(\mathscr{C}_\varphi\right)$ passe par le point B de coordonnées $(\mathrm{e} - l\,;\,0)$.

1. Déterminer a puis b.
2. En déduire $\varphi(x)$.

Partie B : étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e} - (bx+1)\ln(x+1).$$

On désigne par $\left(\mathscr{C}_f\right)$ sa courbe représentative.

1. a. Démontrer que la limite de f en -1 est égale à e. (On admettra que $\lim\limits_{X\to 0} X\ln X = 0$).
   b. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. a. Démontrer, en la résolvant, que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
   Donner une valeur exacte puis la valeur décimale arrondie à 10^{-2} de α.
   b. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
   c. Calculer la valeur exacte de $f(\alpha)$ et sa valeur décimale arrondie à 10^{-2}.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. a. Calculer les coefficients directeurs des tangentes (T_1) et (T_2) à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ aux points d'abscisses respectives 0 et $\mathrm{e}-1$.
   b. Tracer les tangentes (T_1) et (T_2) et la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$.(unité graphique : 5 centimètres).

Partie C : calcul d'une aire

1. Soit G la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$. par :

$$G(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2[\ln(x+1)-1].$$

Vérifier que G est une primitive de la fonction qui, à x, associe $(x+l)\ln(x+1)$.
En déduire une primitive F de f.

On désigne par $(\mathscr{P})$ la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courte $\left(\mathscr{C}_f\right)$.

1. Représenter $(\mathscr{P})$ sur la figure précédente en utilisant des hachures.

2. Calculer la valeur exacte de l'aire de la partie hachurée, en cm^2.
Donner sa valeur décimale arrondie à 10^{-2}.

Baccalauréat STI France juin 2001
Arts appliqués

Durée : 2 heures — Coefficient : 2

EXERCICE 1 — **8 points**

Un atelier fabrique une série d'autocollants qui peuvent être de couleur bleue ou jaune, de forme ronde ou carrée, avec ou sans liseré.
On a récapitulé les quantités produites dans deux tableaux :

FOND JAUNE		
	ronde	carrée
avec liseré	800	1 200
sans liseré	1 300	1 700

FOND BLEU		
	ronde	carrée
avec liseré	1 000	1 500
sans liseré	900	1 600

A - En utilisant les données précédentes, recopie et remplir toutes les cases des tableaux ci-dessous :

FORME RONDE			
	jaune	bleue	Sous-total
avec liseré			
sans liseré			
Sous-total			

FORME CARRÉE			
	jaune	bleue	Sous-total
avec liseré			
sans liseré			
Sous-total			

B - On prélève au hasard l'un des autocollants produits. On note les évènements :

R : « prélever un autocollant rond » ;
C : « prélever un autocollant carré » ;
J : « prélever un autocollant jaune » ;
B : « prélever un autocollant bleu » ;
L : « prélever un autocollant avec liseré » ;
$\overline{\text{L}}$: « prélever un autocollant sans liseré » ;

1. On appelle Ω l'ensemble des autocollants produits.
   Quel est le nombre d'éléments de Ω ?
2. Quel est le nombre d'éléments de R, J, L, et $\overline{\text{L}}$?
3. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - **a.** $\text{R} \cap \text{L} \cap \text{J}$;
   - **b.** $\text{R} \cap \overline{\text{L}}$;
   - **c.** C ;
   - **d.** $\text{C} \cup \text{B}$;
   - **e.** $\overline{\text{C} \cup \text{B}}$.

N.B. Les résultats seront donnés, en valeur exacte, sous forme de nombres décimaux avec deux chiffres après la virgule.

EXERCICE 2 — **12 points**

On considère la fonction f définie sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$ par

$$f(x) = 4\text{e}^x - \text{e}^{2x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, dont l'unité graphique est 2 cm.

1$^{\text{re}}$ partie : Étude de la fonction f.

1. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
En déduire que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote dont on précisera une équation.

