Baccalauréat STI 2003

L'intégrale de septembre 2002 à juin 2003

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat STI La Réunion septembre 2002
Génie énergétique, civil, mécanique

EXERCICE 1 **5 points**

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Le plan complexe est rapporté un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

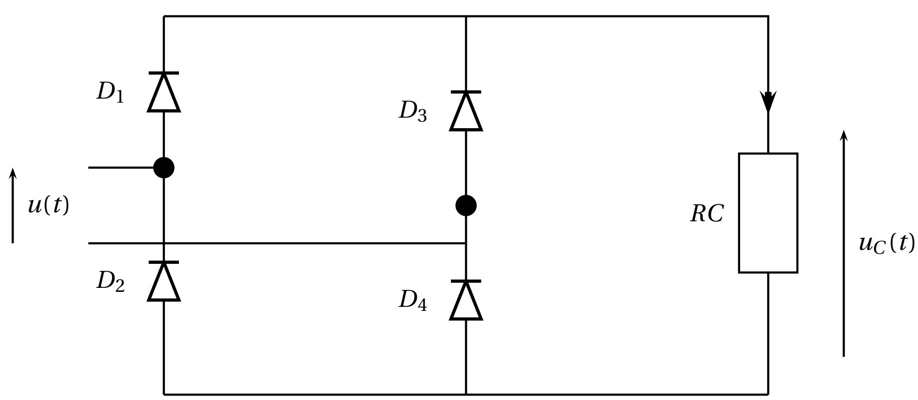
1. Soit P le polynôme défini par $P(z) = z^3 - 2z^2 + 16$.
   - **a.** Trouver la valeur du nombre réel a, tel que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z+2)\left(z^2 + az + 8\right)$.
   - **b.** Résoudre alors l'équation : $P(z) = 0$.
2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 2 + 2\text{i} \quad ; \quad z_{\text{B}} = 2 - 2\text{i} \quad ; \quad ;\text{C} = -2.$$

   - **a.** Donner la forme trigonométrique de z_{A}, z_{B} et z_{C}.
   - **b.** Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
3. Soit B$'$ le point d'affixe 4i.
   - **a.** Trouver l'affixe du point Ω milieu de [BB$'$].
   - **b.** Montrer que les pointa B, B$'$ et C appartiennent à un cercle de centre Ω dont on déterminera le rayon.

EXERCICE 2 **4 points**

On désire redresser une tension sinusoïdale alternative à l'aide d'un montage redresseur à diodes :



La tension $u(t)$ est exprimée en volts et t en secondes.
La courbe représentant la tension $u(t)$ relevée à l'oscilloscope est donnée, en annexe.
L'intervalle $\left[0\,;\,2\cdot10^{-2}\right]$ correspond à une période de la fonction u.

1. $u(t)$ est de la forme $u(t) = \text{U}\sin(\omega t + \varphi)$, où U et ω sont des réels strictement positifs et φ un réel appartenant à $]-\pi\,;\,\pi]$.
   On suppose, conformément à la représentation graphique de la fonction $t \mapsto u(t)$, que $u(t)$ est nulle pour $t = 0$, pour $t = 10^{-2}$ et pour $t = 2\cdot10^{-2}$ et que

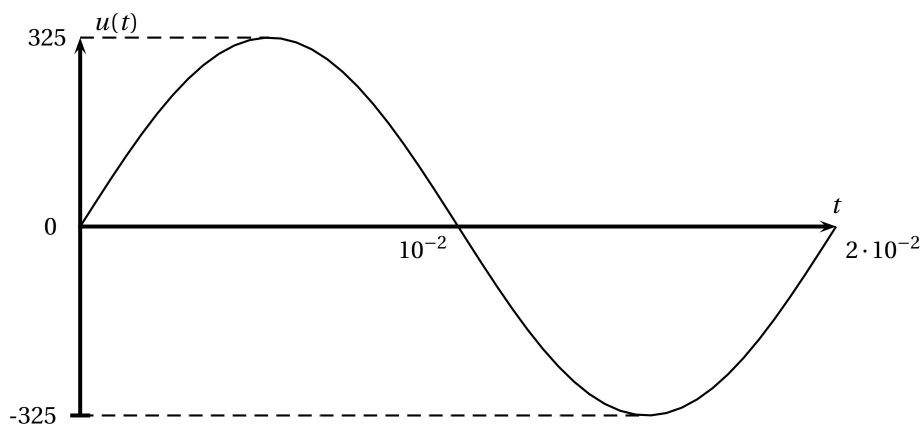
la valeur maximale de $u(t)$ est 325.
Déterminer, à l'aide de la courbe, la période T et le réel φ. On rappelle que $\mathrm{T}=\dfrac{2\pi}{\omega}$; en déduire la valeur exacte de la pulsation ω.

2. On admet désormais que la tension $u(t)$ est donnée par $u(t) = 325\sin(100\pi t)$.
   La tension redressée $u_C(t)$ est telle que :
   – si $t \in \left[0\,;\,10^{-2}\right]$, $u_C(t) = u(t)$,
   – si $t \in \left[10^{-2}\,;\,2\cdot 10^{-2}\right]$, $u_C(t) = -u(t)$.

   a. Sur le dessin donné en annexe, tracer la représentation graphique de u_C sur l'intervalle $\left[0\,;\,2\cdot 10^{-2}\right]$. (Cette feuille est à rendre avec la copie.)

   b. Calculer la valeur moyenne de la tension redressée $u_C(t)$ sur $\left[0\,;\,2\cdot 10^{-2}\right]$.

Annexe à rendre avec la copie



PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.
Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 2x - 5 + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 2x^2 - 2 + \ln x$.

1. Calculer $g'(x)$, puis étudier le signe de $g'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de g (les limites en 0 et en $+\infty$ ne sont pas demandées).
   Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

Partie B : étude de *f* et représentation graphique

1. **a.** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   b. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$. En déduire l'existence d'une droite asymptote à $\mathscr{C}$.

2. Calculer $f'(x)$. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 5$ est te à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
4. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β ($\alpha < \beta$) sur $]0~;~+\infty[$.
   Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de chacune d'elles.
6. Tracer, dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : étude d'une aire

1. Soit H la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$.
   Calculer $H'(x)$.
2. Soit $\mathscr{E}$ la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$ la droite Δ et les droites d'équarions $x = \text{e}$ et $x = 5$. (e : base du logarithme népérien).
   Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire de $\mathscr{E}$. En donner également une valeur approchée à 1 mm^2 près.

Baccalauréat STI France septembre 2002
Génie électronique électrotechnique, optique

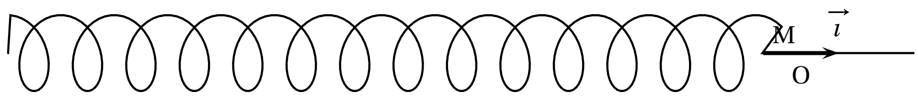
EXERCICE 1 **4 points**

Dans l'urne A sont disposées 3 boules jaunes portant les indications + 3 ; −3 ; 1.
Dans l'urne B sont disposées 3 boules vertes portant les indications + 3i ; −3i ; i.
On tire une boule jaune puis une boule verte ; cela permet d'obtenir un nombre complexe z.
(Par exemple si on tire la boule jaune marquée 3 puis la boule verte marquée, i, le résultat est le nombre complexe $z = 3 + \text{i}$.

1. Quels sont les différents résultats possibles ?
   On suppose dans tout, la suite que chacun de ces résultats a la même probabilité d'être obtenu.
2. Quelle est la probabilité p_1 que le nombre complexe obtenu ait un module égal à $3\sqrt{2}$.
3. Soit les quatre tirages $z_{\text{A}}, z_{\text{B}}, z_{\text{C}}$ et z_{D},de module $3\sqrt{2}$ et A, B, C et D les points d'affixes correspondantes.
   Représenter sur votre copie ces quatre points dans un plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique 2 cm) et montrer que A, B, C et D sont les sommets d'un carré.
4. On gagne la somme S, en euros, égale au carré du module du nombre complexe obtenu. Par exemple si le complexe obtenu est $z = 3 + \text{i}$ alors $|z|^2 = 10$ et la somme S est 10 euros.
   Quelle est la loi de probabilité de S et quelle est l'espérance de gain au cours d'une partie ?

