Baccalauréat STI 2002

L'intégrale de septembre 2001 à juin 2002

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

France Génie électronique septembre 2001 3

France Génie civil septembre 2001 6

France Génie des matériaux septembre 2001 8

Nouvelle–Calédonie Génie mécanique nov. 2001 ... 10

France F 11 F 11′ juin 2002 12

France Arts apliqués juin 2002 15

France Génie électronique juin 2002 18

France Génie des matériaux juin 2002 20

France Génie mécanique juin 2002 23

Antilles Génie mécanique juin 2002 25

Antilles Génie mécanique juin 2002 28

La Réunion Génie mécanique juin 2002 31

La Réunion Génie électronique juin 2002 34

Baccalauréat STI France septembre 2001
Génie électronique, électrotechnique, optique

Durée : 4 heures — Coefficient : 4

EXERCICE 1 — **5 points**

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie et l'on note, dans l'ordre les résultats obtenus ; par exemple PFF correspond à « Pile - Face - Face ».
Les résultats sont équiprobables.

1. **a.** À l'aide d'un arbre, écrire tous les résultats possibles et indiquer pour chacun de ces résultats le nombre de fois où on a obtenu « Face ».

   b. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où on a obtenu « Face » sur les trois lancers. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité de X.

2. Une personne mise 10 euros pour participer à un jeu qui consiste à lancer trois fois de suite la pièce de monnaie.
   - S'il a obtenu moins de deux fois « Face », le joueur ne reçoit rien.
   - S'il a obtenu exactement 2 fois « Face », le joueur reçoit 10 euros.
   - S'il a obtenu exactement trois fois « Face », le joueur reçoit 30 euros.

   On désigne par Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur (c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et sa mise).

   a. Déterminer les valeurs que peut prendre Y.

   b. Donner la loi de probabilité de Y.

   c. Calculer l'espérance mathématique de Y.

3. On veut modifier la mise pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire que $\text{E}(Y)$ soit égal à 0.
   Déterminer cette nouvelle mise en justifiant votre réponse.

EXERCICE 2 — **5 points**

Le but de l'exercice est le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{1+2\sin x}\,\text{d}x$.

Pour cela, on introduit les fonctions f et g définies sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{1+2\sin x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\cos x}{1+2\sin x}$$

ainsi que les intégrales : $\text{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\text{d}x$ et $\text{J} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,\text{d}x$.

1. **a.** Montrer que $f(x) + g(x) = \cos x$.

   b. En déduire que $\text{I} + \text{J} = 1$.

2. **a.** Calculer la dérivée de la fonction u définie sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

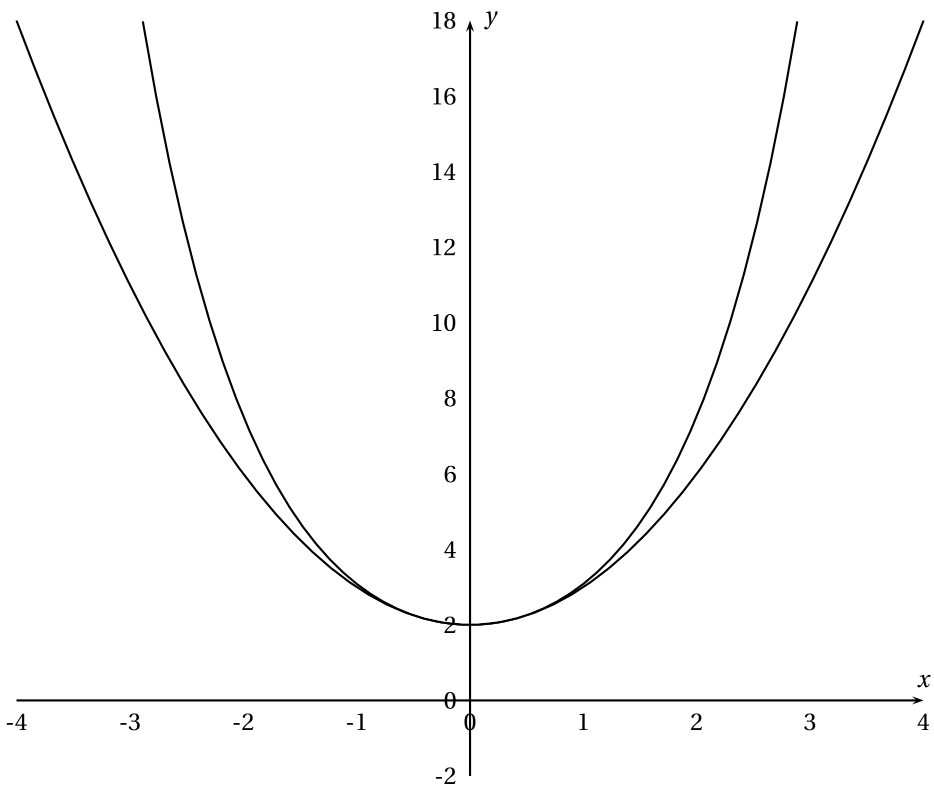
   $$u(x) = 1 + 2\sin x.$$

   b. En déduire une primitive de la fonction g sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c. Calculer J.

3. En utilisant les questions précédentes, déterminer la valeur exacte de I.

PROBLÈME **10 points**



On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = 2 + x^2.$$

Sur le graphique joint , on a tracé les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de ces fonctions dans un repère orthogonal (unité graphique : 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).
Dans la **partie A**, on étudie la fonction f. L'objet de la **partie B** est d'étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, puis de calculer une aire.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f et g sont des fonctions paires et interpréter géométriquement cette propriété.

2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
En déduire la limite de f en $-\infty$.

3. Calculer la fonction dérivée f' de f.
Montrer que pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$.
En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

4. Donner le tableau de variations de f.
5. a. Démontrer que $f(\ln 2) = \dfrac{5}{2}$.

   b. En déduire $f\left(\ln \dfrac{1}{2}\right)$.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 3$.

Partie B : Calcul d'une aire

Soit h la fonction définie sur $[0\ ;\ \infty[$ par :

$$h(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} - 2x.$$

1. a. Calculer la fonction dérivée h' de h.

   b. Montrer que $h'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^{x} - 1)^2}{\mathrm{e}^{x}}$.
   Établir le tableau de variations de la fonction h (on ne demande pas la limite en $+\infty$).

   c. En déduire que $h(x) \geqslant 0$, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$.
2. On considère la fonction r définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $r(x) = f(x) - g(x)$.

   a. Montrer que h est la fonction dérivée de r. En déduire les variations de r.

   b. Calculer $r(0)$ et montrer que $r(x) \geqslant 0$, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$.

   c. Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ pour $x \in [0\ ;\ +\infty[$.
3. a. Déterminer une primitive de la fonction r sur $\mathbb{R}$.

   b. Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^2 r(x)\,\mathrm{d}x$.

   c. En déduire l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limité par les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = -2$. (On donnera sa valeur exacte en unités d'aire, puis son approximation décimale à 10^{-2} près par défaut).