2. **a.** f' désigne la dérivée de f sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.
Montrer que $f'(x) = 2\text{e}^x(2-\text{e}^x)$.

b. Résoudre dans R l'inéquation $2-\text{e}^x > 0$ et en déduire le signe de $f'(x)$ sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.

c. Dresser le tableau de variations de f.

2$^{\text{e}}$ partie : Courbe $(\mathscr{C})$ et applications.

1. Résoudre, dans $\left]-\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$, l'équation $f(x) = 0$.
Interpréter graphiquement le résultat.

2. Tracer $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

3. Déterminer graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

3$^{\text{e}}$ partie : Calcul d'une aire et application.
On désigne par (P) la partie du plan limitée par $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=-5$ et $x=\ln 4$.

1. **a.** Calculer $\displaystyle\int_{-5}^{\ln 4} f(x)\,\text{d}x$ et, à l'aide d'une calculatrice, en donner une valeur approchée à 10^{-2}, près.

b. En déduire l'aire de (P).

2. On désigne par (P$'$), le symétrique de (P) par rapport à l'axe des abscisses.

La réunion des domaines (P) et (P$'$) représente un logo, à l'échelle $\dfrac{1}{8}$, pour une enseigne publicitaire.
En tenant compte du résultat précédent, calculer l'aire en cm^2, puis en m^2, de ce logo.

Baccalauréat STI France juin 2001
Génie mécanique A et F, énergétique, civil

Durée : 4 heures | Coefficient : 4

L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve
Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.
Ce sujet nécessite 2 feuilles de papier millimétré.

EXERCICE 1 — 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A, B, C d'affixes respectives :

$$z_A = \sqrt{3} + 3i\ ;\ z_B = 2\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_C = 2i.$$

1. Placer les points A, B et C dans le plan complexe (sur papier millimétré).
2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_A.
3.
   a. Calculer les modules des nombres complexes $z_A - z_C$, $z_B - z_A$ et $z_B - z_C$.
   En déduire la nature du triangle ABC.

   b. Déterminer l'affixe du centre K du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC préciser le rayon r de ce cercle.

   c. Montrer que le point O appartient au cercle (Γ).
4. On considère le point D, d'affixe $z_D = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

   a. Montrer, que $z_D = \sqrt{3} - i$.

   b. Calculer l'affixe du milieu M du segment [AD].

   c. Démontrer que le quadrilatère ABDC est un rectangle.

EXERCICE 2 — 4 points

1. Résoudre l'équation différentielle : $4y'' + y = 0$.
2. Déterminer la solution particulière de cette équation différentielle vérifiant

$$\left\{\begin{array}{lll} f(\pi) & = & \sqrt{3} \\ f'(\pi) & = & -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

3. Montrer que cette solution f vérifie, pour tout x réel : $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$.
4. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation d'inconnue x : $f(x) = 1$; en donner les solutions appartenant à l'intervalle $[0; 4\pi[$.

PROBLÈME **11 points**

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 3\text{e}^{-x} + 2x - 4.$$

Partie A : Construction de la courbe représentative de f

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Vérifier que $f(x) = \text{e}^{-x}\left(3 + 2x\text{e}^{x} - 4\text{e}^{x}\right)$. Déterminer alors la limite de f en $-\infty$.

   c. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f et soit (D) la droite d'équation : $y = 2x - 4$. Montrer que (D) est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$ et étudier la position relative de la droite (D) par rapport à la courbe $(\mathscr{C})$.

2. **a.** Calculer la dérivée de f Résoudre l'inéquation d'inconnue réelle x : $-3\text{e}^{-x} + 2 \geqslant 0$.

   b. Dresser le tableau de variation de f.

   c. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

   d. Déterminer les valeurs exactes du minimum et du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;\,5]$.

3. Tracer $(\mathscr{C})$, (D) et (T) dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, pour x variant de -2 à 5 (sur papier millimétré).