EXERCICE 2 **4 points**

Aucune connaissance de physique n'est nécessaire pour résoudre cet exercice



Un ressort à spires est attaché à son extrémité fixe A. On attache un mobile à son autre extrémité M.
On admet que l'abscisse du point M dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ vérifie l'équation différentielle du second ordre (E) $\quad y'' + 9y = 8\sin t$, où y est une fonction du temps t (variable réelle positive).

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'' + 9y = 0$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par
   $$g(t) = A.\cos 3t + B.\sin 3t + \sin t \quad (A \text{ et } B \text{ réels})$$
   est une solution de l'équation différentielle (E).
3. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le ressort étant compressé, le mobile passe en O avec une vitesse de 4 m.s^{-1}.
   On considère la fonction h définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :
   $$h(t) = A.\cos 3t + B.\sin 3t + \sin t.$$

Déterminer A et B pour que h soit la solution de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales : $h(0) = 0$ et $h'(0) = 4$.

4. On admet dans cette question que :

$$\sin 3t = -4\sin^3 t + 3\sin t.$$

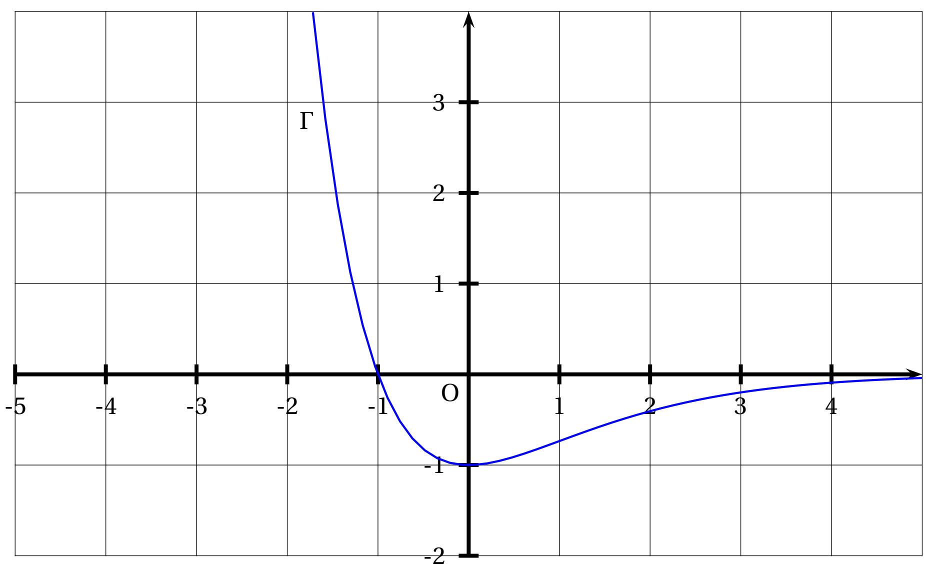
Chercher les instants t où le mobile repasse par le point de départ, c'est-à-dire résoudre dans l'ensenshle $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation $h(t) = 0$.

PROBLÈME **12 points**

Sur le graphique ci-dessous, Γ est la courbe représentative dans le repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ (figure 1).

On suppose que

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement monotone sur les intervalles $]-\infty\ ;\ 0]$ et $[0\ ;\ +\infty[$,
- $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- Γ passe par les points A$(-1\ ;\ 0)$ et B$(0\ ;\ -1)$.
- la droite d'équation $y = -1$ est tangente à la courbe Γ au point B.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$,
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe lorsque x tend vers $+\infty$.



Première partie : travaux sur *f*

A. Gestion des données

1. Quelles sont les valeurs numériques de $f(0)$, de $f(-1)$ et de $f'(0)$? Justifier votre réponse.
2. Quelle est la limite de f en $+\infty$. Justifier votre réponse.
3. Donner le tableau de variations de la fonction f.
4. Donner le signe des nombres dérivés $f'(-2)$ et $f'(3)$ en justifiant votre réponse.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$
   – l'équation $f(x) = 0$,
   – l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

B. Détermination de l'expression de $f(x)$

On suppose que $f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont deux constantes réelles, et x la variable réelle.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout x réel en fonction de a et de b.
2. En utilisant la question A. 1 . précédente, déterminer les valeurs de a et de b.

Deuxième partie : travaux sur une primitive de f sur $\mathbb{R}$
A

1. Donner le signe de f d'après la courbe Γ donnée par la figure 1.
2. Justifier pourquoi, parmi les courbes proposées sur l'annexe, les courbes $\mathscr{C}_G$ et $\mathscr{C}_H$, ne peuvent pas représenter une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   (On appelle F une primitive de f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_F$ est également tracée sur l'annexe (figure 2).

B

1. Déterminer une equation de la tangente à $\mathscr{C}_F$ en son point d'abscisse 0.
2. Déterminer (sans chercher l'expression de $F(x)$ en fonction de x l'aire $\mathscr{A}$ (en unités d'aire) de la portion du plan délimitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

Troisième partie : étude de la fonction F sur $\mathbb{R}$
On suppose désormais que, pour tout x réel, $F(x) = (x+2)\text{e}^{-x}$. **A**

1. Calculer $F'(x)$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x)$.
3. **a.** Montrer que pour tout x réel on a $F(x) = \dfrac{x}{\text{e}^x} + \dfrac{2}{\text{e}^{-x}}$.
   b. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
   c. En déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera une équation.

B. On se propose dans cette question de déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite D d'équation $y = 3x+6$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x+2)\left(\text{e}^x - 3\right) = 0$.
2. En déduire les coordonnées des points recherchés.

