Baccalauréat STI 2004

L'intégrale de septembre 2003 à juin 2004

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

France Arts appliqués septembre 2003 3

France Génie mécanique septembre 2003 5

Polynésie Génie électronique septembre 2003 9

France Génie mécanique septembre 2003 11

Polynésie Génie mécanique septembre 2003 13

France Génie électronique septembre 2003 15

Nouvelle–Calédonie Génie électronique sept. 2003 . 18

Nouvelle–Calédonie Génie mécanique sept. 2003 . . . 20

France Arts appliqués juin 2004 22

France Génie civil juin 2004 24

France Génie des matériaux juin 2004 27

Polynésie Génie mécanique juin 2004 29

France Génie électronique juin 2004 32

Polynésie Génie électronique juin 2004 35

Baccalauréat STI France
Arts appliqués septembre 2003

EXERCICE 1 **8 points**

Un sondage réalisé auprés de 600 jeunes qui partent en vacances révèle que parmi eux :

- Un tiers part avec des amis,
- 70 % restent en France.
- Parmi ceux qui vont en vacances à l'étranger, 20 % partent avec des amis.

1. Recopier et compléter le tableau des effectifs suivant :

	Avec des amis	Sans les amis	Total
En France			
À l'étranger	36		
Total			600

2. On choisit un jeune au hasard parmi ces 600 jeunes. On considére les évènements suivants :

F : « Le jeune choisi reste en France »

A : « Le jeune choisi part avec des amis ».

a. Définir par une phrase les évènements $\overline{F}$, $F \cup A$.

b. Calculer les probabilités des évènements suivants : $\overline{F}$, $F \cap A$, $F \cup A$. (On écrira les résultats sous forme de fraction irréductible).

3. On choisit un jeune parmi ceux qui partent sans les amis. Déterminer la probabilité pour que ce jeune aille à l'étranger.

EXERCICE 2 **12 points**

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left[\frac{3}{4}\,;4\right]$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

1. Déterminer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$.

2. Pour x appartenant à I, résoudre l'inéquation : $1-2\ln x > 0$.

En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$ sur I.

3. Donner le tableau des variations de f et donner une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum.

4. Montrer, en utilisant le tableau des variations, que l'équation $f(x) = 0,1$ admet deux solutions dans I.

À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée, à 10^{-2} près, de chacune de ces solutions.

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repére orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités : 4 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie B

Une petite entreprise fabrique et vend des boîtes de jeu.
Lorsqu'elle vend x centaines de ces boîtes ($x \leqslant x \leqslant 4$), le bénéfice net $B(x)$ réalisé s'exprime en milliers d'euros, par : $B(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.
Déterminer :

1. Le nombre minimum de boîtes de jeu à vendre pour que ce soit rentable.

2. Le nombre de boîtes de jeu à vendre pour que le bénéfice soit maximal. Quel est alors ce bénéfice ?

3. Le nombre de boîtes de jeu à vendre si l'entreprise veut gagner au moins 100 euros (on utilisera une méthode graphique en faisant apparaître sur la courbe les tracés utiles).

Durée : 4 heures

STI Génie mécanique, génie des matériaux
France septembre 2003

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repére orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm). On considère les points E, F et G d'affixes respectives :

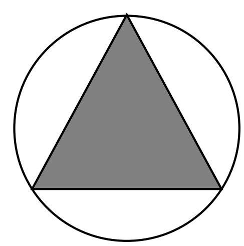
$$z_{\mathrm{E}} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \quad ; \quad z_{\mathrm{F}} = 2z_{\mathrm{E}} \quad ; \quad z_{\mathrm{G}} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

1. Écrire z_{E}, z_{F} et z_{G} sous forme trigonométrique.
2. Placer les points E, F et G dans $\mathscr{P}$.
3. Montrer que le triangle EFG est équilatéral. Le tracer.
4. Montrer que le point I $\left(2\ ;\ \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle EFG. Tracer $\mathscr{C}$.

Partie B

On considère que le disque déterminé par $\mathscr{C}$ forme une cible décomposée en deux zones :
- une zone triangulaire noire nommée N.
- une zone blanche nommée B.

On suppose que la probabilité, pour un tireur, d'atteindre N est $0,5$ et celle de rater la cible est $0,2$.



Cible

1. **a.** Quelle est la probabilité d'atteindre la cible ?
   b. Quelle est la probabilité d'atteindre B ?
2. On considère un tireur qui tire sur la cible.
   S'il atteint B, il gagne 5 euros.
   S'il atteint N, il gagne 2 euros.
   S'il rate la cible, il doit payer 8 euros.
   Soit X la variable aléatoire qui à chaque tir associe le gain correspondant (positif ou négatif).
   a. Définir la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il équitable ?
   c. Calculer la valeur arrondie à 10^{-2} près de l'écart type de X.

EXERCICE 2 **5 points**

Par la suite, on désigne par I l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x de I, par

$$f(x) = \cos x + \sin x.$$

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f puis la fonction dérivée seconde f'' de f.

2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x de I, $f''(x) < 0$.

b. En déduire le tableau de variations de f' sur I.

c. Calculer $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. En déduire le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à I.

d. En déduire le tableau de variations de f sur I.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentant f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. (Unités 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur celui des ordonnées).

4. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x de I,

$$[f(x)]^2 = 1 + \sin 2x.$$

b. En déduire une primitive sur I de la fonction qui, à tout nombre réel x de I, associe $[f(x)]^2$.

5. Soit V le volume du solide engendré par la rotation de $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses.

Calculer V en unités de volume.

(On rappelle que $\text{V} = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)]^2\,\text{d}x$).

PROBLÈME **10 points**

Partie A

1. Étudier, en fonction du nombre réel x, le signe de $x^2 - 1$.

2. Étudier, en fonction du nombre réel x, le signe de $\text{e}^x - 6$.

3. Déduire des questions précédentes, en fonction du nombre réel x, le signe de $(x^2 - 1)(\text{e}^x - 6)$.

Partie B

On considère les fonctions g et f définies, pour tout nombre réel x, par :

$$g(x) = -2x^3 + 6x \quad \text{et} \quad f(x) = (x-1)^2\text{e}^x + g(x).$$

1. **a.** Calculer la limite de g en $-\infty$.

b. Calculer la limite de f en $-\infty$. (On rappelle que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^2\text{e}^x = 0$).