Partie B : Calcul d'une aire

1. Chercher une primitive de f sur $]-\infty\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $]1\,;\,2[$ une unique solution α dont on donnera une valeur approchée au dixième près.

   b. Préciser, en le justifiant, le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]\alpha\,;\,+\infty[$.

   c. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 4$. En donner une valeur approchée en utilisant pour α la valeur approchée trouvée précédemment.

Baccalauréat F 11 - F 11′ France juin 2001

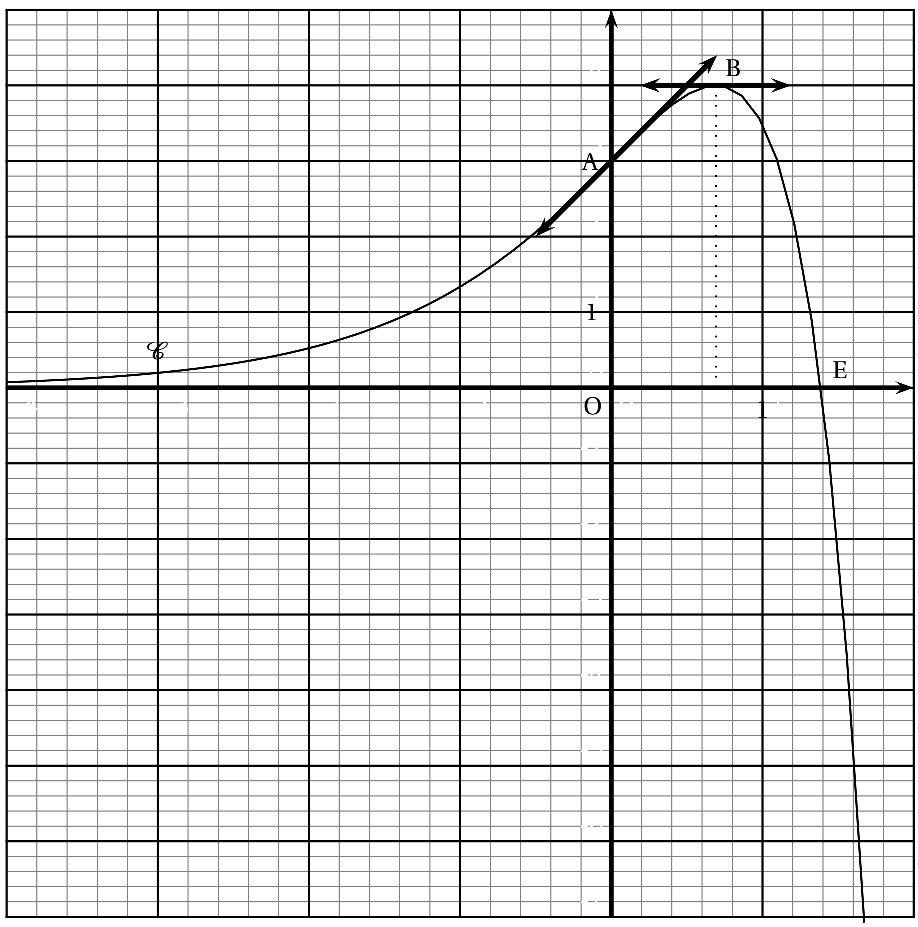
Durée : 2 heures Coefficient : 2

EXERCICE **8 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x\left(4 - \mathrm{e}^x\right).$$

On désigne par f' la fonction dérivée de f. On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans le repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm pour les abscisses et 1 cm pour les ordonnées.



1. **a.** Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. Étudier la limite de la fonction f en $-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. **a.** Calculer $f'(x)$.

   b. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.