Annexe

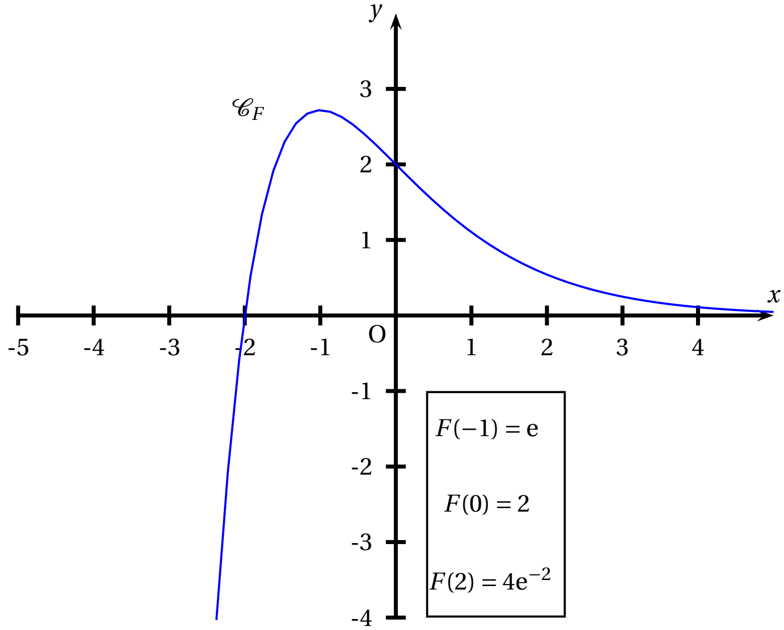


Figure 2 : fonction F

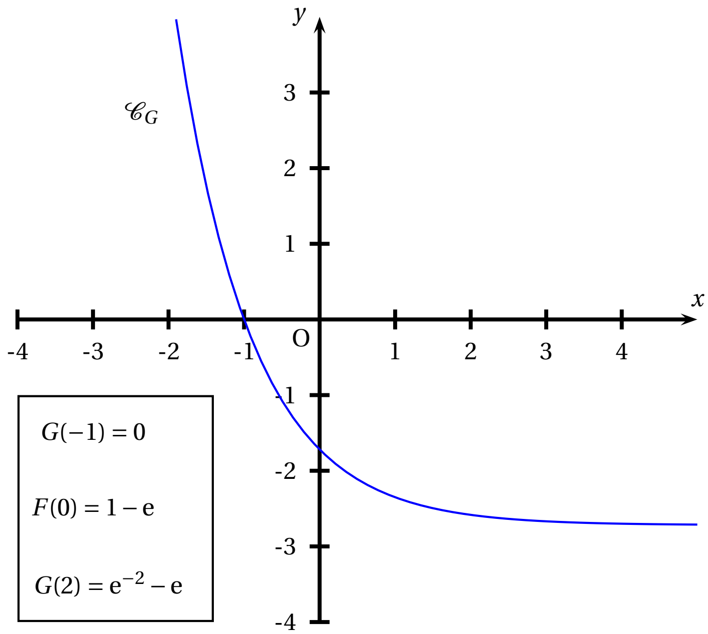


Figure 3 : fonction G

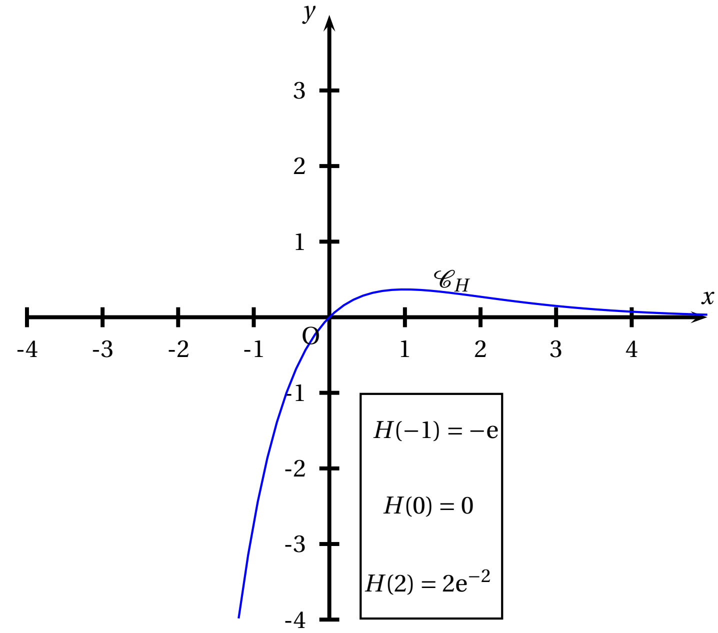


Figure 4 : fonction H

Baccalauréat STI La Réunion septembre 2002
Génie mécanique B, C, D, E, des matériaux

EXERCICE 1 **5 points**

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère les deux nombres complexes :

$$z_1 = 2\sqrt{3} + 2\text{i} \text{ et } z_2 = 2\sqrt{2} - 2\text{i}\sqrt{2}.$$

1. Donner le module et un argument des deux nombres com- plexes z_1 et z_2. En déduire le module et un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm. Utiliser les résultats obtenus dans la question 1, pour placer les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2 en faisant apparaître les traits de construction.
3. Vérifier que $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \text{i}\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. En comparant les formes algébrique et trigonométrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$ donner les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$
4. Soit C le point d'affixe $z_3 = 4\dfrac{z_1}{z_2}$. Placer le point C sur la figure faite à la question 1.
5. Montrer que les trois points A, B et C sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère l'équation différentielle

$$4y'' + 9y = 0 \quad \text{(E)}$$

où y désigne une fonction n numérique de la variable réelle x, deux fois dérivable, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Soit g la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x, par : $g(x) = 2\cos\left(\dfrac{3x}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)$.
   Vérifier que g est une solution particulière de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la solution particulière f de (E) telle que : $f(\pi) = 1$ et $f'\left(\dfrac{5\pi}{9}\right) = 0$, f' désignant la fonction dérivée de f.
4. Montrer que $f = g$.

PROBLÈME **11 points**

Le but du problème est de déterminer la valeur exacte de l'aire de la région grisée sur la figure en annexe. Cette région est limitée par l'axe des ordonnées et deux morceaux de courbes symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

On considère la fonction f définie, pour tout nombre réel x, par $f(x) = \dfrac{4 - \mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporte à un repère orrhonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 2 cm. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée sur la figure en annexe.

Partie A : étude de la fonction *f*

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement pour $\mathscr{C}$?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. (On pourra vérifier que, pour tout nombre réel x, on a $f(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^{-x} - 1}{\mathrm{e}^{-x} + 1}$. Que peut-on déduire graphiquement pour $\mathscr{C}$?
3. Déterminer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f. Étudier le signe de f'. En déduire le tableau de variations de f sur l'ensemble des nombres réels ,
4. **a.** Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.

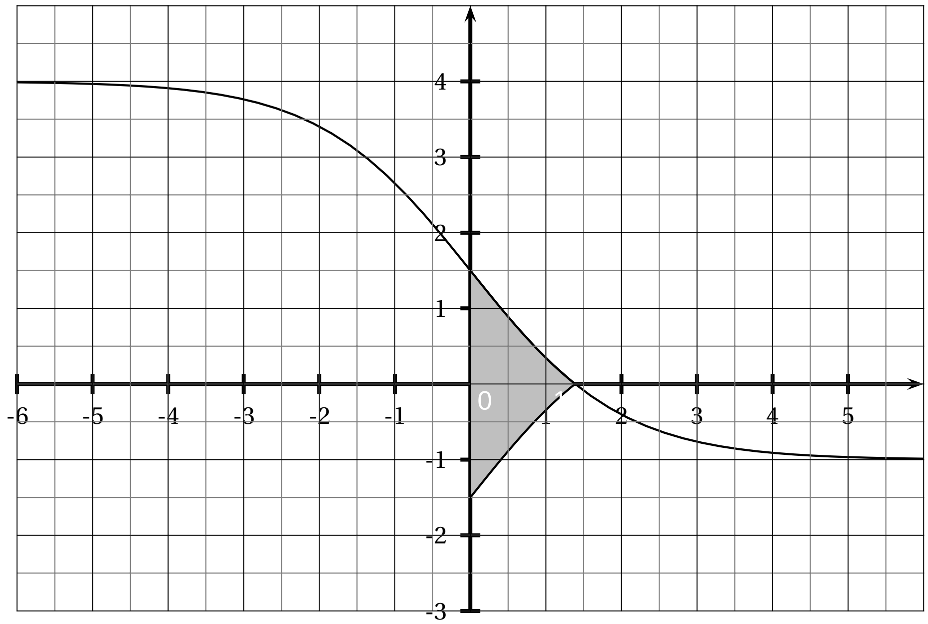
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4 - \mathrm{e}^x = 0$. En déduire que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en un point B dont on déterminera les coordonnées.
5. Montrer que, pour rout nombre réel x de l'intervalle $[0~;~2\ln 2]$, on a $f(x) \geqslant 0$.
6. Placer les points A et B, puis tracer les droites asymptotes de $\mathscr{C}$ sur la figure en annexe à joindre à la copie.

Partie B : calcul de l'aire de la région grisée

1. Montrer que la fonction numérique F définie, pour tout nombre réel x, par $F(x) = 4x - 5\ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la valeur exacte, en unités d'aires, de l'aire de la région du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, les deux axes du repère et la droite d'équation $x = 2\ln 2$.

   En déduire la valeur exacte, en cm^2, de l'aire de la région grisée, puis sa valeur arrondie au mm^2 près.

Annexe à rendre avec la copie



Baccalauréat STI Nouvelle–Calédonie Génie électronique, électrotechnique, optique novembre 2002

EXERCICE 1 **5 points**

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2 - 6z + 12 = 0.$$

1. Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.
   Soient z_1 et z_2 les solutions, z_1 étant celle dont la partie imaginaire est positive.
2. Écrire z_1 puis z_2 sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où r est un nombre réel positif, i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ et θ un nombre réel (r représente donc le module du nombre complexe et θ un argument).
   En déduire que $\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
3. Dans le plan $\mathscr{P}$, rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm, construire géométriquement les points A_1 et A_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 (on n'utilisera pas de valeurs approchées).
   Montrer l'existence d'une rotation de centre O qui transforme A_2 en A_1.
   Déterminer l'angle α de cette rotation.
4. On note A_0 l'image de A_1 par la rotation de centre O et d'angle α.
   Construire géométriquement A_0.
   Déterminer l'affixe du point A_0.
5. Quelle est la nature du quadrilatère $\mathrm{OA}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

Un dé cubique est truqué. Une partie consiste à lancer le dé et à noter le numéro de la face supérieure.
Soit X la variable aléatoire égale à ce numéro. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6
$P(X = i)$	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

La règle du jeu est la suivante : un joueur mise 10 euros.
Il reçoit 20 euros si le numéro est 1 ou 6, 10 euros si le numéro est 3 ou 4, 0 euro si le numéro est 2 ou 5.
Le gain d'un joueur est la différence entre ce qu'il reçoit et ce qu'il mise (le gain peut donc être soit positif soit négatif). Soit Y la variable aléatoire égale au gain du joueur au cours d'une partie.