2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x non nul,

$$f(x) = x\text{e}^x\left(x - 2 + \frac{1}{x} - 2\frac{x^2}{\text{e}^x} + \frac{6}{\text{e}^x}\right).$$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout nombre réel x,

$$f'(x) = (x^2 - 1)\left(\text{e}^x - 6\right).$$

4. Déduire de la troisième question de la **partie A** le tableau de variations de f.

5. Soient $\mathscr{C}$ et Γ les courbes représentant respectivement f et g dans le plan muni d'un repére orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, (Unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur celui des ordonnées).

   a. Calculer la limite de $f - g$ en $-\infty$,

   b. En déduire que $\mathscr{C}$ et Γ sont asymptotes.

   c. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Γ et préciser les coordonnées du point E commun à $\mathscr{C}$ et Γ.

6. La courbe Γ est tracée sur la feuille annexe que l'on rendra avec la copie. Compléter ce dessin en traçant $\mathscr{C}$ ainsi que les tangentes à aux trois points d'abscisses -1, 1 et $\ln 6$.

Partie C

1. Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction H définie, pour tout nombre réel x, par

$$H(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\text{e}^x$$

soit une primitive de la fonction qui, à tout nombre réel x, associe $\left(x^2 - 2x + 1\right)\text{e}^x$.

2. Soit D, la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, Γ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

Colorier D puis calculer les valeurs exactes de l'aire de D en unités d'aire et en cm^2.

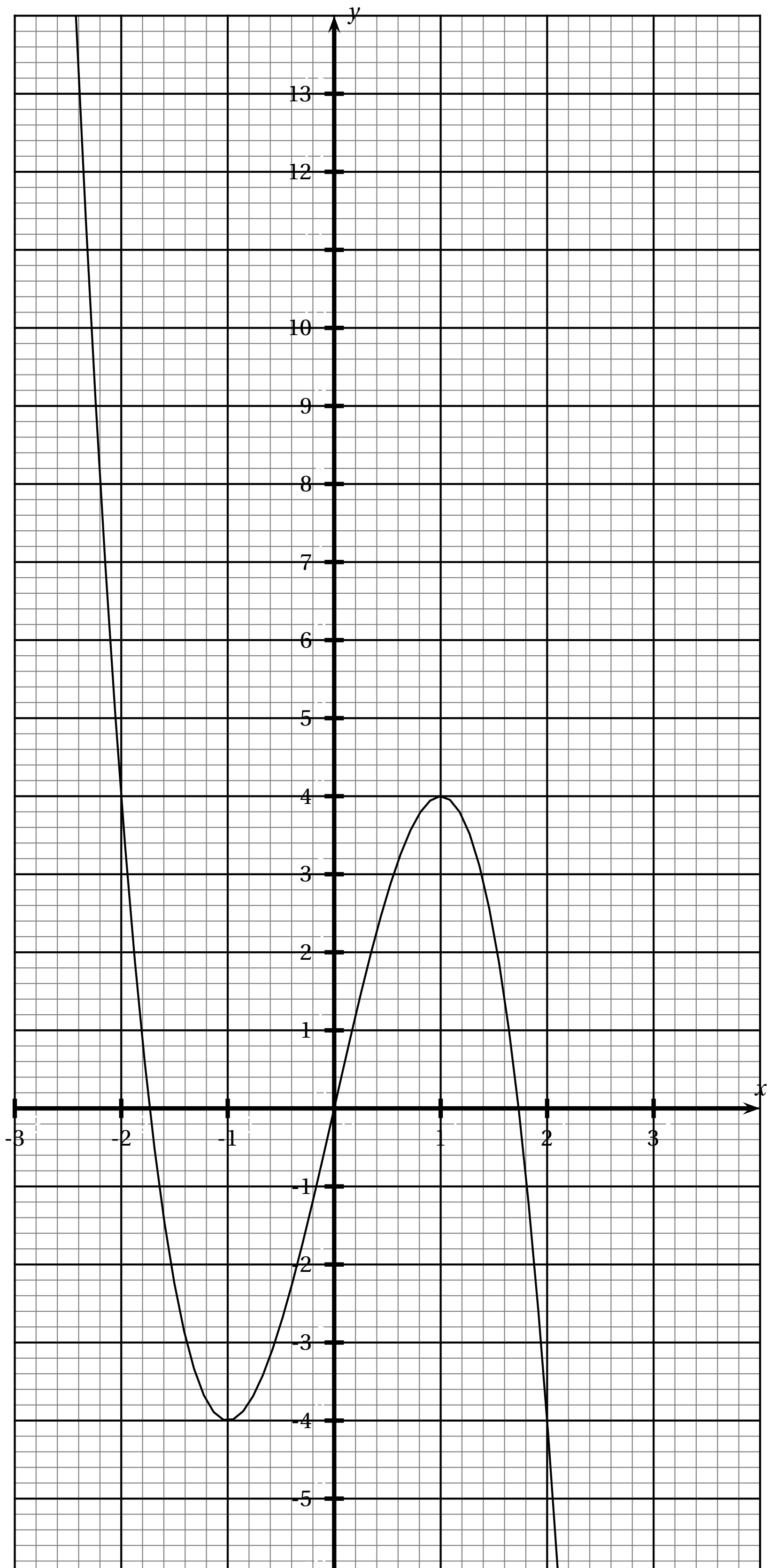


Figure annexée au sujet, à compléter et à rendre avec la copie

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI septembre 2003 ∽ Génie mécanique, énergétique, civil Polynésie

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

À tout point M d'affixe $z = x + \text{i}y$, distinct de O, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z. On pose dans la suite de l'exercice $z' = x' + \text{i}y'$ où x' et y' sont deux réels.