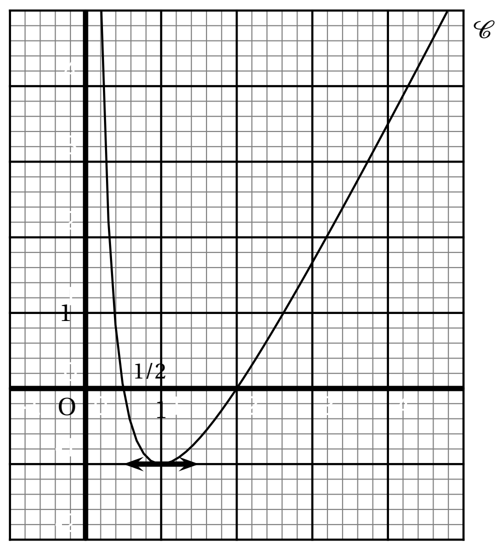
   c. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est parallèle à l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de B.

d. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. **a.** Calculer les coordonnées du point d’intersection E de la courbe $\mathscr{C}$ et de l’axe des abscisses.

b. Par lecture graphique, déterminer le nombre de solutions de l’équation $f(x) = 1$ puis encadrer chaque solution par deux entiers consécutifs.

PROBLÈME **12 points**



I On considère une fonction f définie sur l’intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b + \frac{2}{x}$$

où a et b désignent deux nombres réels.
La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal d’unité graphique 1 cm.

1. **a.** On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et x.

b. Sachant que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ et $f'(1) = 0$, déterminer les valeurs des réels a et b.

2. Par lecture graphique :

a. déterminer la valeur entière de $f(2)$.

b. déterminer le signe de $f(x)$ sur l’intervalle $]0~;~+\infty[$.

3. On pose $a = 2$ et $b = -5$.

a. Montrer que la droite à Δ d’équation $y = 2x - 5$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ sur l’intervalle $]0~;~+\infty[$.

II On considère la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 5x + 2\ln x.$$

On appelle Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d’unité graphique 2 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction g en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?

b. Vérifier que $g(x) = x\left(x - 5 + 2\dfrac{\ln x}{x}\right)$ puis déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

2. **a.** Montrer que la fonction g est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. En déduire les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

b. Donner les valeurs exactes de $g(1)$ et de $g(2)$ puis les valeurs décimales approchées à 10^{-1} près par défaut.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

3. **a.** Recopier et compléter le tableau à l'aide des valeurs décimales arrondies à 10^{-1} de $g(x)$.

x	0,2	1	2,5	3,5	4	5
$g(x)$						

b. Tracer les tangentes à la courbe parallèles à l'axe des abscisses puis la courbe Γ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Baccalauréat STI France juin 2001
Génie mécanique B, C, D et E, génie des matériaux

Calculatrice autorisée

Génie Mécanique B, C, D et E, génie des matériaux

Durée : 4 heures — Coefficient : 4

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème. Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Ce sujet nécessite 2 feuilles de papier millimétré.

EXERCICE 1 — **5 points**

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation en z :

$$z^2 - 6z + 13 = 0.$$

2. **a.** Déterminer les réels b et c tels que pour tout complexe z :

$$z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = (z-3)(z^2 + bz + c).$$

   b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation en z : $z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = 0$.

3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité : 2 cm).
Soient A, B, E et F les points d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 3 + 2\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = 3 - 2\mathrm{i},\ z_{\mathrm{E}} = 5 + \mathrm{i} \quad \text{et } z_{\mathrm{F}} = 3.$$

   a. Placer les points A, B, E et F dans le plan complexe (sur papier millimétré).

   b. Calculer les distances FA, FB et FE. En déduire que les points A, B et E appartiennent à un cercle (Γ) de centre F.

   c. Quelle est la nature du triangle ABE ?

EXERCICE 2 — **4 points**

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$.
2. On désigne par f la solution particulière de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthonormal passe par le point de coordonnées (0 ; 1) et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.

   a. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.

   b. En déduire une expression def (x) en fonction de x.

   c. Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, c'est-à-dire le réel m défini par :

$$m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

PROBLÈME **11 points**

Partie I

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = -x + x\ln x$ (où ln désigne le logarithme népérien).

1. Résoudre dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$.
2. Résoudre dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, l'équation $g(x) > 0$.

Partie II

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x.$$

On appelle (Γ) la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités : 2 cm).