1. Quelles sont les valeurs prises par Y ?
2. Déterminer la loi de probabilité de Y.
3. Calculer l'espérance mathématique de Y.
4. On rappelle qu'un jeu est équitable lorsque l'espérance du gain est nulle.
   Pour le jeu décrit ci-dessus, on se propose de modifier la mise. La nouvelle mise est notée m et est exprimée en euros.
   Quelle valeur faut-il donner à m pour rendre le jeu équitable ?

PROBLÈME **10 points**

Partie A : étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \frac{1}{2\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)}.$$

$\mathscr{C}$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. **a.** Démontrer que la droite D_1 d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

b. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D_1

3. Pour tout réel x, M désigne le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et M' le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $-x$.

a. Déterminer, en fonction de x, les coordonnées du point I milieu du segment $[MM']$.

b. Que constatez-vous ? Qu'en déduisez-vous pour la courbe $\mathscr{C}$?

4. **a.** Vérifier que pour tout réel x :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}^{x}}{2\left(\mathrm{e}^{x}+1\right).}$$

b. Démontrer que la droite D_2 d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

c. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D_2.

5. Soit f' la dérivée de f.

Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^{x}+2}{2\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^2}$.

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) > 0$.

Dresser le tableau de variations de la fonction f.

6. Tracer D_1, D_2 et $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm.

Partie B : calcul d'une primitive

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)}$$

1. Vérifier que pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}$.

2. En déduire une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

∽ Baccalauréat STI Nouvelle–Calédonie ∽
Génie des matériaux, mécanique A et F
novembre 2001

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, l'unité graphique étant le centimètre.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$(z-11\text{i})\left(z^2-16z+89\right)=0.$$

2. On donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 8-5\text{i}$, $z_{\text{B}} = 8+5\text{i}$ et $z_{\text{C}} = 11\text{i}$.

a. Placer A, B et C. La figure sera complétée au fur et à mesure des questions.

b. Calculer $|z_{\text{C}} - z_{\text{B}}|$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

c. Démontrer que ABC est un triangle isocèle.

3. D est le point d'affixe $z_{\text{D}} = -2$ et B′ le milieu du segment [AC].

a. Calculer l'affixe du point B′.

b. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{DB}}$ et $\overrightarrow{\text{DB}'}$.

c. En déduire que les points D, B et B′ sont alignés.

d. En déduire que (DB) est la médiatrice du segment [AC].

4. Justifier que la droite (DO) est une médiatrice du triangle ABC.

5. Quel est le centre du cercle passant par A, B et C ?

EXERCICE 2 **5 points**

Lors de la « foire aux affaires », dans un magasin de bricolage, un client s'intéresse à une meuleuse d'angle et à une scie sauteuse. On admet, pour ce client, les hypothèses suivantes :

- La probabilité qu'il achète la meuleuse d'angle est 0,60.
- La probabilité qu'il achète la scie sauteuse est 0,46.
- La probabilité qu'il achète la meuleuse d'angle ou la scie sauteuse est 0,64.

On désigne par M l'évènement « le client achète la meuleuse d'angle » et par S l'évènement « le client achète la scie sauteuse ».

1. Quelques calculs préliminaires :

a. Calculer la probabilité de l'évènement « le client n'achète pas la meuleuse d'angle ».

b. Montrer que la probabilité de l'évènement « le client achète la meuleuse d'angle et la scie sauteuse » est 0,42.

c. Calculer la probabilité de l'évènement $\overline{\text{M}} \cap \text{S}$.

2. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	M	$\overline{\text{M}}$	
S	0,42		0,46
$\overline{\text{S}}$			
	0,60		1

3. La meuleuse d'angle coûte $12,96$ € et la scie sauteuse $15,09$ €. On désigne par D la variable aléatoire égale à la dépense, en euros, du client.

   a. Déterminer les différentes valeurs de la variable aléatoire D.

   b. Établir la loi de probabilité de D.

   c. Calculer l'espérance mathématique de D. On en donnera l'arrondi au centime d'euro.

   d. Quel chiffre d'affaires le magasin peut-il espérer réaliser si 50 clients, intéressés par ces deux appareils, se présentent pendant cette « foire aux affaires » ?

PROBLÈME **10 points**

Première partie :

Soit p la fonction polynôme définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$p(X) = 3X^3 - 7X^2 + 4.$$

1. Montrer que pour tout nombre réel X, $p(X) = (X-1)\left(3X^2 - 4X - 4\right)$.
2. Factorisation de p :

   a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3X^3 - 7X^2 + 4 = 0$.

   b. En déduire une écriture de $p(X)$ sous la forme d'un produit de trois polynômes du premier degré.

3. **a.** Démontrer que pour tout nombre réel x,

$$3\mathrm{e}^{3x} - 7\mathrm{e}^{2} + 4 = (\mathrm{e}^{x} - 1)(\mathrm{e}^{x} - 2)(3\mathrm{e}^{x} + 2).$$

   b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ l'équation $3\mathrm{e}^{3x}x - 7\mathrm{e}^{2x}x + 4 = 0$.

   c. Étudier le signe de $3\mathrm{e}^{3x} - 7\mathrm{e}^{2x} + 4$ pour x appartenant à l'ensemble $\mathbb{R}$.

Deuxième partie :

On considère l'équation différentielle $E\ :\ y' + 2y = 0$.

1. Résoudre l'équation E ;
2. Déterminer la solution particulière f de l'équation E vérifiant $f(\ln 2) = 1$, ou ln représente la fonction logarithme népérien.

Troisième partie :

On appelle f et g les fonctions respectivement définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4\mathrm{e}^{-2x} \quad \text{et} \quad g(x) = 7 - 3\mathrm{e}^{x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Unités graphiques : 6 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

1. Limites et asymptotes

a. Calculer les limites de f et de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. En déduire pour chacune des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, l'existence d'une droite asymptote nommée D pour la courbe $\mathscr{C}$ et D$'$ pour la courbe $\mathscr{C}'$. Donner une équation pour chacune de ces droites.

2. Variations

a. Étudier les variations de f et de g sur $\mathbb{R}$.

b. Dresser les tableaux de variation de f et g.

3. Positions respectives de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{C}'$.

a. Montrer que pour tout nombre réel x,

$$f(x) - g(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(3\mathrm{e}^{3x} - 7\mathrm{e}^{2x} + 4\right).$$

b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{C}'$.

c. Justifier que sur l'intervalle $[0~;~\ln 2]$, $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{C}'$.

4. Construire D, D$'$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ dans le repère orthogonal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath}~;~\vec{\jmath}\right)$ dont on rappelle que les unités graphiques sont 6 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

5. On désigne par $\mathscr{P}$ le domaine plan limité par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.

a. Hachurer $\mathscr{P}$.

b. Calculer la valeur exacte, en cm^2 , de l'aire de $\mathscr{P}$. En donner l'arrondi au mm^2.

Baccalauréat STI France
Arts appliqués juin 2003

Exercice 1 **8 points**

Dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm, placer les quatre points A(5 ; 0), B(0 ; 3), A′(−5 ; 0) et B′(0 ; −3).

1. Donner l'équation de l'ellipse (E) de centre O et d'axes [AA′] et [BB′].
2. Montrer que si le point $M(x\,;\,y)$ est sur (E), alors $M_1(-x\,;\,y)$, $M_2(-x\,;\,-y)$ et $M_3(x\,;\,-y)$ sont aussi sur (E).
3. Tracer l'ellipse (E).
4. Calculer les coordonnées des deux foyers F et F′ ; les placer.
5. On donne $\text{M}\left(3\,;\,\dfrac{12}{5}\right)$
   a. Calculer les longueurs MF, MF′ puis MF + MF′.
   b. Que remarque t-on ?