STI Métropole septembre 2001

Génie mécanique, civil, énergétique

EXERCICE 1 **6 points**

1. Résoudre l'équation différentielle (E) $y'' + \dfrac{1}{4}y = 0$ dans laquelle l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution particulière f de (E) vérifiant : $f(0) = 1$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
3. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
4. Étudier les variations de f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.
5. On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 4 cm).
   Tracer la courbe représentant la fonction f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ (sur papier millimétré).
6. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tels que $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et
   $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.
   Calculer, en cm^3, le volume $\mathscr{V}$ du solide de révolution engendré par la rotation de autour de l'axe (Ox).
   (On rappelle qu'en cm^3 : $\mathscr{V} = 64\pi \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$).

EXERCICE 2 **4 points**

Une urne U_1 contient 5 boules numérotées 1, 2, 3, 4 et 5. Une urne U_2 contient trois boules numérotées 2, 3 et 4. Un jeu consiste à tirer une boule au hasard dans chaque urne. Dans chaque urne, chaque boule a la même probabilité d'être tirée.
Si la boule tirée dans l'urne U_1 porte les numéros 1 ou 5, le joueur ne gagne rien. Si les deux numéros tirés sont identiques, le joueur reçoit 50 euros. Dans tous les autres cas, le joueur gagne 20 euros.

1. Compléter le tableau ci-dessous indiquant, en fonction du tirage, le gain du joueur.
2. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage des deux boules associe le gain du joueur.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance de X.
   c. Avant de jouer, chaque participant doit payer 15 euros. Le joueur a-t-il alors intérêt à participer à ce jeu ?
   d. Quelle somme faudrait-il attribuer au joueur dans le cas où les deux numéros seraient identiques, pour que le jeu soit équitable (gain de 0 euro et 20 euros ne changeant pas) ?

U_1 \ U_2	2	3	4
1			
2			20
3			
4			
5		0	

PROBLÈME **10 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + x$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité : 1 cm.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x} + 1.$$

1. Calculer $g'(x)$, puis étudier le signe de $g(x)$.

2. Calculer $g(2)$. Dresser le tableau de variations de g (les limites en $+\infty$ en $-\infty$ ne sont pas demandées). En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B : étude de f et représentation graphique

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2. Calculer $f'(x)$. Vérifier que $f'(x) = g(x)$. Dresser le tableau de variations de f.

3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

4. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

5. Tracer dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$ (sur papier millimétré).

Partie C : étude d'une aire

1. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = (-1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Calculer $H'(x)$.

2. Soit α un réel strictement positif. Soit (E) la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$. Calculer, en cm^2, l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de (E).

3. Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

STI Métropole septembre 2001

Génie mécanique B, C, D, E - Génie des matériaux

EXERCICE 1 **5 points**

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos 3x - 2\sin 3x.$$

   a. Déterminer $f'(x)$, f' étant la fonction dérivée de la fonction f.
   b. Déterminer $f''(x)$, f'' étant la fonction dérivée de la fonction f'.
   c. Trouver une relation simple entre $f''(x)$ et $f(x)$.

2. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + 9y = 0$.
   b. Déterminer la solution particulière g de cette équation qui vérifie :

$$g(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

3. a. Vérifier que pour tout x réel, $g(x) = \cos\left(3x - \frac{5\pi}{4}\right)$.
   b. Résoudre dans $[0\,;\,2\pi[$ l'équation $g(x) = 0$.
   c. Montrer que les solutions obtenues forment une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$.

EXERCICE 2 **4 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

1. On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
   a. Développer $\left(4 + 2\sqrt{2}\right)^2$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 4z - 2\left(2\sqrt{2} + 1\right) = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 7 = 0$.
3. On désigne par A, B, C, D les points du plan complexe d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = -\sqrt{2}, \quad z_{\mathrm{B}} = 4 + \sqrt{2}, \quad z_{\mathrm{C}} = 2 - \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad z_{\mathrm{D}} = 2 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

   a. Placer les points A, B, C, D dans le repère donné (sur papier millimétré).
   b. Montrer que les segments [AB] et [CD] ont le même milieu.
   c. Montrer que le quadrilatère ABCD est un losange.
4. Déterminer z_{E} et z_{F} affixes respectives de points E et F tels que AEBF soit un carré.
   Justifier votre réponse.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : étude des variations d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\text{I} =]-\ln 4\ ;\ +\infty[$ (où ln désigne le logarithme népérien) par :

$$f(x) = \frac{\text{e}^x + 8}{4\text{e}^x - 1},$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique : 2 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\ln 4$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

   b. Vérifier que, pour tout x de I, on a $f(x) = \dfrac{1 + 8\text{e}^{-x}}{4 - \text{e}^{-x}}$ puis déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote horizontale de $\mathscr{C}$ en

   c. Déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \dfrac{1}{4}$.

2. **a.** Montrer que pour tout x de I : $f'(x) = -\dfrac{33\text{e}^x}{(4\text{e}^x - 1)^2}$.

   b. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur I.

   c. Dresser le tableau de variations de f.

3. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Partie B : tracé de la courbe representative de la fonction f sur I

1. Reproduire et compléter le tableau suivant (les valeurs de $f(x)$ seront arrondies à 10^{-2} près).
2. Tracer la tangente $\mathscr{T}$, la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(sur papier millimétré).

x	0	0,	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$									

Partie C :

Dans le plan rapporté au repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on appelle $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$.

1. **a.** Vérifier que, tout x de l'intervalle $[0\ ;\ 4]$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \frac{33\text{e}^x}{4\text{e}^x - 1} - 8.$$

   b. Déterminer une primitive sur $[0\ ;\ 4]$ de la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{\text{e}^x}{4\text{e}^x - 1}.$$

   c. En déduire une primitive de f sur $[0\ ;\ 4]$.

2. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2.
   On donnera la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis une valeur approchée à 1 mm^2 près.

Baccalauréat STI Nouvelle–Calédonie
Génie des matériaux, mécanique
novembre 2001

EXERCICE 1 — 4 points

1. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\text{(E)} \qquad y'' + 9y = 0.$$

où y est une fonction numérique de la variable réelle x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie :

$$f(0) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{2}.$$

3. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi?}{4}\right)$.

4. **a.** Résoudre sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$ l'équation $f(x) = -\sqrt{2}$.

   b. Représenter les solutions de cette équation sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 2 — 5 points

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives z_{A}, z_{B} et z_{C} définies par :

$$z_{\text{A}} = 2 + 2\text{i} \quad ; \quad z_{\text{B}} = -2 + 2\text{i} \quad ; \quad z_{\text{C}} = -\sqrt{3} + \text{i}.$$

où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_{A}, z_{B} et z_{C}.

   b. Placer de façon précise les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

2. **a.** Calculer $|z_{\text{A}} - z_{\text{B}}|^2$, $|z_{\text{B}} - z_{\text{C}}|^2$ et $|z_{\text{A}} - z_{\text{C}}|^2$, puis interpréter géométriquement les trois modules.

   b. En déduire la nature du triangle ABC.

3. On considère la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Pour tout point M du plan, on désigne par M' l'image de M par la rotation R : $M' = \text{R}(M)$. Les affixes respectives de M et M' sont notées z et z'.

   a. Exprimer z' en fonction de z.

   b. Soit A$'$= R(A), Calculer sous forme exponentielle l'affixe $z_{\text{A}'}$ du point A$'$.