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.
2. Montrer que $f'(x) = g(x)$. Utiliser les résultats de la **partie I** pour établir le tableau de variations de f.
3. Calculer $f\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)$. On fera apparaître le détail des calculs.
4. Soit A le point de (Γ) d'abscisse 1. déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (Γ).
5. Tracer dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ la tangente (T) ainsi que la partie de la courbe (Γ) relative à l'intervalle $[0\,;6]$.
6. Soit F la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x) = \frac{1}{6}x^3\ln x - \frac{11}{36}x^3.$$

   a. Montrer que F est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   b. Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$. On en donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Baccalauréat STI France juin 2001
Génie électronique, électrotechnique, optique

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.
Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES 2 EXERCICES ET LE PROBLÈME

Durée : 4 heures — Coefficient : 4

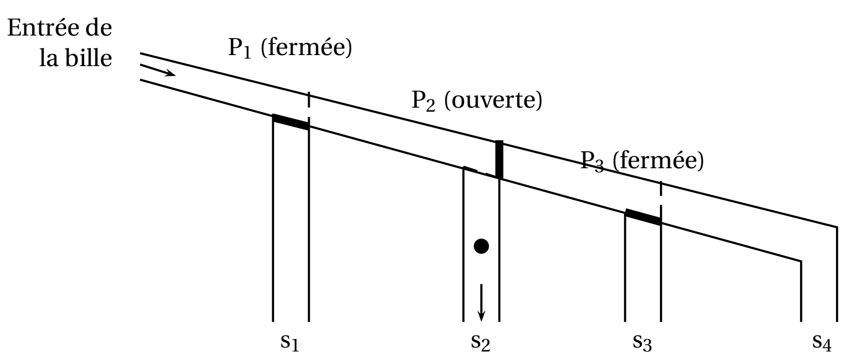
EXERCICE 1 — **4 points**

Soit l'équation différentielle (E) : $4y'' + 9y = 0$, où y est une fonction de la variable t et y'' sa dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Trouver la fonction f, solution particulière de (E), vérifiant les conditions suivantes :
$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$$
3. Vérifier que, pour tout réel t, $f(t) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$.
4. Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{6}\right]$.

EXERCICE 2 — **4 points**

Un jeu de hasard consiste à introduire une bille dans le tube d'une machine.
Cette machine possède trois portes P_1, P_2 et P_3 qui ferment ou ouvrent les accès aux quatre sorties possibles s_1, s_2, s_3 et s_4.
Un système électronique positionne aléatoirement ces trois portes puis libère la bille.



N.B. : sur le schéma les portes P_1 et P_3 sont fermées, la porte P_2 est ouverte, la bille sortira par s_2.

1. Énumérer dans un tableau comme ci-dessous, en s'aidant éventuellement d'un arbre de choix, toutes les positions simultanées possibles des trois portes et indiquer la sortie imposée à la bille pour chacune de ces configurations.

P_1	P_2	P_3	sortie
……	……		
F	O	F	s_2
……	……		

Par convention on notera F une porte fermée et O une porte ouverte.)

2. On suppose que les huit évènements élémentaires, trouvés à la question 1, sont équiprobables.

a. Soit A l'évènement (F ; O ; F). Quelle est la probabilité p(A) de l'événement A ?

b. Soit S_1 l'évènement « la bille sort par s_1 », S_2 l'évènement « la bille sort par s_2 », S_3 l'évènement « la bille sort par s_3 », S_4 l'évènement « la bille sort par s_4 ». Calculer les probabilités $p(S_1)$, $p(S_1)$, $p(S_1)$ et $p(S_1)$ de chacun de ces évènements.

3. Pour jouer, on doit miser 7 francs.

Si la bille sort par s_1, on ne reçoit rien. Si la bille sort par s_2 on reçoit 5 francs.