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
2. On appelle A, B, C, D, les points d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = \text{i}, \quad z_{\text{B}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{i}, \quad z_{\text{C}} = -1, \quad z_{\text{D}} = -2 - \text{i}.$$

   a. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes $z_{\text{B}'} = \dfrac{1}{\overline{z_{\text{B}}}}$ et $z_{\text{D}'} = \dfrac{1}{\overline{z_{\text{D}}}}$.

   b. Montrer que les points O, B et B′ sont alignés ainsi que les points O, D et D′.

   c. Calculer $|z_{\text{A}} - z_{\text{B}}|$, $\left|z_{\text{B}'} - z_{\text{B}}\right|$, $\left|z_{\text{D}'} - z_{\text{B}}\right|$ et en déduire que les quatre points A, B′, C, D′ sont sur un même cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.

3. Placer les points A, B, C et D dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, tracer le cercle $\mathscr{C}$.
4. Utiliser les questions précédentes pour construire géométriquement les points B′ et D′.

EXERCICE 2 **5 points**

Une urne contient dix jetons indiscernables au toucher. Sur chacun de ces jetons est inscrit l'un des numéros 1, 2, 3 ou 4.

Un jeton porte le numéro 1, deux jetons le numéro 2, trois jetons le numéro 3 et 4 jetons le numéro 4.

Un jeu consiste à tirer au hasard et avec remise, deux jetons de cette urne ; les tirages sont supposés équiprobables. À l'issue de la partie, le joueur reçoit le nombre d'euros correspondant à la somme des numéros inscrits sur les deux jetons tirés.

1. On appelle X la variable aléatoire qui, à l'issue de chaque partie, associe le nombre d'euros reçus par le joueur.

   a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

   b. Calculer $p(X = 2)$, probabilité que la somme remise au joueur soit 2 €.

   c. Montrer que $p(X = 6) = \dfrac{25}{100}$.

   d. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. On présentera les résultats dans un tableau.

e. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Le joueur doit verser une « mise » m exprimée en euros, avant chaque partie. Quelle doit être la valeur minimale de cette mise, arrondie à l'euro, pour que l'organisateur du jeu ait l'espoir d'être bénéficiaire ?

PROBLÈME **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

I. Première partie : étude d'une fonction g

On appelle g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x.$$

1. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. (L'étude des limites aux bornes de l'intervalle n'est pas demandée).

2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

II. Deuxième partie : étude d'une fonction f

On appelle f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{2} + 2 + \frac{\ln x}{x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. On appelle (D) la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} + 2$.

a. Démontrer que la droite (D) est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

b. Étudier les positions respectives de la droite (D) et de la courbe $\mathscr{C}$.

3. Le sens de variation de f

a. Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$ et en déduire le sens de variations de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de f.

4. On appelle (Δ) la tangente à $\mathscr{C}$ en son point A d'abscisse 1.

a. Déterminer une équation de (Δ).

b. Déterminer les coordonnées du point B de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente (T) est parallèle à (D).

5. Construire avec soin les droites (D), (Δ), (T) puis la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique 2 cm.

6. Calcul d'aire.

a. On appelle k la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $k(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Déterminer une primitive K de k sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b. Soit t un nombre réel strictement supérieur à 1. Calculer en cm^2 l'aire $\mathscr{A}(t)$ du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$ la droite (D) et les deux droités d'équations $x = 1$ et $x = t$.

c. Déterminer t pour que $\mathscr{A}(t) = 100\ \text{cm}^2$.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie Mécanique France ∽ septembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On considére les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -1 - \text{i} \quad ; \quad z_{\text{B}} = -1 + \text{i} \quad ; \quad z_{\text{C}} = 1 + \text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_{\text{D}} = z_{\text{B}} \times z_{\text{C}}.$$

où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_{D}.
2. **a.** Calculer le module et un argument de z_{A}, z_{B} et z_{C}.

   b. En déduire le module et un argument de z_{D}.
3. Déduire des questions **1.** et **2.b.** les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$.
4. On considére les points E et F d'affixes $z_{\text{E}} = 1$ et $z_{\text{F}} = \dfrac{1}{2}\text{i}$. Placer les points A, B, C, D, E et F dans le plan $\mathcal{P}$.
5. Montrer qu'il existe un réel positif k tel que les modules de z_{A}, z_{E}, $k \times z_{\text{D}}$ et z_{F} soient, dans cet ordre, quatre termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre l'équation différentielle

$$9y'' + y = 0,$$

   où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution particuliére f vérifiant

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

3. Montrer que pour tout x réel, on a :

$$f(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6}\right).$$

4. **a.** Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

   b. Calculer la valeur moyenne m de f sur $[0 ; 2\pi]$. On en donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-3} prés.

PROBLÈME **11 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A : Recherche d'une fonction
Soit g une fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = a(\ln x)^2 + b\ln x + c,$$

où $a,~b$ et c sont trois réels.
Déterminer $a,~b$ et c sachant que sa courbe représentative dans le repére $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ passe par les points A(1 ; 2), B (e ; 0) et $\text{C}\left(\text{e}^3~;~2\right)$.

Partie B : Étude d'une fonction
Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^2 - 3\ln x + 2.$$

1. **a.** Calculer la limite de f en 0.
   b. Calculer la limite de f en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout x de $]0~;~+\infty[$, on a :

$$f(x) = \ln x(\ln x - 3) + 2.$$

2. **a.** Montrer que :

$$f'(x)\frac{2\ln x - 3}{x}.$$

   où f' désigne la fonction dérivée de f.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   c. Dresser le tableau de variations de f sur $]0~;~+\infty[$.
3. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue X :

$$X^2 - 3X + 2 = 0.$$

   b. En déduire les solutions exactes dans $]0~;~+\infty[$ de l'équation : $f(x) = 0$.
   c. Déduire, des questions **2.c.** et **3.b.**, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
4. On note Γ la courbe représentative de f dans le repére $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
   a. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point d'abscisse e.
   b. Tracer la courbe Γ et la tangente Δ.

Partie C : Primitive et calcul d'aire

1. Montrer que la fonction, définie sur $]0~;~+\infty[$, par :

$$x \longmapsto x(\ln x)^2 - 5x\ln x + 5x,$$

   est une primitive sur $]0~;~+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto (\ln x)^2 - 3\ln x$.
2. En déduire la primitive F de f sur $]0~;~+\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.
3. **a.** Hachurer la partie du plan délimitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \text{e}$ et $x = \text{e}^2$.
   b. Calculer, en cm^2, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie hachurée. On en donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} prés.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie septembre 2003
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

À tout point M d'affixe $z = x + \text{i}y$, distinct de O, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z. On pose dans la suite de l'exercice $z' = x' + \text{i}y'$ où x' et y' sont deux réels.