4. **a.** Préciser le module et un argument de $z_{\text{A}'}$.

   b. Déterminer la forme algébrique de $z_{\text{A}'}$.

   c. Déduire des questions **a.** et **b.** les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x-3)\mathrm{e}^{-x} - 1.$$

1. Étudier les variations de g. (On ne demande pas les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer $g(4)$ et en déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2-x)\mathrm{e}^{-x} - x + 3.$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. **a.** Calculer la dérivée f' de la fonction f.

   b. Déduire à l'aide de la **partie A** les variations de la fonction f.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.
3. **a.** Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x + 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

   b. Étudier, suivant les valeurs de x, la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α, appartenant à l'intervalle $[2\,;\,3]$.

   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
5. Tracer la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le plan muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
6. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2-x)\mathrm{e}^{-x}$.

   Déterminer les réels a et b pour que la fonction H définie par $H(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
7. Soit t un réel supérieur à 2.

   Déterminer, en fonction de t, l'aire $\mathscr{A}(t)$ en cm^2 de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = t$.

   Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathscr{A}(t)$.

Baccalauréat STI F11 F11′ France juin 2002

Calculatrice autorisée
Durée : 2 heures **Coefficient : 2**

EXERCICE **8 points**

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x} \quad \left(\text{On rappelle que } \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right).$$

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unités graphiques 4 cm. On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans ce repère.

La courbe $\mathscr{C}_g$ est tracée sur la feuille annexe qu'il faudra compléter et rendre avec la copie.

I. Étude de la fonction f .

1. Déterminer la limite de la fonction f au voisinage de $-\infty$.
2. On admet que la limite de la fonction f au voisinage de $+\infty$ est égale à 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Calculer $f'(x)$ et montrer que la fonction f a le même signe que $2x - x^2$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.
5. Sur la feuille annexe, tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le même repère.

II. Étude des positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

1. Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Déterminer graphiquement sur quels intervalles la courbe $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus la courbe $\mathscr{C}_f$.

PROBLÈME **12 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 4\ln x - x + 2.$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en 0.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

   b. Montrer que $f(x) = x\left(4\dfrac{\ln x}{x} - 1 + \dfrac{2}{x}\right)$ pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   En déduire la limite de f en $+\infty$. (On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$).
2. On désigne par f' la fonction dérivée de f.

   a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0~;~+\infty[$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et établir le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

3. **a.** Déterminer la valeur exacte de $f(2)$ et de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ en fonction de $\ln 2$.

b. Déterminer la valeur exacte de $f(\text{e})$ et de $f\left(\text{e}^2\right)$ en fonction de e.

c. Résoudre dans $]0~;~+\infty[$ l'équation $f(x) = -x-2$.

4. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant : (On donnera des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près.)

x	0,5	1	2	3	4	5	7	11	17
$f(x)$									

5. Tracer $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$

6. Dans le même repère, tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x-2$.
Comment peut-on graphiquement retrouver le résultat de la question **3. c.** ?

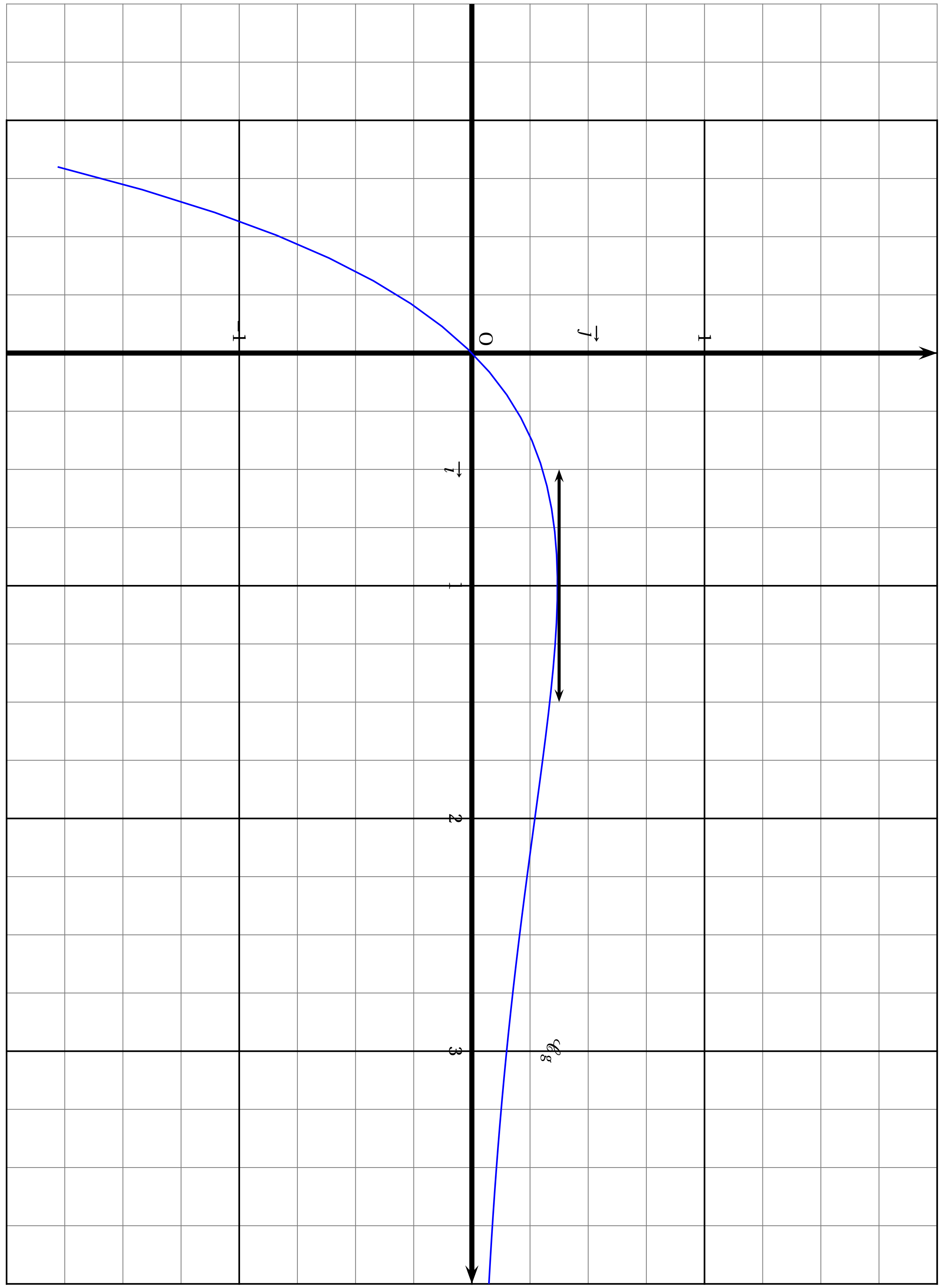
7. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$F(x) = 4x\ln x - 2x - \frac{x^2}{2}.$$

a. Démontrer que F est une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.

b. Calculer $\text{I} = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\text{d}x$. En donner la valeur exacte en fonction de $\ln 2$.

À RENDRE AVEC LA COPIE



Durée : 2 heures

Baccalauréat STI France Arts appliqués juin 2002

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Deux feuilles de papier millimétré sont mises à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **8 points**

Dans le repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ ci-dessous, on considère le rectangle RSTU de centre O et l'ellipse $\mathscr{E}$ inscrite dans ce rectangle. Le point R a pour coordonnées $(-4\,;\,3)$.