Si la bille sort par s_3 on reçoit 10 francs. Si la bille sort par s_4, on reçoit 20 francs.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque sortie possible, associe le gain ou la perte en francs du joueur (en tenant compte de la mise des 7 francs ; par exemple : à la sortie s_4 , X associe 13)

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

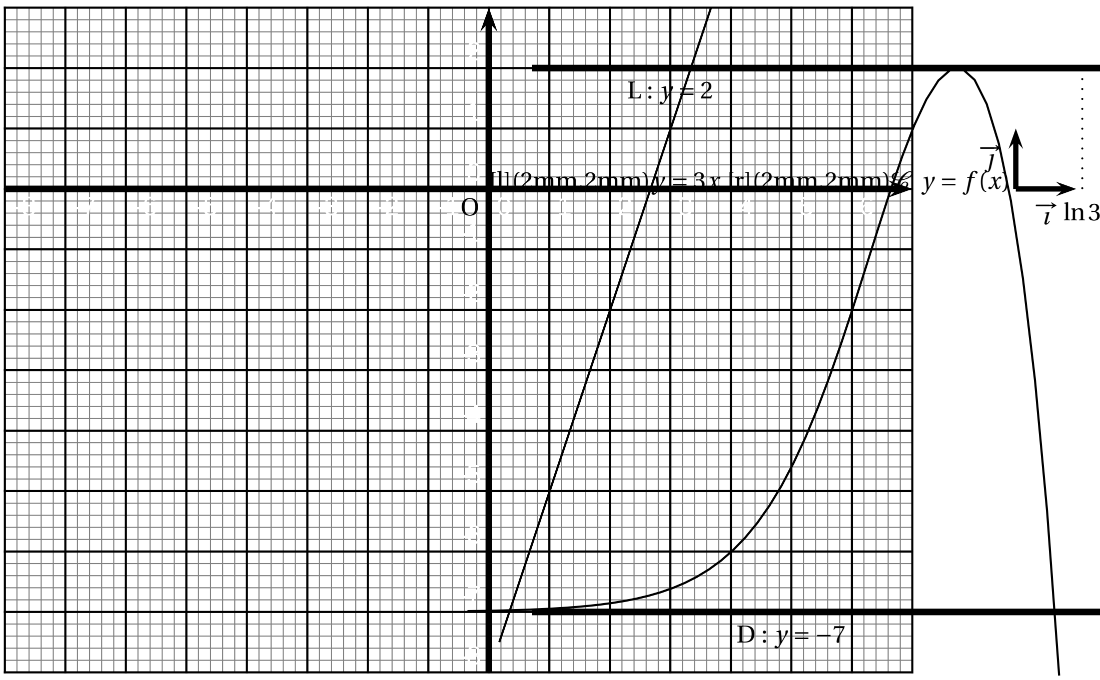
b. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

4. On veut modifier la mise afin que le jeu soit équitable, c'est-à-dire que $E(X)$ soit égale à zéro. Déterminer cette nouvelle mise en justifiant la réponse.

PROBLÈME **12 points**

Sur le graphique ci-dessous, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative, dans le repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Partie A

La droite L, d'équation $y = 2$, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\ln 3$.
La droite T, d'équation $y = 3x$, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
La droite D, d'équation $y = -7$, est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.
Déterminer, à l'aide de ces données, les réels suivants :

a. $f(0)$ et $f(\ln 3)$;

b. $f'(0)$ et $f'(\ln 3)$;

c. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Partie B

On admet que, pour tout réel x, $f(x) = a\text{e}^x + b + \dfrac{c}{\text{e}^x + 1}$ où a, b et c sont des constantes réelles.

1. **a.** Déterminer en fonction des réels a, b et c, les nombres suivants :

$$f(0) \,;\, f(\ln 3) \,;\, \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

b. En déduire un système d'équations vérifiées par a, b, et c.

Résoudre ce système et en déduire que $f(x) = -\text{e}^x + 9 - \dfrac{16}{\text{e}^x + 1}$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. **a.** Calculer $f'(x)$, pour tout réel x.

b. Vérifier que, pour tout réel x : $f'(x) = \dfrac{\text{e}^x(\text{e}^x + 5)(3 - \text{e}^x)}{(\text{e}^x + 1)^2}$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f.