Exercice 2 **12 points**

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;\,10[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 4}$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f en −4.
2. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ dont on précisera une équation.

Partie B

1. Vérifier que la dérivée f' de la fonction f est définie par

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x+7)}{(x+4)^2}.$$

   Étudier son signe et dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ avec les axes du repère.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point M d'abscisse 2.
4. Tracer dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la courbe $(\mathcal{C})$, la tangente (T) et l' asymptote.

Partie C

1. a. Montrer que $f(x) = x - 6 + \dfrac{9}{x+4}$.

b. En déduire une primitive F de f sur $]-4\ ;\ 10[$.

2. Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 5$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

∽ Baccalauréat STI France ∽
Génie électronique juin 2003

EXERCICE 1 **4 points**

1. **a.** Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, résoudre l'équation d'inconnue z

$$z^2 - 8z + 32 = 0.$$

b. Écrire les solutions de cette équation sous forme exponentielle.

2. Soit le nombre complexe $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Donner sa forme algébrique.

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm, on donne les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 4 + 4\mathrm{i} \qquad z_{\mathrm{B}} = 4 - 4\mathrm{i} \qquad z_{\mathrm{C}} = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

b. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère un circuit électrique fermé comprenant un condensateur dont la capacité, exprimée en farads, a pour valeur C, une bobine dont l'inductance, exprimée en henrys, a pour valeur L et un interrupteur.
Le temps t est exprimé en secondes. À l'instant $t = 0$, on suppose le condensateur chargé, on ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit.
On appelle $q(t)$ la valeur de la charge, exprimée en coulombs, du condensateur à l'instant t.
On définit ainsi une fonction q, deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, dont la dérivée première est notée q'.
On admet que la fonction q est solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \qquad y'' + \frac{1}{\mathrm{LC}} y = 0$$

où y est définie et deux fois dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et de dérivée seconde y''.
Dans tout l'exercice on prend $\mathrm{C} = 1,25 \times 10^{-3}$ et $\mathrm{L} = 0,5 \times 10^{-2}$.

1. **a.** Montrer que q est alors solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \qquad y'' + 1,6 \times 10^5 y = 0.$$

b. Résoudre l'équation différentielle (E).

c. Déterminer la solution particulière q de (E) vérifiant :

$$q(0) = 6 \times 10^{-3} \quad \text{et} \quad q'(0) = 0.$$

2. On sait que la valeur $i(t)$ de l'intensité, exprimée en ampères, du courant qui parcourt le circuit à l'instant t vérifie $i(t) = -q'(t)$. On définit ainsi une fonction i sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

a. Vérifier que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

$$i(t) = 2,4\sin(400t).$$

b. Calculer : $\dfrac{400}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{400}} \cos(800t)\,\mathrm{d}t$.

c. On désigne par I_e la valeur, exprimée en ampères, de l'intensité efficace dans le circuit. Son carré est donné par la formule :

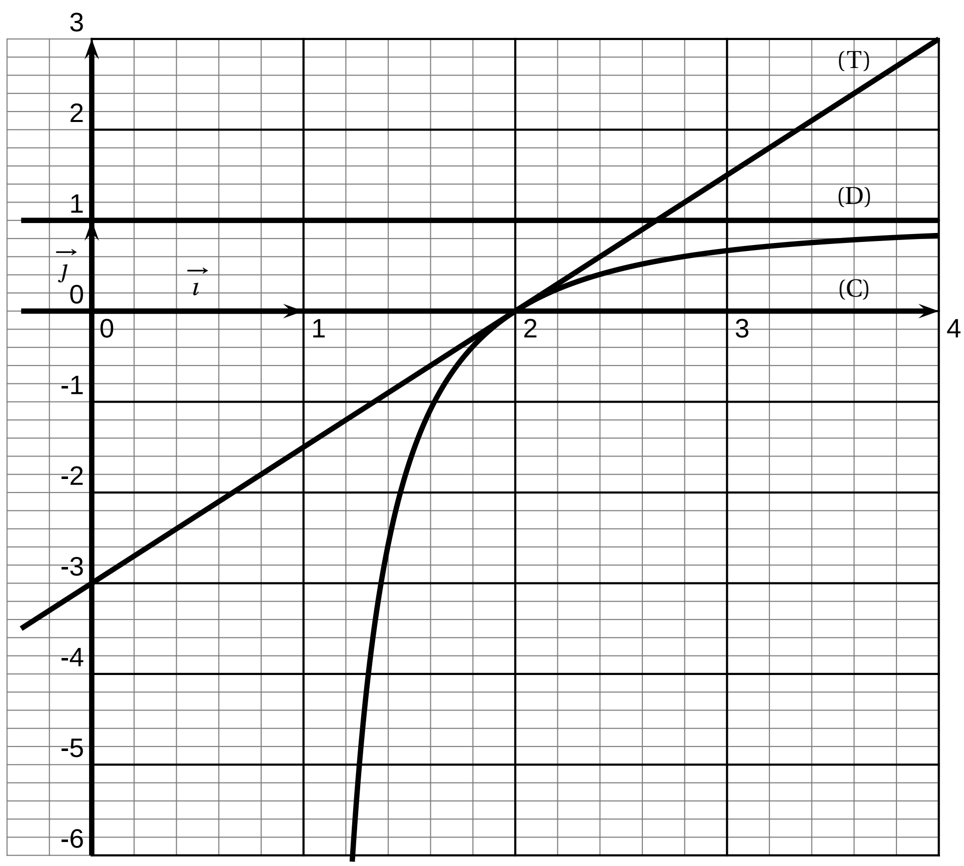
$$\mathrm{I}_e^2 = \frac{400}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{400}} i^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Calculer I_e^2 (on pourra utiliser la formule $\sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2a)$, puis donner une valeur approchée de I_e à 10^{-3} près, sachant que I_e est un nombre positif.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On donne, dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, la représentation graphique $(\mathscr{C})$ d'une fonction g définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ ainsi que deux droites (T) et (D). La droite (T) passe par les points de coordonnées respectives $(2\,;\,0)$ et $(0\,;\,-3)$. La droite (D) a pour équation $y = 1$.



1. **a.** Déterminer graphiquement $g(2)$.

b. Sachant que la droite (T) est tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 2, déterminer graphiquement $g'(2)$.

c. On admet que la droite (D) est asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$). Déterminer graphiquement la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

d. Sachant que la courbe ($\mathscr{C}$) coupe l'axe des abscisses en un seul point, étudier graphiquement le signe de la fonction g sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$.

2. On définit les fonctions g_1, g_2 et g_3 sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par :

$$g_1(x) = 1 - \frac{1}{x-1} \quad ; \quad g_2(x) = 1 - \frac{2}{x^2 - x} \quad ; \quad g_3(x) = \ln(x-1).$$

L'une d'elles est la fonction g que l'on se propose d'identifier en utilisant les résultats de la première question.

a. Calculer $g_1(2)$, $g_2(2)$ et $g_3(2)$.
Ces résultats permettent-ils d'éliminer une des trois fonctions ?

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g_1(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_3(x)$.
Quelle fonction peut-on alors éliminer ?

c. On note g_1' et g_2' les fonctions dérivées respectives de g_1 et g_2.
Calculer $g_1'(2)$ et $g_2'(2)$ puis conclure.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x + 1 + 2\ln x - 2\ln(x-1).$$

On note ($\mathscr{C}_f$) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. Quelle propriété de la fonction logarithme népérien permet de prouver que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]1~;~+\infty[$,

$$f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)~?$$

b. Déterminer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe ($\mathscr{C}_f$) ?

2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Justifier que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe ($\mathscr{C}_f$).

c. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]1~;~+\infty[$, $\dfrac{x}{x-1} > 1$.
Quel est alors le signe de $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ pour x appartenant à $]1~;~+\infty[$?

d. En déduire la position de la courbe ($\mathscr{C}_f$) par rapport à la droite (D).