Reproduire la figure ci-dessous sur une feuille de papier millimétré.

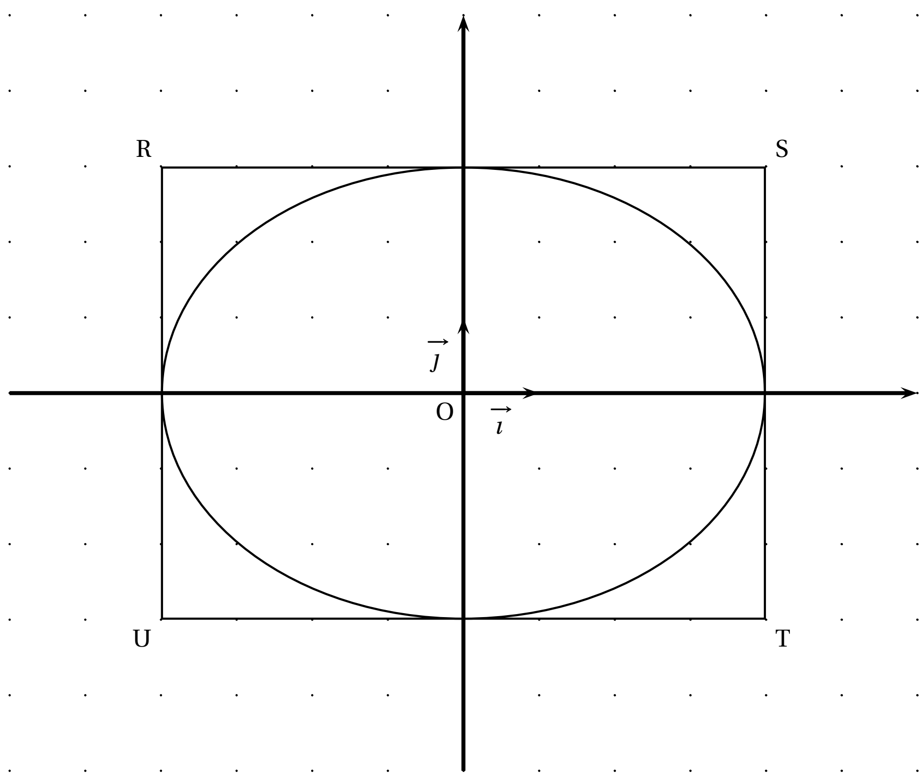
1. Placer les sommets de cette ellipse qu'on notera A, A′, B et B′ et préciser leurs coordonnées. On placera A et A′ sur l'axe focal. Décrire la construction géométrique des foyers F et F′ et préciser leurs coordonnées.
2. Parmi les égalités suivantes, choisir celle que vérifie tout point M de l'ellipse $\mathscr{E}$.

   $M\text{F} - M\text{F}' = 8$ $\qquad$ $M\text{F} + M\text{F}' = 6$ $\qquad$ $M\text{F} + M\text{F}' = 8$

3. Parmi les égalités suivantes, choisir celle qui est une équation de l'ellipse $\mathscr{E}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

   $9x^2 + 16y^2 = 144$ $\qquad$ $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ $\qquad$ $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{t^2}{9} = 1$

4. Déterminer l'ordonnée des points de $\mathscr{E}$ ayant pour abscisse 2.
5. On veut dessiner un carré de centre O dont les sommets sont des points de l'ellipse $\mathscr{E}$ et dont les côtés sont parallèles à ceux du rectangle. Quelle est la longueur du côté de ce carré ?



EXERCICE 2 **12 points**

Partie A Dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ dont l'unité graphique est 3 cm, on a tracé la courbe $\mathscr{P}$ représentative d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ où $a,\ b$ et $c$sont des nombres réels.

1. **a.** Déterminer graphiquement $g(0),\ g(1),\ g'(1)$

   b. En deduire les valeurs de $a,\ b,\ c$

2. Sachant que $g(x) = -x^2 + 2x + 1$, déterminer la primitive G de la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $G(0) = 0$.

3. Calculer l'intégrale I= $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction h définie sur [1,5 ; 4] par $h(x) = \dfrac{3-x}{x-1}$ et $\mathscr{H}$ la courbe représentative de h dans le même repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la fonction h', dérivée de la fonction h. Étudier son signe et en déduire les variations de h sur [1,5 ; 4].

2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe it' au point B(2 ; 1). On admettra que (T) est aussi tangente à $\mathscr{P}$ au même point B.

3. Sur une feuille de papier millimétré choisir un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ dont l'unité graphique est 3 cm et dont l'axe des abscisses est placé à mi-hauteur. On trace la courbe $\mathscr{H}$ et la droite (T).

4. Soit H la fonction définie sur [1,5 ; 4] par $H(x) = 2\ln(x-1) - x$. Vérifier que H est une primitive de la fonction h, puis calculer l'intégrale J= $\displaystyle\int_2^3 h(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie C

On considère maintenant la fonction f définie sur [0 ; 3] et telle que :

si $0 \leqslant x \leqslant 2$ alors $f(x) = g(x)$,

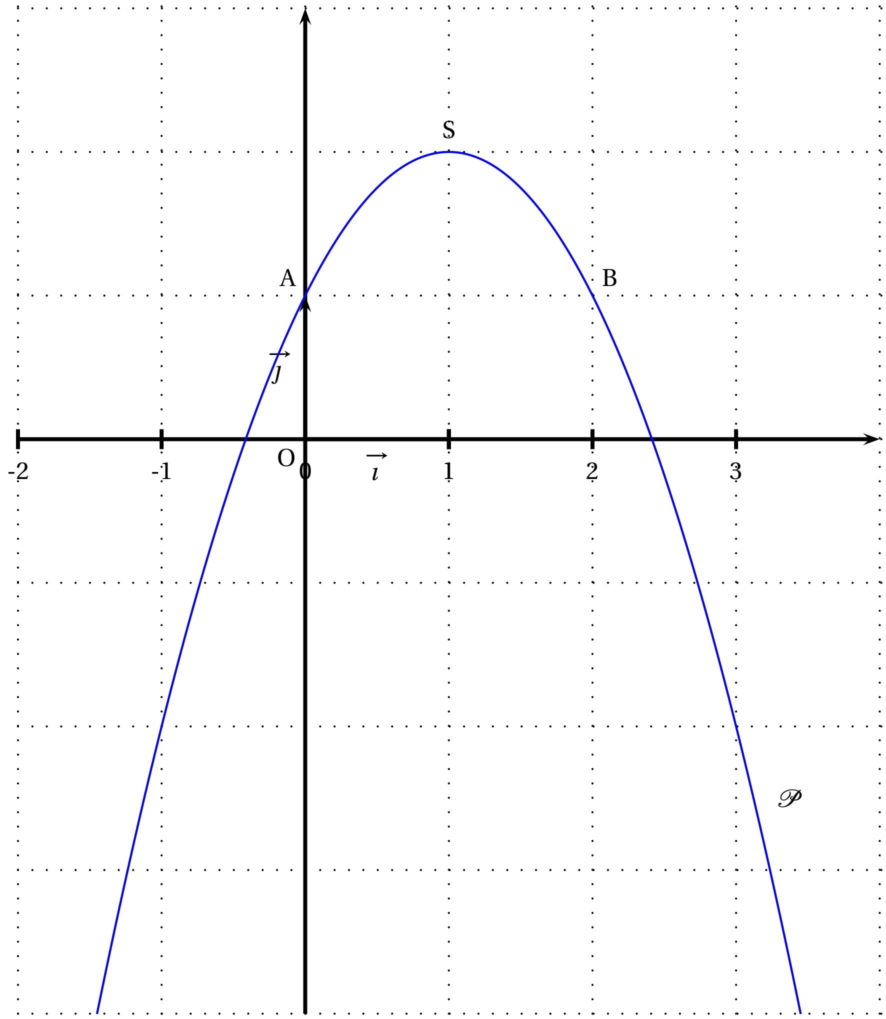
si $2 \leqslant x \leqslant 3$ alors $f(x) = h(x)$.