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
2. On appelle A, B, C, D, les points d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = \text{i}, \quad z_{\text{B}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{i}, \quad z_{\text{C}} = -1, \quad z_{\text{D}} = -2 - \text{i}.$$

   a. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes $z_{\text{B}'} = \dfrac{1}{\overline{z_{\text{B}}}}$ et $z_{\text{D}'} = \dfrac{1}{\overline{z_{\text{D}}}}$.

   b. Montrer que les points O, B et B′ sont alignés ainsi que les points O, D et D′.

   c. Calculer $|z_{\text{A}} - z_{\text{B}}|$, $\left|z_{\text{B}'} - z_{\text{B}}\right|$, $\left|z_{\text{D}'} - z_{\text{B}}\right|$ et en déduire que les quatre points A, B′, C, D′ sont sur un même cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.

3. Placer les points A, B, C et D dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, tracer le cercle $\mathscr{C}$.
4. Utiliser les questions précédentes pour construire géométriquement les points B′ et D′.

EXERCICE 2 **5 points**

Une urne contient dix jetons indiscernables au toucher. Sur chacun de ces jetons est inscrit l'un des numéros 1, 2, 3 ou 4.
Un jeton porte le numéro 1, deux jetons le numéro 2, trois jetons le numéro 3 et 4 jetons le numéro 4.
Un jeu consiste à tirer au hasard et avec remise, deux jetons de cette urne ; les tirages sont supposés équiprobables. À l'issue de la partie, le joueur reçoit le nombre d'euros correspondant à la somme des numéros inscrits sur les deux jetons tirés.

1. On appelle X la variable aléatoire qui, à l'issue de chaque partie, associe le nombre d'euros reçus par le joueur.

   a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

   b. Calculer $p(X = 2)$, probabilité que la somme remise au joueur soit 2 €.

   c. Montrer que $p(X = 6) = \dfrac{25}{100}$.

   d. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. On présentera les résultats dans un tableau.

e. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Le joueur doit verser une « mise » m exprimée en euros, avant chaque partie. Quelle doit être la valeur minimale de cette mise, arrondie à l'euro, pour que l'organisateur du jeu ait l'espoir d'être bénéficiaire ?

PROBLÈME **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

I. Première partie : étude d'une fonction *g*

On appelle g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x.$$

1. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. (L'étude des limites aux bornes de l'intervalle n'est pas demandée).

2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

II. Deuxiéme partie : étude d'une fonction *f*

On appelle f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{2} + 2 + \frac{\ln x}{x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. On appelle (D) la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} + 2$.

  a. Démontrer que la droite (D) est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

  b. Étudier les positions respectives de la droite (D) et de la courbe $\mathscr{C}$.

3. Le sens de variation de f

  a. Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

  b. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$ et en déduire le sens de variations de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

  c. Dresser le tableau de variations de f.

4. On appelle (Δ) la tangente à $\mathscr{C}$ en son point A d'abscisse 1.

  a. Déterminer une équation de (Δ).

  b. Déterminer les coordonnées du point B de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente (T) est parallèle à (D).

5. Construire avec soin les droites (D), (Δ), (T) puis la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique 2 cm.

6. Calcul d'aire.

  a. On appelle k la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $k(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
  Déterminer une primitive K de k sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

  b. Soit t un nombre réel strictement supérieur à 1. Calculer en cm^2 l'aire $\mathscr{A}(t)$ du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$ la droite (D) et les deux droités d'équations $x = 1$ et $x = t$.

  c. Déterminer t pour que $\mathscr{A}(t) = 100$ cm^2.

Durée : 4 heures

∽ STI Génie électronique, électrotechnique, optique ∾ France septembre 2003

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Toutes les questions sauf la question 2. d. peuvent être traitées par toutes les spécialités de STI et STL.

EXERCICE 1 — 5 points

1. a. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

On désigne par z_1 la solution de partie imaginaire positive et par z_2 l'autre solution.

b. Déterminer le module et un argument de chacune des solutions.

c. En déduire le module et un argument de z_1^2 et de z_2^2 ; calculer ces deux nombres sous forme algébrique.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On désigne par A, B, A′ et B′ les points d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 1 + \text{i} \quad ; \quad z_{\text{B}} = 1 - \text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad z_{\text{A}'} = -2 + 2\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{B}'} = -2 - 2\text{i}\sqrt{3}.$$

a. Placer ces points dans le plan complexe.

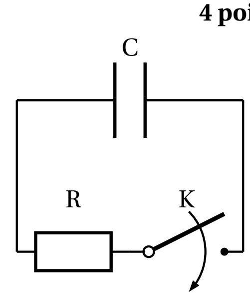
b. Déterminer et justifier la nature du quadrilatère AA′B′B.

c. Soit Ω le point d'affixe −2.
Calculer les distance ΩA et ΩA′.
En déduire que les points A, B, A′ et B′ sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
Calculer l'affixe des images de chacun des points B et A′ par la rotation R.
Que remarque-t-on ?

EXERCICE 2 — 4 points

Le circuit électrique représenté ci-contre est constitué d'un condensateur parfait de capacité C exprimée en farads, d'un résistor de résistance R exprimée en ohms et d'un interrupteur K. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K et le condensateur, initialement chargé, se décharge dans le circuit. Dans tout l'exercice l'unité de temps est la seconde.



On note $u(t)$ la valeur, exprimée en volts, de la tension aux bornes du condensateur à l'instant t exprimé en secondes.
On définit ainsi une fonction u sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On admet que cette fonction est dérivable sur cet intervalle et est solution de l'équation différentielle (E)

$$y' + \frac{1}{\mathrm{RC}} y = 0.$$

Dans tout l'exercice on prend pour valeurs numériques C = 10 et R = 10, l'équation différentielle (E) est donc

$$y' + y = 0.$$

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle (E).
   b. Déterminer la solution particulière u de (E) vérifiant $u(0) = 12$.
2. On admet que u est la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$u(t) = 12\mathrm{e}^{-t}.$$

   a. Calculer t_1, la valeur exacte de l'instant à partir duquel la tension $u(t)$, exprimée en volts, est inférieure ou égale à 0,6.
   b. Donner une valeur approchée de t_1 à 10^{-2} près, par excès.
3. L'énergie emmagasinée dans le condensateur, exprimée en joules, a pour valeur à l'instant t

$$W(t) = \frac{1}{2}\mathrm{C} \times [u(t)]^2.$$

   On définit ainsi une fonction W sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$. Calculer la valeur moyenne W_m de cette fonction entre les instants $t = 0$ et $t = 2$.
   On en donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-5} près par défaut.