3. a. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]1~;~+\infty[$, $f'(x) = g(x)$ où g est la fonction trouvée dans la **partie A**.

b. À l'aide des résultats graphiques obtenus dans la **partie A**, dresser le tableau de variations de la fonction f.

Partie C

1. Montrer que, sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$, la fonction H définie par

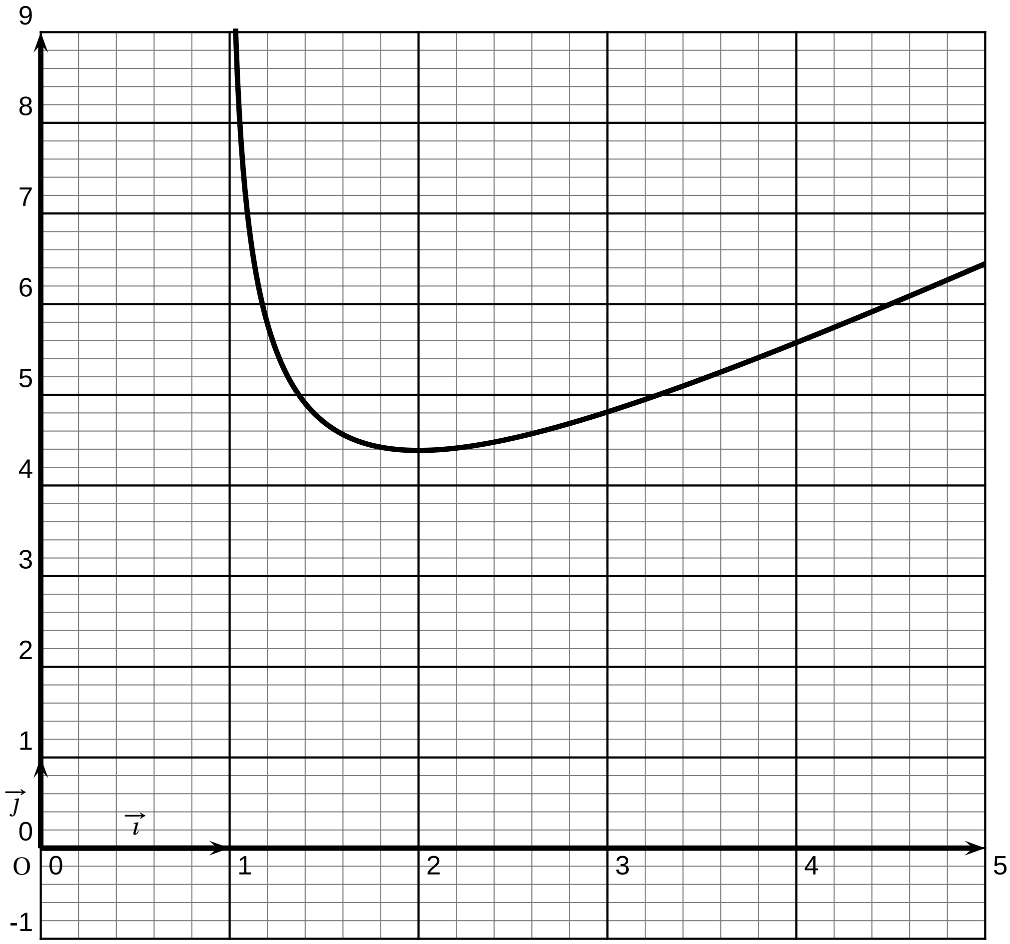
$$H(x) = x\ln x - (x-1)\ln(x-1)$$

est une primitive de la fonction h définie par $h(x) = \ln x - \ln(x-1)$ sur cet intervalle.

2. **a.** Sur la feuille annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe $(\mathscr{C}_f)$. Sur cette figure, représenter la droite (D) et hachurer la partie du plan comprise entre la droite (D), la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

b. On désigne par $\mathscr{A}$ la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan hachurée précédemment. Donner la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près par excès.

Annexe : représentation de la courbe ($\mathscr{C}_f$)
À rendre avec la copie



∽ Baccalauréat STI France juin 2003 ∾
Génie énergétique, génie civil, génie mécanique

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation

$$z^2 - 6z + 34 = 0.$$

2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -3 + 5i$, $z_B = 3 - 55i$ et $z_C = 4i$.

a. Placer A, B et C dans le repère.

b. Calculer les modules des nombres complexes $z_A - 3$, $z_B - 3$ et $z_C - 3$. En déduire que les points A, B et C sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c. Quelle est la nature du triangle ABC ?

3. Soit D le symétrique de A par rapport à C et E le symétrique de B par rapport à C. Placer les points D et E dans le repère. Montrer que ABDE est un losange.

EXERCICE 2 **5 points**

Soit (E) l'équation différentielle

$$y' + 2y = 0$$

où y est une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. **a.** Résoudre l'équation (E).

b. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

2. **a.** Calculer la valeur moyenne de f sur $[0 ; 10]$.

b. Déterminer, en fonction de n, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[n ; n+1]$.

3. Soit (u_n), la suite définie par $u_n = n\left(1 - e^{-2}\right)e^{-2n}$ pour tout n entier positif ou nul.

a. Calculer la valeur exacte de u_0, u_1 et u_2.

b. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c. Déterminer la valeur exacte de la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{-3 - 2x}{e^x}.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

Partie A : Étude de la fonction f

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   c. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$. On précisera son équation.
2. Calculer $f'(x)$, où f désigne la fonction dérivée de f.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
4. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation d'inconnue x : $f(x) = 0$. En déduire, en fonction de x réel, le signe de $f(x)$.
5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère indiqué.

Partie B : Détermination d'une primitive et calculs d'aire

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{2x+5}{\mathrm{e}^x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. a. Hachurer l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ et $x = 5$.
   b. Calculer la valeur, en cm^2, de cette aire, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $g(x) = -f(x)$ et on appelle (Γ) la courbe représentative de la fonction g. Tracer la courbe (Γ) dans le même repère que la courbe $(\mathscr{C})$.
   b. Soit $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire du domaine compris entre les courbes $(\mathscr{C})$ et (Γ) et les droites d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ et $x = \alpha$ (où α est un réel positif donné). Calculer, en cm^2 et en fonction de α, la valeur de $\mathscr{A}(\alpha)$.
   c. Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

Durée de l'épreuve : 4 heures Coefficient : 4

La candidat traitera obligatoirement les deux exercices et le problème

Baccalauréat STI La Réunion juin 2003
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm, on considère trois points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 1 + \text{i}\sqrt{3}, \quad z_{\text{B}} = 1 - \text{i}\sqrt{3}, \quad z_{\text{C}} = l.$$

a. Déterminer la forme trigonométrique de z_{A} et z_{B}.

b. Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Justifier l'alignement de ces points et tracer la droite correspondante.

2. Soient A′ et B′ les points du plan d'affixes respectives

$$z_{\text{A}'} = \frac{1}{z_{\text{A}}} \text{ et } z_{\text{B}'} = \frac{1}{z_{\text{B}}}.$$

a. Donner la forme exponentielle de z_{A} et z_{B}.

b. Calculer la forme algébrique de $z_{\text{A}'}$ et $z_{\text{B}'}$

c. Placer les points A′ et B′ sur le même schéma que précédemment.

d. Préciser l'image de A′ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

3. **a.** Placer, sur le schéma précédent, le point I d'affixe $z_{\text{I}} = \dfrac{1}{2}$ et calculer les distances IA′, lB′ et IC.

b. En déduire que les points A′, B′ et C sont situés sur un cercle dont on donnera le centre et le rayon.
Tracer ce cercle sur le même schéma.

EXERCICE 2 **5 points**

Une urne contient une boule rouge R, deux boules blanches B_1 et B_2, et deux boules noires N_1 et N_2 toutes indiscernables au toucher.
Un jeu consiste à tirer jeux boules successivement, sans remise.

1. En utilisant un arbre on un tableau, déterminer les 20 tirages possibles.
On admet par la suite que ces 20 tirages sont équiprobables.

2. Calculer la probabilité des évènements suivants :
A : « tirer deux houles de même couleur » ;
B : « tirer au plus une boule noire ».