1. **a.** Sur le graphique de la partie B, reproduire la courbe $\mathscr{P}$ de la partie A, puis tracer en rouge la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f.

   b. Construire sur le graphique la courbe $\mathscr{C}'$ symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à 1'axe des abscisses .

2. Un publicitaire veut créer un logo dont le contour est formé par $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et l'axe des ordonnées. Prouver que l'aire de ce logo, en cm^2 est $\mathscr{A} = 18(\mathrm{I}+\mathrm{J})$. En donner la valeur exacte, puis une valeur approchée à 1 mm^2 près.

Annexe : exercice 2



Baccalauréat STI France Génie électronique juin 2002

EXERCICE 1 **6 points**

Dans le plan muni d'un repère orthononnal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 2 cm, on considère les points B, C, D, E et F, images respectives des nombres complexes :

$$z_{\text{B}} = 1 + \text{i}\sqrt{3},\ z_{\text{C}} = 3 + \text{i}\sqrt{3},\ z_{\text{D}} = 4,\ z_{\text{E}} = 3 - \text{i}\sqrt{3} \text{ et } z_{\text{F}} = 1 - \text{i}\sqrt{3}.$$

1. Écrire les nombres complexes z_{B}, z_{C}, z_{D}, z_{E} et z_{F} sous forme trigonométrique.
2. Construire à la règle et au compas les points B, C, D, E et F dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
3. Calculer les distances OB, BC et CD. En déduire les distances DE, EF et OF. Que constate-t-on ?
4. Calculer les mesures des angles $\left(\overrightarrow{\text{DC}}, \overrightarrow{\text{DO}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\text{OE}}, \overrightarrow{\text{OC}}\right)$, et $\left(\overrightarrow{\text{OD}}, \overrightarrow{\text{OC}}\right)$ en radians.
5. Quelle est la nature du triangle OCD ? Justifier la réponse.
6. Calculer les aires des triangles OCD et OBC.
   En déduire, en cm^2 l'aire du polygone OBCDEF.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = x$, où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle x et y' sa dérivée.

1. Résoudre l'équation différentielle (H) : $y' + y = 0$.
2. Déterminer les deux nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ est solution de l'équation (E).
3.
   a. Le nombre k désignant une constante réelle, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = k\text{e}^{-x} + x - 1.$$
   Vérifier que la fonction f est solution de l'équation (E).

   b. Déterminer le réel k pour que $f(0) = 0$.
4. Dans cette question, on prend $k = 1$.

   a. Calculer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

   b. En déduire une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

PROBLÈME **10 points**

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \text{e}^x(x + 3) - 1.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et la limite de g en $-\infty$.
2. Déterminer, à l'aide de la dérivée g', le sens de variations de g. En déduire le tableau de variation de g.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α qui appartient à lintervalle]- 4, 0[.
4. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ en fonction des valeurs de x.

Partie B : Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x + (x+2)\text{e}^{x}.$$

On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
(Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées)

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$.
   c. Étudier, en fonction des valeurs de x, les positions relatives de (D) et $(\mathscr{C}_f)$.
2. En remarquant que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = \text{e}^{x}\left[\dfrac{-x}{\text{e}^{x}} + (x+2)\right]$ déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Vérifier que pour tout x réel, on a $f'(x) = g(x)$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ en son point A d'abscisse 0.
6. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 10^{-2} près, puis une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.
7. Tracer, dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe $(\mathscr{C}_f)$, la tangente (T) et l'asymptote (D).
   (Utiliser la feuille de papier millimétré fournie)

Partie C : Calcul d'une aire

1. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$H(x) = (x+1)\text{e}^{x}.$$

   Calculer $H'(x)$ puis en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer, en cm^2 l'aire $\mathscr{A}$ de la surface comprise entre la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = -2$ et l'axe des ordonnées. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près .

Baccalauréat STI France juin 2002
Génie mécanique, génie des matériaux

EXERCICE 1 **5 points**

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2.$$

1. **a.** Montrer que 2 est une solution de l'équation $f(x) = 0$.
   b. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}$:
   $$f(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c).$$
   c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
2. En utilisant les résultats de la question 1., résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes
   a. $4\ln^3 x - 8\ln^2 x - \ln x + 2 = 0$;
   b. $4\mathrm{e}^{2x} - 8\mathrm{e}^x - 1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^x} = 0$.

EXERCICE 2 **5 points**

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère les trois nombres complexes :

$$z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad ; \quad z_2 = 4 \quad ; \quad z_3 = 2\left(1 + 4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right).$$

On appelle M_1, M_2 et M_3 leurs images respectives dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z_1 et de z_3.
2. Placer les points M1, M2 et M3 et dans le plan QP. O,5pt
3. **a.** Calculer sous forme trigonométrique les nombres complexes :
   $$z_1 - 2 \quad ; \quad z_2 - 2 \quad ; \quad z_3 - 2.$$
   b. En déduire que les trois points M_1, M_2 et M_3 sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
4. Montrer que le triangle $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ est rectangle.

PROBLÈME **10 points**

Le but de ce problème est l'étude de la conception, des caractéristiques et de la commercialisation d'une bobine de fil.

Partie A - Détermination d'une fonction f nécessaire à la conception d'une bobine

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 4]$, par

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité graphique : 1 cm).

On impose les conditions suivantes

- $f(0) = 2$;
- $f(2) = 1$;
- La courbe $\mathscr{C}$ admet en son point d'abscisse 2 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

1. Calculer a, b et c pour que les trois conditions précédentes soient remplies et en déduire que pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ 4]$, $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - x + 2$.

2. Montrer que la fonction admet sur $[0\,;\,4]$ un minimum que l'on précisera.

3. Construire la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie B - Conception et étude des caractéristiques de la bobine

Soit Δ la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$ l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$.

La rotation de la partie Δ autour de l'axe des abscisses engendre un solide (B).