PROBLÈME **11 points**

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0~;~+\infty[$

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle I par

$$g(x) = 1 - x^2 - \ln x.$$

On note g' sa fonction dérivée.

1. Pour tout x de l'intervalle I, calculer $g'(x)$ et préciser son signe.
2. Dresser le tableau de variations de g sur I (on ne demande pas les limites aux bornes de I).
3. **a.** Calculer $g(1)$.
   b. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle I.

Partie B : étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur I par :

$$f(x) = -x + 3 + \frac{\ln x}{x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan, d'unité graphique 2 cm.

1. Étudier la limite de f en 0 et déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation : $y = -x + 3$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   Montrer que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   c. Déterminer les coordonnées du point P, intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

   d. Déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle I

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

   où g est la fonction définie à la **partie A**.

   b. En déduire le signe de $f'(x)$.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle I (on précisera les limites aux bornes de I).
4. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet des solutions α et β telles que $0,1 < \alpha < 1$ et $3 < \beta < 4$.

   b. À l'aide d'une calculatrice, donner un encadrement d'amplitude $0,1$ des deux valeurs α et β.
5. Calculer les coordonnées du point Q de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à $\mathscr{D}$.
6. Représenter la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$. On fera figurer les points P et Q.

Partie C : calcul d'aire

1. Calculer la dérivée de la fonction h définie sur l'intervalle I par :

$$h(x) = (\ln x)^2.$$

2. Calculer en unités d'aire, la valeur de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Nouvelle-Calédonie ∾
Génie électronique, électrotechnique novembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre (E).
2. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3} \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3.$$

3. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = \sqrt{3}$.
5. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{9}\right]$.

Exercice 2 **5 points**

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 6z\sqrt{2} + 36 = 0.$$

2. On considére les nombres complexes $z_1 = 3\sqrt{2} - 3\mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = 3\sqrt{2} + 3\mathrm{i}\sqrt{2}$.
   a. Calculer le module et un argument de z_1 et de z_2.
   b. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, placer les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2.
3. **a.** En déduire qu'il existe une rotation r de centre O qui transforme M_1 en M_2. Préciser l'angle de cette rotation.
   b. Par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, M_2 a pour image M_3, M_3 a pour image M_4.
   Construire les points M_3 et M_4 sur la figure.
   c. Préciser la nature du quadrilatére $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4$? Justifier la réponse.

PROBLÈME **10 points**

On considére la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = 2x - 3 + \frac{4}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1. Démontrer que, pour tout nombre réel ; on a : $f(x) = 2x + 1 - \dfrac{4\text{e}^x}{\text{e}^x + 1}$. Dans la suite du probléme, on pourra utiliser l'une ou l'autre des expressions de $f(x)$.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. Démontrer que la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ et préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}_1$.
3. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Démontrer que la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation $y = 2x - 3$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ et préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}_2$.
4. On désigne par f' la dérivée de f.

   Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{2\left(\text{e}^{2x} + 1\right)}{\left(\text{e}^x + 1\right)^2}$ puis étudier le sens de variations de f.
5. Écrire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
6. Construire $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
7. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[0\,;\,1]$, une solution unique α, puis donner l'arrondi de α au centième.

   b. En utilisant les résultats précédents, indiquer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.
8. **a.** Donner une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ (on utilisera la deuxiéme expression de $f(x)$).

   b. Calculer, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. Donner l'arrondi de $\mathcal{A}$ au mm^2.

∽ Baccalauréat STI Nouvelle-Calédonie ∾
Génie mécanique, énergétique, civil novembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

On note i nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Pour tout nombre complexe z on pose $P(z) = z^3 - 2z - 4$.

1. Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a $P(z) = (z-2)(z^2+2z+2)$.
2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équalion $P(z) = 0$.
3. On appelle A, B, C et D les points de $\mathscr{P}$ d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -1 - \text{i}\ ;\ z_{\text{B}} = 2\ ;\ z_{\text{C}} = 3 + 3\text{i}\ ;\ z_{\text{D}} = 2\text{i}.$$

   a. Placer les points A, B C et D dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, unité graphique 2 cm.

   b. Calculer $z_{\text{B}} - z_{\text{A}},\ z_{\text{C}} - z_{\text{D}},\ z_{\text{D}} - z_{\text{A}}$.

   c. Justifier alors que $\overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{\text{CD}}$ et que AD = AB.

   d. En déduire la nature du quadrilatére ABCD.

Exercice 2 **5 points**

On considére les intégrales I et J définies par I= $\displaystyle\int_0^{\pi} x(\cos x)^2\,\text{d}x$ et J = $\displaystyle\int_0^{\pi} x(\sin x)^2\,\text{d}x$.

Le but de cet exercice est de déterminer les valeurs exactes de ces intégrales sans les calculer.

1. Déterminer la valeur exacte de I + J.
2. On se propose dans cette question de rechercher de la valeur exacte de I − J.

   a. Démontrer que I − J = $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(2x)\,\text{d}x$.

   b. On appelle f la fonction numérique définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x).$$

   Démontrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = x\cos(2x)$.

   c. En déduire la valeur exacte de I − J.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs exactes des intégrales I et J.

PROBLÉME **10 points**

I) Première partie : étude d'une fonction g

On appelle g la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par :

$$g(x) = (x+1)\text{e}^x + 1.$$

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$. (On pourra écrire $g(x)$ sous la forme $g(x) = x\text{e}^x + \text{e}^x + 1$).
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. Étude du signe de $g(x)$.

   a. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x et étudier son signe sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

   b. En déduire le sens de variation de g s It et dresser son tableau de variations dans lequel on précisera la valeur exacte de l'extremum de g.

   c. Justifier que pour tout x, $g(x) > 0$.