3. Loes du tirage dc deux boules :
– la boule rouge obtenue fait gagner 3 €,
– chaque boule blanche obtenue fait gagner 2 €,
– chaque boule noire obtenue fait perdre 3 €.
On appelle X la variable aléatoire qui à tout tirage de deux boules, associe le gain, en euros, du joueur (une perte est considérée comme un gain négatif).

a. Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour X ?

b. Écrire la loi de probabilité de X.

c. Calculer la probabilité P pour que le gain soit strictement positif.

d. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques. 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. En écrivant $f(x)$ sous la forme $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}$, déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (Γ) ?

2. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et montrer que pour tout réel x :
   $$f'(x) = \left(-x^2 + 4x - 3\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

   c. Dresser le tableau de variations de f. On donnera la valeur exacte des extremums.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (Γ) en son point A d'abscisse 0.

4. Tracer la courbe (Γ) et la tangente (T).

Partie B

On s'intéresse dans cette partie à l'équation $f(x) = \dfrac{1}{8}$.

1. En utilisant le tableau de variations de la fonction f, justifier que cette équation admet trois solutions dans $\mathbb{R}$ et que l'une des solutions notée α appartient à l'intervalle $[1\,;\,3]$.

2. À l'aide d'une calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 0,1 de la solution α.

Partie C

Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Durée de l'épreuve : 4 heures Coefficient : 4

La candidat traitera obligatoirement les deux exercices et le problème

Baccalauréat STI Polynésie juin 2003
Génie énergétique, civil

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations suivantes et donner les solutions sous forme algébrique :

   a. $z^2 - 2z + 2 = 0$.

   b. $3z + 2 = (1 - \mathrm{i})z - 7 + 13\mathrm{i}$.

2. On considère les nombres complexes :

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i} \quad ; \quad z_{\mathrm{B}} = -1 + 7\mathrm{i} \quad ; \quad z_{\mathrm{D}} = -3 + 3\mathrm{i}.$$

   On appelle A, B et D leurs images respectives dans le plan .

   a. Déterminer le module et un argument de z_{A}.

   b. Montrer que $z_{\mathrm{D}} = 3\mathrm{i}z_{\mathrm{A}}$ puis en déduire le module et un argument de z_{D}.

   c. Placer les points A, B et D dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

3. On pose $r = |z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{B}}|$.

   a. Interpréter géométriquement le nombre r.

   b. Calculer r.

   c. Montrer que le triangle ABD est rectangle et isocèle.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2 produisent le même type de pièces. La production totale journalière est de 8 000 pièces. 40 % de la production provient de la machine M_1, le reste de la machine M_2.

Une pièce est susceptible de présenter deux types de défauts notés D_1 et D_2.

Concernant les pièces produites par la machine M_1 :

- 3 % présentent uniquement le défaut D_1,
- 2 % présentent uniquement le défaut D_2,
- 1 % présentent les deux défauts D_1 et D_2.

Concernant les pièces produites par la machine M_2 :

- 5 % présentent uniquement le défaut D_1,
- 1 % présentent uniquement le défaut D_2,
- 2 % présentent les deux défauts D_1 et D_2.

1. Après l'avoir reproduit sur votre copie, compléter le tableau suivant :

	Défaut D_1	Défaut D_2	Défauts D_1 et D_2	Aucun défaut	Total
Machine M_1	96				
Machine M_2		48			
Total					8 000

2. On tire au hasard une pièce parmi celles qui n'ont aucun défaut. Montrer que la probabilité qu'elle provienne de la machine M_1 est $\dfrac{47}{116}$.
3. On tire au hasard une pièce parmi les 8 000 produites dans la journée. Déterminer la probabilité des évènements A et B suivants :
   a. A : « La pièce n'a aucun défaut ».
   b. B : « La pièce a au moins un défaut ».
4. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage d'une pièce parmi les 8 000, associe le nombre de défauts de cette pièce.
   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer son espérance mathématique.

PROBLÈME **10 points**

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{\ln x}{x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

I. Première partie : étude d'une fonction auxiliaire g.

On appelle g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x.$$

1. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. (L'étude des limites aux bornes de l'intervalle n'est pas demandée).
2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

II. Deuxième partie : étude de la fonction f

1. Étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Déterminer $f(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif, puis en déduire que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Construire le tableau de variations de f.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.
5. Pour tout nombre réel x strictement positif, on pose $d(x) = f(x) - (2x - 2)$.
   a. Déterminer la limite de $d(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   b. En déduire que la droite (D), d'équation $y = 2x - 2$, est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   c. Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à (D).

6. Tracer les droites (T) et (D) puis la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 2 cm.

III. Troisième partie : Calcul d'aire

1. On appelle h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$.
   Déterminer une primitive H de h sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. En déduire une primitive F de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. Calculer en cm^2, la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

ANNEXE

Tableau des valeurs de X

b \ a	0	1	2
0			
1			
2			

Durée de l'épreuve : 4 heures Coefficient : 4

La candidat traitera obligatoirement les deux exercices et le problème

Baccalauréat STI Polynésie juin 2003
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

La feuille fournie en annexe sera rendue avec la copie

Dans cet exercice, les probabilités seront données sous forme de fractions simplifiées.

Deux urnes contiennent chacune trois jetons indiscernables au toucher : la première contient trois jetons verts numérotés de 0 à 2 et la seconde trois jetons blancs numérotés de 0 à 2.

On tire au hasard un jeton dans la première urne et on note a son numéro, puis un jeton dans la seconde urne et on note b son numéro.

Le résultat d'un tirage est donc un couple $(a\ ;\ b)$ et les tirages sont équiprobables.

1. **a.** En complétant l'arbre donné en annexe, déterminer le nombre d'éventualités.

   b. Quelle est la probabilité P d'obtenir une somme $a+b$ multiple de 3 ?

2. À tout couple $(a\ ;\ b)$ précédemment défini, on associe le nombre complexe z écrit sous forme algébrique $z = a + \text{i}b$ où i est le nombre complexe tel que $\text{i}^2 = -1$.

   On note $|z|$ le module de z.

   a. Quelle est la probabilité P_1 pour que z soit réel ?

   b. Quelle est la probabilité P_2 pour que $|z| = 1$?

3. Soit X la variable aléatoire qui, à tout nombre complexe z défini ci-dessus, associe son module.

   a. Compléter le tableau des valeurs de X donné en annexe.

   b. Déterminer la loi de probabilité de X.

   c. Déterminer la probabilité P_3 de l'évènement « $|z| \leqslant 2$ ».

   d. Déterminer l'arrondi au centième de l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère l'équation différentielle

$$(\text{E}) : \quad 16y'' + 25y = 0$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & \sqrt{3} \\ f'(0) & = & \dfrac{5}{4} \end{array}\right.$$

3. Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a $f(x) = 2\cos\left(\frac{5}{4}x - \frac{\pi}{6}\right)$.

4. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{2\pi}{15}\ ;\ \frac{4\pi}{15}\right]$.

PROBLÈME **10 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 1[$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c + 2\ln(1-x) \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse -1.

Partie A : Détermination de f

Déterminer $a,\ b,\ c$ de façon que les conditions suivantes soient remplies :

- $\mathscr{C}$ passe par le point O et admet en ce point une tangente $\mathscr{C}$ de coefficient directeur 1 ;
- la tangente à $\mathscr{C}$ en A est parallèle à l'axe des abscisses.

Dans toute la suite du problème on prend $f(x) = x^2 + 3x + 2\ln(1-x)$.

Partie B : étude de la fonction f et tracé de $\mathscr{C}$.

1. Déterminer la limite de f en 1. En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$.

2. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction g définie sur $]-\infty\ ;\ 1[$ par $g(x) = x^2 + 3x$. En déduire la limite de f en $-\infty$.

3. On désigne par f' la dérivée de f. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{(1-2x)(x+1)}{1-x}$ pour tout nombre réel x strictement inférieur à 1.

4. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x. Dresser le tableau de variations de f.

5. **a.** En utilisant le tableau de variations, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

b. On note α la solution appartenant à $]-\infty\ ;\ -1[$. Justifier que α appartient à $]-2\ ;\ -1,8[$.