Ce solide est la bobine ci-dessous dessinée, à gauche (fig. 1)

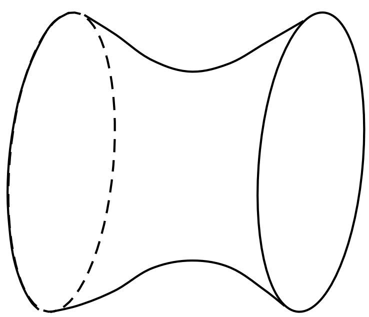


fig. 1 : bobine sans fil

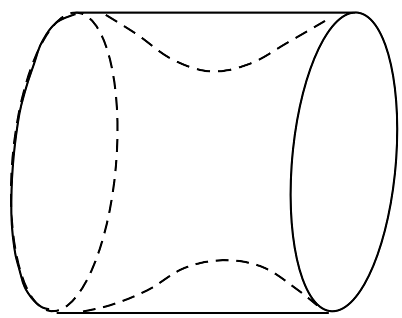


fig. 2 : bobine avec fil

1. **a.** Hachurer la partie Δ sur le graphique.

b. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$[f(x)]^2 = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 4x + 4.$$

c. En déduire la valeur exacte en cm^3 du volume V_1 de la bobine sans fil. (On rappelle que :

$$V_1 = \pi \int_0^4 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

2. Lorsque le fil est placé sur la bobine, l'ensemble « bobine avec fil » est assimilé à un cylindre (voir fig. 2).

a. Calculer la valeur exacte, en cm^3, du volume V_2 de ce cylindre.

b. En déduire la valeur exacte, en cm^3 du volume V occupé par le fil sur la bobine.

3. Le fabricant affirme que la bobine ainsi constituée contient 200 m de fil cylindrique de diamètre 0,4 mm.

Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?

Partie C - Commercialisation des bobines

À l'issue de la fabrication, une bobine de fil peut presenter 0, 1, 2 ou 3 défauts

- 90 % des bobines de fil ont 0 défaut ;
- 5 % des bobines de fil ont 1 défaut ;
- 3 % des bobines de fil ont 2 défauts ;
- 2 % des bobines de fil ont 3 défauts.

1. On choisit au hasard une bobine de fil. Calculer la probabilité qu'elle présente au plus un défaut.
2. Soil X la variable aléatoire qui, à chaque bobine de fil choisie au hasard, associe le nombre de ses défauts.
   a. Définir à l'aide d'un tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer l'espérance mathématique E(X) et donner une valeur approchée à 10^{-2} près de l'écart type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X
3. Le prix de vente d'une bobine de fil dépend du nombre de défauts qu'elle présente comme l'indique le tableau suivant :

Nombre de défauts	0	1	2	3
Prix (en euros)	5	3	2	1

   Soit Y la variable aléatoire qui à chaque bobine de fil choisie au hasard associe son prix,
   a. Définir la loi de probabilité de la valable aléatoire Y.
   b. Calculer l'espérance mathématique E(Y) de Y. Que représente E(Y) ?

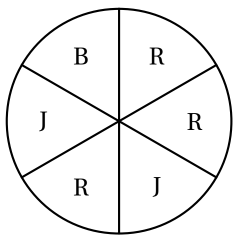
∽ Baccalauréat TSI France juin 2002 ∾
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 — 4 points

Partie A

Une roue de loterie comporte 3 secteurs, portant respectivement les numéros 1, 2 et 3. Quand on fait tourner la roue, un repère indique le numéro sortant.
La probabilité de sortie du numéro 2 est double de la probabilité de sortie du numéro 1, et la probabilité de sortie du numéro 3 est triple de celle du numéro 1.
Calculer les probabilités de sortie respectives des trois numéros.

Partie B



La roue est maintenant divisée en 6 secteurs égaux ayant chacun la même probabilité de s'arrêter devant le repère.
2 secteurs sont jaunes (marqués J sur la figure)
3 secteurs sont rouges (marqués R sur la figure)
1 secteur est bleu (marqué B sur la figure)

La règle du jeu est la suivante : pour participer au jeu, le joueur doit miser une certaine somme et si le jaune sort, il gagne 20 €, si le bleu sort, il gagne 30 €, si le rouge sort, il ne gagne rien.

1. Dans cette question, on suppose que la mise est de 10 €. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque arrêt de la roue associe le gain effectif (positif ou négatif) du joueur. (Par exemple, si le bleu sort, le gain effeffectif pour le joueur est de 20 €.
   a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer son espérance mathématique.
2. L'organisateur du jeu ne souhaite pas que l'espérance de gain du joueur sait positive. À quelle valeur minimale, exprimée par un nombre entier d'euros, doit-il fixer le montant de la mise ?

EXERCICE 2 — 5 points

1. Soit $P(z) = z^3 - 4z^2 + 9z - 10$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
   a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 2z + 5 = 0$.
   b. Calculer $P(2)$.
   c. Déterminer les réels $a,\ b$ et c tels que $P(z) = (z-2)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   d. Déduire des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

   On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = 2 \quad ; \quad z_B = 1 + 2\text{i} \quad ; \quad z_C = 1 - 2\text{i} \quad \text{et} \quad z_D = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{i}.$$

a. Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe (sur papier millimétré).

b. Calculer les modules des nombres complexes $z_A - z_D$, $z_B - z_D$ et $z_B - z_A$. En déduire la nature du triangle ABD.

Problème **11 points**

Partie A : Étude du signe de $x^3 - 1 + 2\ln(x)$

Soit g lafonction définie sur $]0~;~,+\infty[$ par

$$g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x.$$

($\ln x$ désigne le logarithme népérien de x)

1. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction g. (Les limites ne sont pas demandées).

3. Calculer $g(1)$.

4. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B : Courbe représentative d'une fonction et calcul d'aire

On considère la fonction f définie sur $]0~;~,+\infty[$ par

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

On appelle $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. (unités : 3 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

1. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$.

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$. Y a-t'il une autre asymptote à $(\mathcal{C})$? Si oui, donner son équation.

c. Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

d. En utilisant les résultats de la **partie A**, déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

e. Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote (D) et la courbe $(\mathcal{C})$.

Étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (D).

f. Tracer dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites (D) et (T).

2. **a.** Montrer que la fonction H définie par

$$H(x) = -\frac{1}{x}(1 + \ln x)$$

est une primitive de la fonction h définie sur $]0~;~+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

b. Soit Δ le domaine plan limité par (D), $(\mathcal{C})$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \sqrt{\text{e}}$.

Hachurer Δ ; calculer la valeur exacte de l'aire, en cm^2, de Δ ; en donner une valeur approchée au mm^2.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Antilles–Guyane juin 2002
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Une association propose chaque jour un spectacle au prix de 20 €. Pour en assurer la promotion, chaque client, à l'entrée, lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Les six résultats sont équiprobables :

- si le résultat est 6, l'entrée est gratuite ;
- si le résultat est 1, l'entrée est demi-tarif (10 €) ;
- dans les autres cas (2, 3, 4 ou 5), le client paie plein tarit (20 €).

Partie A

Un client se présente à l'entrée. Soit A l'évènement : « le client paie plein tarif ».

1. Déterminer la probabilité de A.
2. Énoncer par une phrase en français l'évènement contraire de A noté $\overline{\text{A}}$ puis déterminer la probabilité de $\overline{\text{A}}$.

Partie B

1. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat du dé, le prix payé par le client.
   a. Déterminer à l'aide d'un tableau de loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$.
2. Avant promotion, le prix unique était 20 € et l'association avait en moyenne 80 clients par jour. Depuis la promotion, la clientèle a augmenté de 40 %.
   En utilisant la question précédente, indiquer si l'association peut espérer de meilleures recettes grâce à la promotion.