Partie C

On rappelle que $f(x) = -\mathrm{e}^x + 9 - \dfrac{16}{\mathrm{e}^x + 1}$ pour tout réel x.

1. Vérifier que, pour tout réel x : $f(x) = -\mathrm{e}^x - 7 + 16\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.
2. **a.** Déterminer l'abscisse du point dintersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec la droite D d'équation $y = -7$.

   b. Étudier la position de D par rapport à $\mathscr{C}$.
3. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = 16\ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - \mathrm{e}^x - 7x.$$

   a. Montrer que F est une primitive de f.

   b. En déduire la valeur de l'intégrale $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^{\ln 15} [f(x) + 7]\,\mathrm{d}x$.

   c. Interpréter géométriquement l'intégrale $\mathscr{A}$.

∽ Baccalauréat STI La Réunion juin 2001 Génie électronique, électrotechnique, optique ∾

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\text{(E)} \qquad y'' + 9y = 0$$

où y est une fonction numérique de la variable réelle x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la solution particuliére f de l'équation (E) qui vérifie :

$$f(0) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{2}.$$

3. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

4. **a.** Résoudre sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$ l'équation $f(x) = -\sqrt{2}$.

   b. Représenter les solutions de cette équation sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 1 **5 points**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives z_{A}, z_{B}, et z_{C} définies par :

$$z_{\text{A}} = 2 + 2\text{i} \quad ; \quad z_{\text{B}} = -2 + 2\text{i}\ ;\ z_{\text{C}} = -\sqrt{3} + \text{i},$$

où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_{A}, z_{B}, et z_{C}.

   b. Placer de façon précise les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

2. **a.** Calculer $|z_{\text{A}} - z_{\text{B}}|^2$ et $|z_{\text{A}} - z_{\text{C}}|^2$, puis interpréter géométriquement les trois modules.

   b. En déduire la nature du triangle ABC.

3. On considère la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Pour tout point M du plan, on désigne par M' l'image de M par la rotation R : $M' = \text{R}(M)$. Les affixes respectives de M et M' sont notées z et z'.

   a. Exprimer z' en fonction de z.

   b. Soit A′= R(A). Calculer sous forme exponentielle l'affixe $z_{\text{A}'}$ du point A′.

4. **a.** Préciser le module et un argument de $z_{\text{A}'}$.

   b. Déterminer la forme algébrique de $z_{\text{A}'}$.

   c. Déduire des questions **a.** et **b.** les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

PROBLÈME **11 points**

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x-3)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Etudier les variations de g. (On ne demande pas les limites en $+\infty$ et en $-\infty$).
2. Calculer $g(4)$ et en déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f

$$f(x) = (2-x)\mathrm{e}^{-x} - x + 3$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. **a.** Calculer la dérivée f' de la fonction f.

   b. Déduire à l'aide de la **partie A** les variations de la fonction f.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.
3. **a.** Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x+3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

   b. Étudier, suivant les valeurs de x, la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α, appartenant à l'intervalle $[2\ ;\ 3]$.

   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
5. Tracer la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le plan muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
6. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$h(x) = (2-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

   Déterminer les réels a et b pour que la fonction H définie par $H(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
7. Soit t un réel supérieur à 2.

   Déterminer, en fonction de t, l'aire $\mathscr{A}(t)$ en cm^2 de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 1$.

   Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathscr{A}(t)$.

Baccalauréat STI La Réunion juin 2001
Génie civil, énergétique, mécanique (A et F)

EXERCICE 1 **5 points**

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 4 boules rouges portant respectivement les numéros 0, 1, 2, 4 et l'urne U_2 contient 3 boules vertes portant respectivement les numéros 1, 3, 5.
On tire au hasard et simultanément une boule de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2.

- a désigne le numéro de la boule tirée de U_1 et b celui de la boule tirée de U_2.
- z est le nombre complexe dont la partie réelle est a et la partie imaginaire b.