6. Construire $\mathscr{D}$, $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie C : calcul d'aire

1. **a.** Soient H et h les fonctions définies sur $]-\infty\ ;1[$ par :

$$H(x) = (x-1)\ln(1-x) - x \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(1-x).$$

Démontrer que H est une primitive de h sur $]-\infty\ ;1[$.

b. En déduire une primitive F de f sur $]-\infty\ ;1[$.

2. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$.
On donnera la valeur exacte de $\mathscr{A}$ en cm^2 en fonction de α.

ANNEXE

Tableau des valeurs de X

b \ a	0	1	2
0			
1			
2			

∽ Baccalauréat STI France ∾
Génie des matériaux,mécanique B, C, D, E
juin 2003

EXERCICE 1 **4 points**

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + 2z + 2 = 0.$$

   b. Résoudre dans $\mathbb{C} - \{1\}$ l'équation : $\dfrac{z+1}{z-1} = 2 - \text{i}$. On écrira la solution sous forme algébrique.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\text{A}} = -1 + \text{i}$, $z_{\text{B}} = -1 - \text{i}$ et $z_{\text{C}} = 2 + \text{i}$.

   a. Représenter les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

   b. Quelle est la nature du triangle ABC ? Le justifier.

   c. En déduire l'affixe du point Ω centre du cercle circonscrit au triangle ABC et le rayon r de ce cercle.

EXERCICE 2 **5 points**

Soit l'équation différentielle : $4y'' + \pi^2 y = 0$.

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Déterminer la fonction g solution de cette équation différentielle qui satisfait aux conditions suivantes :
   - la courbe représentative de g passe par le point N de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
   - la tangente à cette courbe en N est parallèle à l'axe des abscisses.
3. Vérifier que pour tout nombre réel x, $g(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
4. Résoudre sur l'intervalle $[- 2\ ;\ 2\ ]$ l'équation $g(x) = -\dfrac{1}{2}$.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = \text{e}^{2x} + x.$$

Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. (Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Étude du comportement de f en $-\infty$.

   a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. Montrer que $\mathcal{C}$ admet pour asymptote la droite Δ d'équation : $y = x$.

   c. Étudier les positions relatives de Δ et de $\mathscr{C}$.

2. Étude du comportement de f en $+\infty$:
Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. Étude des variations de f

   a. Déterminer la fonction dérivée f' de f.

   b. Établir le tableau de variations de f.

4. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1. Vérifier que le point A $(1\ ;\ \text{e}^2+1)$ appartient à T.

5. Dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ tracer Δ, T et $\mathscr{C}$.

6. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 0$ a une solution α et une seule sur $[-1\ ;\ 0]$.

   b. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près. Justifier le résultat.

7. Soit $\mathscr{D}$ la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$, et $x = 1$.

   a. Hachurer la partie $\mathscr{D}$.

   b. Calculer, en unités d'aire et en fonction de α, la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de la partie $\mathscr{D}$.

   c. Vérifier, en utilisant l'égalité $f(\alpha) = 0$, que $\mathscr{A}(\alpha) = \dfrac{1}{2}\left(\text{e}^2 - \alpha^2 + \alpha + 1\right)$.

   d. Déterminer, au mm^2 près, une valeur approchée de $\mathscr{A}(\alpha)$ en prenant $-0,43$ comme valeur approchée de α.

∽ Baccalauréat STI La Réunion juin 2003 ∾
Génie énergétique, civil, mécanique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 2 cm. On note i le sombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Soit $P(z) = z^3 - \left(1+2\sqrt{3}\right)z^2 + \left(12+2\sqrt{3}\right)z - 12$ où z est un nombre complexe.
   a. Vérifier que $P(1) = 0$.
   b. Déterminer le réel b tel que $P(z) = (z-1)\left(z^2+bz+12\right)$.
   c. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z
   $$z^2 - 2z\sqrt{3} + 12 = 0.$$
   d. Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
2. Dans le plan complexe, soit A, B, C et D les points d'affixes respectives :
   $$z_{\mathrm{A}} = \sqrt{3}+3\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = 1,\ z_{\mathrm{C}} = 4+\left(1-\sqrt{3}\right)\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{D}} = \left(3+\sqrt{3}\right)+\left(4-\sqrt{3}\right)\mathrm{i}.$$
   a. Placer ces quatre points dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   b. Calculer les affixes des milieux des segments [AC] et [BD].En déduire que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
   c. Démontrer que ABCD est un carré.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère l'équation différentielle (E) : $9y'' + y = 0$ où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

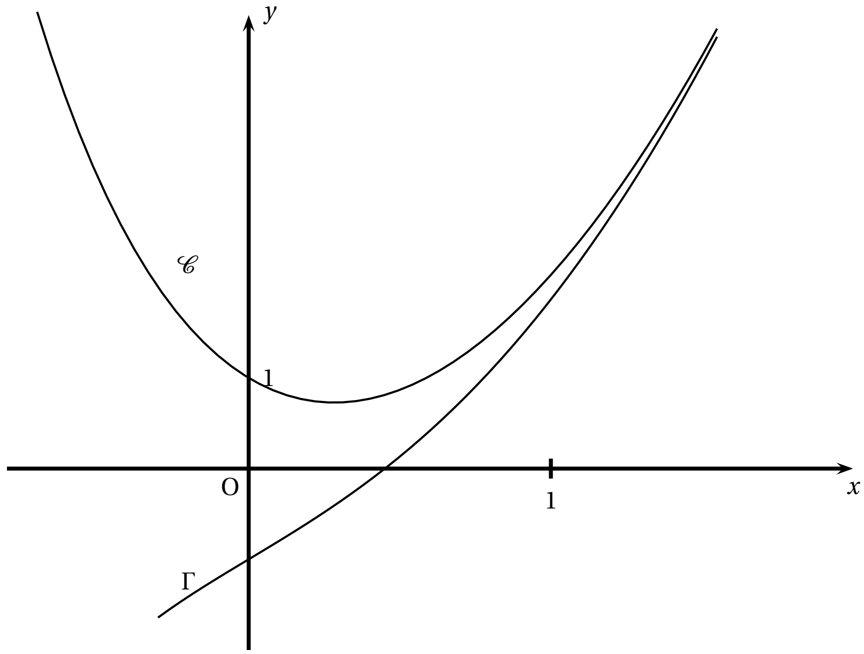
1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière f qui vérifie les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
3. Montrer que pour tout réel x, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :
   $$f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

PROBLÈME **11 points**

On définit sur $\mathbb{R}$ deux fonctions f et g par

$$f(x) = 2x^2 + \mathrm{e}^{-2x} \text{ et } g(x) = 2x^2 - \mathrm{e}^{-2x}$$

Ces fonctions sont représentées par les courbes $\mathscr{C}$ et Γ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ sur le graphique suivant :



Partie A

1. **a.** Calculer $f(0)$ et $g(0)$.

   b. Associer alors à chaque fonction sa courbe représentative.

2. Justifier par le calcul que la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de la courbe Γ.

Partie B : étude de la fonction f à l'aide d'une fonction auxiliaire h

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

   b. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2. Soit la fonction auxiliaire h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x - \mathrm{e}^{-2x}$.
   Montrer que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** Montrer que l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution α dans l'intervalle $[0 ; 1]$ et justifier que cetteéquation n'a pas d'autre solution dans $\mathbb{R}$.

   b. Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

   c. Déterminer le signe de $h(x)$ sur les intervalles $]-\infty ; \alpha[$ et $]\alpha ; +\infty[$.

4. **a.** Montrer que pour rout réel x, $f'(x) = 2h(x)$.

   b. Déduire des questions 3. c. et 4. a. le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Calculer une valeur approchée de $f(\alpha)$.

Partie C : comportement des courbes $\mathscr{C}$ et Γ pour x assez grand

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x) - g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) - g(x) \leqslant \dfrac{1}{10}$. Donner une interprétation graphique du résultat.

2. **a.** Pour tout λ réel strictement positif soit $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} \left[f(x) - g(x)\right] \mathrm{d}x$.
   Montrer que $I(\lambda) = 1 - \mathrm{e}^{-2\lambda}$.

   b. Calculer la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.