EXERCICE 2 **6 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :
$$z^2 + 8z + 17 = 0.$$
2. Soit $P(z) = z^3 + 2z^2 - 31z - 102$.
   Vérifier que $P(z) = (z-6)\left(z^2 + 8z + 17\right)$.
3. Utiliser les questions **1.** et **2.** pour résoudre sans calcul supplémentaire l'équation suivante dans $\mathbb{C}$:
$$z^3 + 2z^2 - 31z - 102 = 0.$$

Partie B

1. a. Placer les points A, B et B′ d'affixes respectives :

$$6 \quad , \quad -4+\mathrm{i} \quad \text{et} \quad -4-\mathrm{i}$$

b. Pourquoi a-t-on OB = OB′ ?

c. Mettre sous forme algébrique $\dfrac{-4+\mathrm{i}}{-4-\mathrm{i}}$.

d. Quel est le module de $\dfrac{-4+\mathrm{i}}{-4-\mathrm{i}}$?

Déterminer à l'aide de la calculatrice, un argument de $\dfrac{-4+\mathrm{i}}{-4-\mathrm{i}}$ (on donnera l'arrondi à 10^{-2} près).

e. Déduire des questions b. et d., les mesures en degrés des angles du triangle ODB′. (On donnera les arrondis a l'unité).

2. Soit Ω le point d'affixe $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.

a. Construire les points C et D, symétriques des points A et B par rapport à Ω.

b. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

PROBLÈME **9 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^3 + x^2 + x + 1.$$

1. Calculer $g(-1)$; déterminer les nombres réels a et b tels que

$$g(x) = (x+1)\left(x^2 + ax + b\right).$$

2. Resoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(x) \geqslant 0$.

Partie B

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^3 - 2x^2 + 5x - 4\right)\mathrm{e}^x.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier le limite de f en $+\infty$: on remarquera que, pour $x \neq 0$:

$$f(x) = x^3\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)\mathrm{e}^x.$$

2. Étudier la limite de f en $+\infty$ On admettra que, pour n entier naturel :

$$\lim_{x\to 0} x^n\mathrm{e}^x = 0.$$

En déduirere l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}$.

3. Déterminer la dérivée f' de f. Vérifier que $f'(x) = g(x)\mathrm{e}^x$.

4. Étudier les variations de f à l'aide de la partie A puis dresser le tableau de variations de f où figurera la valeur exacte du minimum de f.

5. Recopier et compléter le tableau suivant à l'aide de la calculatrice en donnant les arrondis de $f(x)$ à 10^{-1} près.

x	-10	-5	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$											

6. Calculer $f'(1)$; en donner l'arrondi à 10^{-1} près : puis tracer la tangente (T) à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

7. Tracer $\mathscr{C}$.

Partie C

Soil F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \left(x^3 - 5x + 15x - 19\right) \mathrm{e}^x.$$

1. Vérrifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer en cm^2 l'aire de la portion de plan limitée par $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $y = 0$.
En donner l'arrondi à 10^{-1} près.

Baccalauréat STI Antilles juin 2002
Génie civil, énergétique, mécanique

EXERCICE 1 **4 points**

Soit i le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$

1. **a.** Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation en z

$$z^2 + 25 = 0.$$

   b. Déterminer le module et un argument de chacune des solutions.

2. **a.** Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation en z

$$z^2 - 2z + 5 = 0.$$

   b. Calculer, sous forme algébrique, le carré de chacune des solutions de cette équation.

3. Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -3 - 4\text{i} \quad z_{\text{B}} = -3 + 4\text{i} \quad z_{\text{C}} = 5\text{i} \quad z_{\text{D}} = -5\text{i}.$$

   a. Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

   b. Démontrer que le triangle BCD est rectangle.

   c. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 **4 points**

Deux tableaux sont donnés. Ils sont à compléter et à rendre avec la copie.

Une machine fabrique, en grande quantité, des pièces métalliques rectangulaires qui peuvent présenter trois sortes de défauts un défaut d'épaisseur, un défaut de longueur, un défaut de largeur.

Dans un lot de 1000 pièces, fabriquées par cette machine, 90 % des pièces n'ont aucun défaut, 0,2 % ont les trois défauts et 26 pièces ont comme seul défaut un défaut d'épaisseur.

Parmi les 950 pièces n'ayant pas de défaut d'épaisseur, il y a 29 pièces qui ont un défaut de longueur et 10 pièces qui ont un défaut de longueur et un défaut de largeur.

Parmi les pièces ayant un défaut d'épaisseur, 24 % ont un défaut de longueur.

1. **a.** Compléter les deux tableaux suivants.

Pièces n'ayant pas de défaut d'épaisseur			
Longueur / Largeur	Pièces ayant un défaut de longueur	Pièces n'ayantpas de défaut de longueur	
Pièces ayant un défaut de largeur	10		
Pièces n'ayant pas de défaut de largeur			
	29		950

Pièces n'ayant pas de défaut d'épaisseur			
Longueur / Largeur	Pièces ayant un défaut de longueur	Pièces n'ayantpas de défaut de longueur	
Pièces ayant un défaut de largeur			
Pièces n'ayant pas de défaut de largeur		26	

b. On choisit au hasard une pièce dans ce lot de 1 000 pièces et on suppose tous les tirages équiprobables.

On définit les évènements suivants :

– A : « la pièce possède un seul défaut » ;

– B : « la pièce possède deux défauts et deux seulement ».

Montrer que : $p(\text{A}) = 0{,}066$ et $p(\text{B}) = 0{,}032$.

2. On désigne par X la variable aléatoire qui, à toute pièce tirée au hasard dans ce lot de 1000 pièces, associe le nombre de défauts de cette pièce.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable X. On donnera les résultats sous forme de tableau.

b. Calculer la valeur exacte de l'espérance mathématique $\text{E}(X)$.

PROBLÈME 12 points

Soit la fonction numérique f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3\ln x}{2x^2} + x - 1.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ l'unité de longueur est 2 cm.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction numérique g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 6\ln x + 3.$$

1. Déterminer le signe de $x^3 - 1$ suivant les valeurs de x, élément de $]0\,;\,+\infty[$.

On pourra utiliser le fait que

$$x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right),\ \text{pour tout réel } x.$$

2. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe pour tout x élément de $]0\,;\,+\infty[$. Donner les variations de la fonction g.

3. En déduire que, pour tout x élément de $]0\,;\,+\infty[$, $g(x)$ est strictement positif

Partie B - Étude de la fonction f

1. Calculer la limite de $\dfrac{\ln x}{x^2}$ quand x tend vers 0, en justifiant la réponse.

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

2. a. Préciser la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

b. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

c. Déterminer la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.

3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2x^3}, \quad \text{pour tout } x \text{ élément de }]0\,;\,+\infty[.$$

En déduire le sens de variation de la fonction f.

4. a. Soit K le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point K.

b. Tracer avec soin la droite $\mathcal{D}$, la droite $\mathcal{T}$ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie C – Calcul d'une aire

1. Soit la fonction numérique h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{1 + \ln x}{x}.$$

Soit h' la fonction dérivée de la fonction h. Calculer $h'(x)$.