II) Deuxième partie : étude et représentation graphique d'une fonctïon f
On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\text{e}^x + x - 3$.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan, unité graphique : 1 cm.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.
2. On appelle (D) la droite d'équation $y = x - 3$.

   a. Démontrer que la droite (D) est asymptote á la courbe $\mathscr{C}$.

   b. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (D). On précisera les coordonnées de leur point d'intersectian I.

3. Étude des variations de f.

   a. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = g(x)$.

   b. À l'aide des résultats obtenus dans la première partie, déterminer le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.
5. Tracer la droite (D), la tangente (T) puis la courbe dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

III) Troisième partie : le but de cette partie est de déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et de donner un encadrement de celles-ci.

1. En utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et en justifiant la réponse, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
2. Localisation et encadrement d'une solution.

   a. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

   b. Justifier les trois affirmations suivantes :
   (1) L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty ; 0]$.
   (2) L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
   (3) L'équation $f(x) = 0$ a une solution unique notée α dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

   c. En expliquant brièvement la méthode utilisée, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

∽ Baccalauréat STI Arts appliqués– France ∽ juin 2004

EXERCICE 1 **8 points**

Sophie et Luc jouent très mal aux échecs, c'est pourquoi ils ont inventé le jeu suivant :

Sophie possède un sac contenant cinq pièces blanches : une reine, une tour, deux cavaliers et un pion.

Le sac de Luc contient cinq pièces noires : une reine, deux tours, et deux pions.

Principe du jeu :

Chacun tire une pièce de son sac, celui qui a la pièce la plus forte gagne la partie.
Une reine bat toutes les autres pièces.
Une tour bat un cavalier ou un pion.
Un cavalier bat un pion.
Deux pièces identiques font partie nulle.

Exemples :

Sophie tire une reine et Luc une tour : Sophie gagne la partie.
Sophie et Luc tirent tous les deux un pion : il y a partie nulle.

1. Dans le tableau ci-dessous, chaque case correspond à une issue possible du jeu.

Luc / Sophie	R	T_1	T_2	P_1	P_2
R					
T					
C_1					
C_2					
P					

Recopier ce tableau et compléter chaque case :

– par un S lorsque Sophie gagne.
– Par un L lorsque Luc gagne.
– Par un N lorsque la partie est nulle.

On suppose les tirages équiprobables.

2. Calculer les probabilités des évènements suivants :

a. A : « La partie est nulle ».
b. B : « Sophie gagne ».
c. C : « Luc gagne ».

3. Y a-t-il, du point de vue du contenu des sacs, un joueur avantagé par rapport à l'autre ?
Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **12 points**

Un musée souhaite orner ses publications d'un motif en filigrane.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 5 cm.

L'axe des ordonnées sera centré sur la feuille de papier millimétré.

Partie A

On considére la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{x} - 4x.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. f' désignant la fonction dérivée de f, calculer $f'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0.
3. Tracer avec soin la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente T en A.
4. Calculer l'intégrale $\mathrm{I}_f = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On considére la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$g(x) = \ln(x+1).$$

On appelle $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction g. Dresser son tableau de variations.
2. Tracer avec soin la courbe $\mathscr{C}_g$ dans le même repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ que précédemment.
3. Soit G la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par

$$G(x) = (x+1)\ln(x+1) - (x+1).$$

   a. Vérifier que G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

   b. Calculer l'intégrale $\mathrm{I}_g = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie C : constitution du motif

On nomme P le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1 et Q le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse 1.

La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées transforme les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, respectivement en courbes $\mathscr{C}'_f$ et $\mathscr{C}'_g$ (les points P et Q ayant pour images respectives P$'$ et Q$'$).

Tracer les courbes $\mathscr{C}'_f$ et $\mathscr{C}'_g$ ainsi que les segments [PQ] et [P$'$Q$'$].

Le domaine limité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}'_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}'_g$ ainsi que par les segments [PQ] et [P$'$Q$'$] constitue le motif que cherche à reproduire le musée.

Expliquer comment on peut calculer l'aire de ce motif et calculer cette aire en cm^2 (on donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près).

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie civil France juin 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 2 cm.
Le nombre i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Soit trois nombres complexes

$$z_1 = \sqrt{3} + \text{i} \quad ; \quad z_2 = \frac{z_1^2}{2} \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{4}{z_2}.$$

   a. Déterminer le module et un argument de z_1.

   b. Écrire sous la forme $a + b\text{i}$ les complexes z_2 et z_3.

2. Soit quatre nombres complexes

$$z_{\text{A}} = \sqrt{3} + \text{i},\ z_{\text{B}} = 1 + \text{i}\sqrt{3},\ z_{\text{C}} = -\sqrt{3} + \text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{D}} = 1 - \text{i}\sqrt{3}.$$

   a. Montrer que les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_{\text{A}}, z_{\text{B}}, z_{\text{A}}$ et z_{D} sont sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
   Tracer le cercle dans le plan complexe et placer les points A, B, C et D.

   b. Calculer $|z_{\text{C}} - z_{\text{B}}|$ et $|z_{\text{D}} - z_{\text{A}}|$.

   c. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{CD}}$; vérifier que $\overrightarrow{\text{CD}} = -\left(\sqrt{3} + 2\right)\overrightarrow{\text{AB}}$.

   d. Indiquer si les propositions suivantes sont justes ou fausses ; justifier vos réponses.
   AD = BC ;
   CD = 3AB ;
   ABCD est un trapèze isocèle.

EXERCICE 2 **4 points**

Une association de randonneurs organise un repas. Elle fixe le prix de la manière suivante :

- le tarif pour un enfant âgé de 10 ans ou moins est de 5 € ;
- le tarif pour un jeune âgé de 11 à 16 ans est de 8 € ;
- dans les autres cas le tarif est de 10 €.