On suppose que les écritures algébriques $z = a + \mathrm{i}b$ possibles sont équiprobables.
Les probabilités demandées seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Dresser une liste de toutes les écritures algébriques possibles de z.
2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   a. E_1 : « $z = 1 + 3\mathrm{i}$ »,
   b. E_2 : « $z + \overline{z} = 2$ ».
3. On désigne par A l'évènement « le module de z est 5 », et par B l'évènement « z est un imaginaire pur ».
   a. Calculer la probabilité de l'évènement A puis celle de l'évènement B.
   b. Définir par une phrase l'évènement $A \cap B$.
   Calculer la probabilité de cet évènement.
   c. En déduire la probabilité de l'évènement $A \cup B$.
4. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe $a + b$.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance mathematique $E(X)$ de X.

EXERCICE 2 **5 points**

On appelle f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; unité graphique 10 cm.

1. Représenter la courbe $(\mathscr{C})$.
2. **a.** Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   b. En déduire que la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ est égale à $\mathrm{e} - 2$.
   Donner l'arrondi au centième de μ.
   On désigne par $(\mathscr{P})$ la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$, et par $(\mathscr{R})$ la partie du plan limitée par la droite d'équation $y = \mu$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

3. a. Représenter $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{R})$ en utilisant des hachures.
   b. Justifier le fait que $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{R})$ ont la même aire.
4. On désigne par V_1 le volume, exprimé en unités de volume, du solide engendré par la rotation de la partie $(\mathscr{P})$ autour de l'axe des abscisses et par V_2 celui du solide engendré parla rotation de la partie $(\mathscr{R})$ autour du même axe.

$$\left(\text{On rappelle que } V_1 = \int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x\right).$$

On se propose de comparer V_1 et V_2.

   a. Calculer la valeur exacte de V_1.
   b. Calculer la valeur exacte de V_2.
   c. Calculer la valeur exacte de $V_1 - V_2$ puis donner un arrondi au millième. Conclure.

PROBLÈME **10 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : Détermination d'une fonction

On considère la fonction φ, définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = a - (bx+1)\ln(x+1),$$

où a et b sont deux nombres réels.

La courbe $\left(\mathscr{C}_\varphi\right)$, représentative de la fonction φ, satisfait aux conditions suivantes :

- $\left(\mathscr{C}_\varphi\right)$ passe par le point A de coordonnées $(0\,;\,\mathrm{e})$,
- $\left(\mathscr{C}_\varphi\right)$ passe parle point B de coordonnées $(\mathrm{e}-1\,;\,0)$.

1. Déterminer a puis b.
2. En déduire $\varphi(x)$.

Partie B : Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e} - (x+1)\ln(x+1).$$

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative.

1. a. Démontrer que la limite de f en -1 est égale à e. (On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} X\ln X = 0$).
   b. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. a. Démontrer, en la résolvant, que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
   Donner une valeur exacte puis la valeur décimale arrondie à 10^{-2} de α.
   b. Étudier le sens de variations de f sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
   c. Calculer la valeur exacte de $f(\alpha)$ et sa valeur décimale arrondie à 10^{-2}.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. a. Calculer les coefficients directeurs des tangentes (T_1) et (T_2) â la courbe $(\mathscr{C}_f)$ aux points d'abscisses respectives 0 et $\mathrm{e}-1$.
   b. Tracer les tangentes (T_1) et (T_2) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$. (Unité graphique : 5 centimètres).

Partie C : Calcul d'une aire

1. Soit G la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$G(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2[2\ln(x+1) - 1].$$

   Vérifier que G est une primitive de la fonction qui, à x associe $(x+1)\ \ln(x+1)$.
   En déduire une primitive F de f.

2. On désigne par $(\mathscr{P})$ la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

   a. Représenter $(\mathscr{P})$ sur la figure précédente en utilisant des hachures.

   b. Calculer la valeur exacte de l'aire de la partie hachurée, en cm^2.
   Donner sa valeur décimale arrondie à 10^{-2}.