2. En déduire une primitive de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. On considère la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

a. Hachurer cette partie du plan, puis calculer la valeur exacte de son aire en cm^2.

b. Donner la valeur arrondie au mm^2 de cette aire.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI La Réunion juin 2002
Génie mécanique, énergétique, civil

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Une feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$.
   On notera z_1 et z_2 les solutions de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.
3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 2 + 2\text{i}, \quad z_{\text{B}} = 2 - 2\text{i}, \quad z_{\text{C}} = 2 + 2\sqrt{3} \text{ et } z_{\text{D}} = 2 + 2\sqrt{3} + 4\text{i}.$$

   a. Placer dans le plan complexe les points A, B, C et D.
   b. Calculer les longueurs AB, AC et BC. Quelle est la nature du triangle ABC ?
   c. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{DC}}$.
   d. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

EXERCICE 2 **5 points**

Une roue de loterie est partagée en 20 secteurs identiques :

- 1 secteur porte la marque « 100 € » ;
- 2 secteurs portent la marque « 50 € » ;
- 3 secteurs portent la marque « 20 € » ;
- 6 secteurs portent la marque « 10 € » ;
- 8 secteurs portent la marque « 0 € ».

Après avoir misé 10 euros, un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe. Chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant le repère. Le joueur touche la somme indiquée par le secteur se trouvant devant le repère.

1. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain effectif du joueur ; exemple : si un secteur « 50 € » est devant le repère, le gain effectif est de 40 euros en tenant compte de la mise. Une perte est un gain négatif.

   a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   b. Donner la loi de probabilité de X à l'aide d'un tableau.
   c. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. L'organisateur de la loterie souhaite que le jeu lui soit favorable.
   Il construit une nouvelle roue avec n secteurs identiques ($n > 12$). Cette roue comporte un secteur « 100 € », 2 secteurs « 50 € », 3 secteurs « 20 € », 6 secteurs « 10 € » et $n - 12$ secteurs « 0 € ».
   Le jeu se déroule de la même manière que précédemment : le joueur mise 10 euros et X désigne à nouveau le gain effectif.

a. Donner la nouvelle loi de probabilité de X en fonction de n.

b. Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de n.

c. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que le jeu soit favorable à l'organisateur, c'est-à-dire tel que l'espérance mathématique de X soit inférieure ou égale à 0.

PROBLÈME **11 points**

Le but du problème est la recherche des solutions de l'équation :

$$\mathrm{e}^{x+1} - \frac{2x}{x-1} = 0.$$

Soit u la fonction définie sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ par $u(x) = \mathrm{e}^{x+1}$ et soit v la fonction définie sur $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ par $v(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.

On désigne par $(\mathscr{C}_u)$ et $(\mathscr{C}_v)$ leurs courbes représentatives dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A - Étude des fonctions$u$ et v

1. **a.** Étudier la limite de u en $+\infty$ et la limite de u en $-\infty$.
En déduire que $(\mathscr{C}_u)$ admet une asymptote que l'on précisera.

b. Étudier le sens de variations de u.

2. **a.** Déterminer : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} v(x)$, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} v(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} v(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} v(x)$.
En déduire que $(\mathscr{C}_v)$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

b. Étudier le sens de variation de v. Dresser son tableau de variations.

3. **a.** Construire les courbes $(\mathscr{C}_u)$ et $(\mathscr{C}_v)$ sur le même graphique.

b. En déduire graphiquement le nombre de solutions de l'équation
$\mathrm{e}^{x+1} - \dfrac{2x}{x-1} = 0$.
Donner graphiquement une valeur approchée de chacune des solutions.

Partie B - Résolution de l'équation

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x+1} - \frac{2x}{x-1}.$$

1. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}$, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$.
Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

b. Calculer $f(-1)$.

2. On se place à présent sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α sur cet intervalle.
Calculer $f(1{,}2)$, puis $f(1{,}3)$. En déduire un encadrement de la solution α.

b. Calculera α à 10^{-2} près.

Partie C - Calcul d'aire

On considère toujours la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \text{e}^{x+1} - \frac{2x}{x-1}.$$

1. Montrer que sur $]-\infty\,;\,1[$, la fonction G définie par

$$G(x) = 2x + 2\ln(1-x)$$

est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.

En déduire une primitive de la fonction f sur $]-1\,;\,1[$.

2. **a.** Soit a un réel de l'intervalle $]-1\,;\,1[$. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par les courbes $(\mathscr{C}_u)$ et $(\mathscr{C}_v)$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = a$.

b. Déterminer la limite de cette aire lorsque a tend vers 1.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI La Réunion juin 2002
Génie électronique, électrotechnique, optique

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Une feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **4 points**

Soit l'équation différentielle

$$(\text{E}) \quad : \quad 2y' + y = 0,$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle x et y' sa dérivée.

1. Résoudre l'équation (E).
2. **a.** Déterminer la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ dans le plan rapporté à un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$passe par le point A $(\ln 9 ; 1)$.

   b. Determiner la dérivée de f et en déduire le coefficient directeur de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point A.
3. Montrer que la fonction g définie dans $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{2}\text{e}^{-\frac{1}{2}x}$ est une autre solution de l'équation (E).

EXERCICE 2 **4 points**

La figure sera construite sur la copie et complétée au fil de l'exercice

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 3 cm.

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 + 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

   b. Déterminer le module et un argument de chacune des solutions.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 2\text{e}^{\frac{5\text{i}\pi}{6}}$ et $z_{\text{B}} = 2\text{e}^{\frac{-5\text{i}\pi}{6}}$.

   a. Écrire les nombres complexes z_{A} et z_{B} sous forme algébrique.

   b. Dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, construire les points A et B à la règle et au compas.
   (On laissera apparentes les lignes de construction).
3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   a. On désigne par A$'$ l'image de A par la rotation r. Placer le point A$'$.
   Exprimer l'affixe $z_{\text{A}'}$ du point A$'$ en fonction de celle du point A puis en déduire la forme exponentielle et la forme algébrique de $z_{\text{A}'}$.

b. Soit le point C d'affixe $z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
Placer le point C dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Montrer que C est l'image de B par la rotation r et écrire z_C sous la forme algébrique.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 2\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}.$$

1. Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers -1.
2. Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Soit g' la dérivée de g sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
   a. Calculer $g'(x)$.
   b. En déduire que $g'(x)$ est strictement positif pour tout x de $]-1\,;\,+\infty[$.
   c. En déduire le sens de variations de g sur $]-1\,;\,+\infty[$.
4. **a.** Calculer $g(0)$.
   b. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (2x+1)\ln(x+1) - x - 1$$

et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers -1.
   b. En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote (D) dont on donnera une équation.
2. **a.** Vérifier que pour tout x de $]-1\,;\,+\infty[$ on a : $f(x) = x\left[\left(2+\frac{1}{x}\right)\ln(x+1) - 1 - \frac{1}{x}\right]$.
   b. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. **a.** Montrer que pour tout x de l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ on a $f'(x) = g(x)$.
   b. En déduire le tableau de variations de f.
4. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions a et b sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
   Donner pour chacune l'approximation décimale à 10^{-2} près par défaut.
5. Construire l'asymptote (D) et la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (*utiliser la feuille de papier millimétré fournie*).

Partie C

Soit la fonction U définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$U(x) = \left(x^2 + x\right)[\ln(x+1) - 1].$$

1. Montrer que U est une primitive de f sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

2. En déduire la valeur exacte en cm^2 de l'aire $\mathscr{A}$ de la portion du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$. On donnera le résultat final sous la forme $n\ln 2 + p$ où n et p sont des nombres entiers relatifs.