De plus, tout membre de l'association bénéficie d'une réduction de 20 % appliquée au tarif le concernant. Ainsi, un membre âgé de 11 à 16 ans paiera 6,40 €.
Les participants au repas, au nombre de 600, sont répartis selon le tableau ci-dessous :

Participant	10 ans ou moins	entre 11 et 16 ans	plus de 16 ans	Total
membre	50	40	110	200
non-membre	110	100	190	400
Total	160	140	300	600

Partie A

On choisit au hasard une personne ayant participé au repas.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit membre de l'association ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle paye plus de 7 € ?
3. On considére la variable aléatoire X égale au prix du repas pour un participant choisi au hasard. Vérifier que la probabilité pour que X prenne la valeur $6,40$ est égale à $\dfrac{1}{15}$.
4. Déterminer les valeurs prises par X, puis donner la loi de probabilité de X.
5. Déterminer l'espérance mathématique de X, notée $\mathrm{E}(X)$ (calculer la valeur exacte sous forme de fraction, puis une valeur décimale approchée à $0,01$ près).

Partie B

Calculer la recette totale perçue par l'association à l'occasion de ce repas.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = -x + \ln(2x+2) - \ln(x+2).$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (4 cm pour une unité en abscisses et 8 cm pour une unité en ordonnées).

Préliminaires :

1. Montrer que sur $]-1\ ;\ +\infty[$, $(2x+2) > 0$ et $(x+2) > 0$.
2. Étudier le signe de x^2+3x+1 sur $\mathbb{R}$ et en déduire que sur $]-1\ ;\ +\infty[$, x^2+3x+1 s'annule pour une et une seule valeur a dont on donnera la valeur exacte.

Partie A : Limites et asymptotes

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x)$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
2.
   a. Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = -x + \ln 2 + \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$.

   b. Déterminer alors $\displaystyle\lim_{x\to-+\infty} f(x)$.

   c. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x + \ln(2)$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

   d. Déterminer la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

Partie B : Étude des variations

1. Calculer la dérivée f' de f et montrer que $f'(x) = -\dfrac{x^2+3x+1}{(x+1)(x+2)}$.
2. À l'aide des résultats obtenus dans les préliminaires, étudier le signe de f' sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
3. Construire le tableau de variations de la fonction f (on se contentera d'une valeur décimale approchée à 10^{-1} près de l'extremum de f).

Partie C : Représentation graphique

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans l'intervalle $[-0,8\ ;\ -0,4]$, une solution unique notée b.

   Donner un encadrement de b à 10^{-2} prés de b.

2. Déterminer une équation de la droite T tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
3. Reproduire et compléter le tableau suivant : (on donnera les résultats arrondis à 10^{-1} près) :

x	$-0,8$	$\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$	0	0,5	1	2
$f(x)$						

4. Représenter graphiquement la droite T, les asymptotes et $(\mathscr{C})$ dans le repère donné.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie des matériaux France ∽ juin 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 — 5 points

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 6z + 12 = 0.$$

b. Écrire les solutions de cette équation sous forme exponentielle.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, placer les points A, B et I d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad z_{\mathrm{B}} = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{I}} = 2.$$

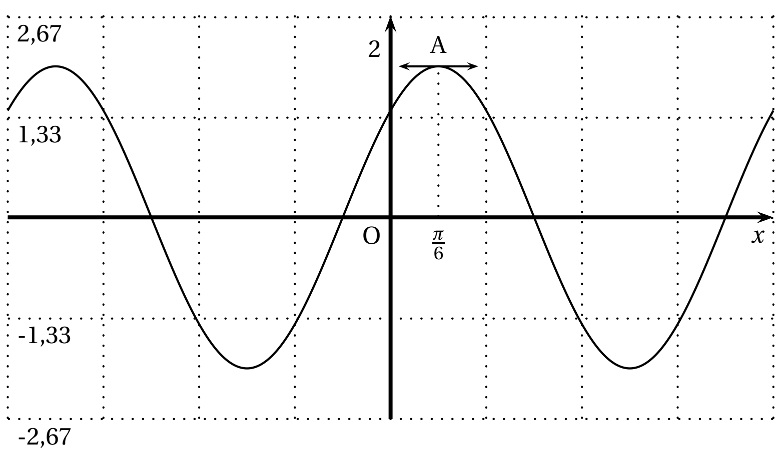
a. Montrer que les points A, B et O sont sur un cercle de centre I dont on précisera le rayon.

b. Donner, en le justifiant, la nature du triangle OAB.

c. Placer le point C d'affixe $z_{\mathrm{C}} = -2\mathrm{i}\sqrt{3}$. Montrer que les points A, C et I sont alignés.

EXERCICE 2 — 4 points

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $4y'' + 9y = 0$.
2. On désigne par f la solution particulière de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



Il est précisé que la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{\pi}{6}\ ;\ 2\right)$. Déterminer une expression de $f(x)$.

3. Montrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} f(x)\,\mathrm{d}x$. Interpréter graphiquement le résultat.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = 2 + (2-x)\mathrm{e}^{2x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées)

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on pourra poser $X = 2x$).

   b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

   c. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Δ.
3. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (3-2x)\mathrm{e}^{2x}$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

   b. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$.
4. **a.** Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   b. Tracer Δ, $\mathscr{T}$ puis $\mathscr{C}$.
5. Soit G la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par

   $$G(x) = -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + \frac{5}{4}\mathrm{e}^{2x}.$$

   Montrer que G est une primitive de la fonction g définie pour tout nombre réel x par $g(x) = (2-x)\mathrm{e}^{2x}$.
6. **a.** Hachurer la partie $\mathscr{A}$ du plan limitée par $\mathscr{C}$, la droite d'équation $y = 2$ et l'axe des ordonnées.

   b. Calculer l'aire de $\mathscr{A}$. En donner la valeur exacte en unités d'aire.
   Donner une valeur arrondie de cette aire, en cm^2, à 10^{-2} près.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Polynésie juin 2004 ∽
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = \text{i} \quad ; \quad b = 1 - 2\text{i} \quad ; \quad c = 3 + 2\text{i} \quad ; \quad d = -1 + 4\text{i} \quad ; \quad e = -3.$$

On considère aussi l'application f qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \text{i}z - 1 + \text{i}$.

1. Placer les points A, B, C, D et E clans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
2. Étude de quelques cas particuliers.
   a. Vérifier que l'image de A par f est le point A lui-même et que l'image de B est le point C.
   b. Déterminer les images de C, D et E par f.
3. Étude du quadrilatère BCDE.
   a. Calculer $\dfrac{b+d}{2}$ et $\dfrac{c+e}{2}$; qu'en déduit-on pour le quadrilatère BCDE ?
   b. Calculer $|d - b|$ et $|e - c|$. Quelle information supplémentaire obtient-on sur le quadrilatère BCDE ?
   c. Montrer BC = BE et en déduire la nature exacte du quadrilatère BCDE.

EXERCICE 2 **4 points**

Une urne opaque contient 25 boules de deux couleurs, indiscernables au toucher : 6 rouges et 19 jaunes.
Parmi les rouges, trois portent le nombre 0, deux le nombre 5 et une le nombre 10 ; parmi les jaunes, dix portent le nombre 0, cinq le nombre 1, deux le nombre 5 et deux le nombre 10.

1. On tire une boule de l'urne, au hasard ; tous les tirages sont équiprobables.
   Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   a. A : « la boule tirée ne porte pas le nombre 0 ».
   b. B : « la boule tirée est rouge et porte un nombre pair ».
   c. C : « la boule tirée est jaune ou porte un nombre impair ».
   (*Les résultats seront donnés sous forme décimale exacte*)
2. On organise une tombola.
   Pour participer à une partie, un joueur doit miser 2 euros. Il tire ensuite une boule de l'urne. Si cette boule est jaune, il reçoit une somme en euros égale

au nombre inscrit sur la boule ; si elle est rouge, il reçoit une somme en euros égale au double du nombre inscrit sur la boule.

On appelle « gain » du joueur la différence entre la somme reçue et la mise :

Exemples :

si le joueur tire une boule jaune portant le nombre 1, son « gain » est égal à -1 euro.

si le joueur tire une boule rouge portant le nombre 5, son « gain » est égal à 8 euros.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le « gain » du joueur.

a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer, en détaillant le calcul, l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Interpréter ce résultat.

PROBLÈME **11 points**

I. Première partie

1. Découverte d'une fonction f

a. Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ où y est une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

b. Déterminer la solution particuliére f de cette équation différentielle vérifiant $f(0) = 1$.

2. Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x par $g(x) = 3\mathrm{e}^x + 2x - 4$.

Vérifier que g est solution de l'équation différentielle $y' - y = 6 - 2x$.

II. Deuxième partie : Étude de la fonction $h = f - g$

On considère la fonction h définie pour tout nombre réel x par

$$h(x) = \mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^x - 2x + 4,$$

et on appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Vérifier que $h(x) = \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 3 - 2\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{4}{\mathrm{e}^x}\right)$ pour tout réel x et en déduire la limite de h en $+\infty$

2. Étude en $-\infty$.

a. Déterminer la limite de h en $-\infty$.

b. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -2x + 4$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

c. On pose pour tout réel x, $d(x) = h(x) + 2x - 4$;

- vérifier que $d(x) = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 3)$.
- étudier le signe de $d(x)$ pour tout nombre réel x.
- en déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

3. Étude de la dérivée de h.

a. Calculer $h'(x)$ pour tout réel x et vérifier que $h'(x) = \left(e^{x} - 2\right)\left(2e^{x} + 1\right)$.

b. Étudier le signe de $h'(x)$ pour tout nombre réel x, en déduire les variations de h et dresser son tableau de variations ; on donnera la valeur exacte du minimum de h.

4. Tracer la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ pour x appartenant a l'intervalle $[-4~;~1,5]$.

III. Troisième partie : calcul d'une aire

On considère le domaine plan limité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite $\mathcal{D}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 3$.

1. Hachurer le domaine sur le graphique précédent.

2. Calculer en cm^2 la valeur exacte de l'aire du domaine J.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie électronique France juin 2004

EXERCICE 1 **5 points**

Le nombre i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans, l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 4z\sqrt{2} + 16 = 0.$$

2. **a.** On considère les nombres complexes

$$z_A = 4\text{i} \qquad ; \qquad z_B = 2\sqrt{2}(1-\text{i}) \qquad ; \qquad z_C = 2\sqrt{2}(1+\text{i}).$$

Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres.

b. Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
Placer dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

3. À tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe z' par la formule

$$z' = \text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}} \times z.$$

On définit la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

a. Quelle est cette transformation ? Donner ses éléments caractéristiques.

b. Montrer que $z'_B = z_A$. Que peut-on en déduire pour les points A et B ?

c. Calculer z'_A sous forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ (avec $r > 0$), puis placer, dans le repére $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ le point D d'affixe $z_D = z'_A$.

d. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 **4 points**

Un organisme de voyages prépare en Logoland un circuit de découverte qui doit passer une et une seule fois dans chacune des quatre villes notées respectivement I, L, O et Z.

Pour établir l'ordre des visites des villes, l'organisme doit tenir compte de deux impératifs

- Le circuit ne peut partir que de I, L ou Z car la ville O ne possède pas d'aéroport international.
- La fin du voyage devant être en bord de mer, le circuit doit se terminer par I ou Z.

Un circuit possible est I, L, O et Z. Il sera noté (I, L, O, Z) .

Un exemple de circuit impossible est I, O, Z, L. Il est noté (I, O, Z, L).

1. Expliquer pourquoi ce dernier circuit est impossible.
2. Déterminer les huit circuits possibles.
3. On choisit un circuit au hasard (chaque circuit a la même probabilité d'être choisi).

   a. Quelle est la probabilité pour que le circuit se termine à I ?

   b. Quelle est la probabilité pour que le circuit commence à L ?

4. L'agence de voyages s'intéresse au nombre de kilométres parcourus en bus entre la ville de départ et la ville d'arrivée pour chaque circuit. Les distances exprimées en kilométres entre les quatre villes sont indiquées dans le tableau suivant :

	L	I	Z	0
L	0	500	600	300
I	500	0	500	700
Z	600	500	0	600
O	300	700	600	0

   Par exemple, on peut lire que la distance entre O et I est de 700 km.

   On note X la variable aléatoire qui à chaque circuit associe le nombre de kilomètres parcourus.

   a. En s'aidant du tableau fourni, déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

   b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   c. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

PROBLÈME **11 points**

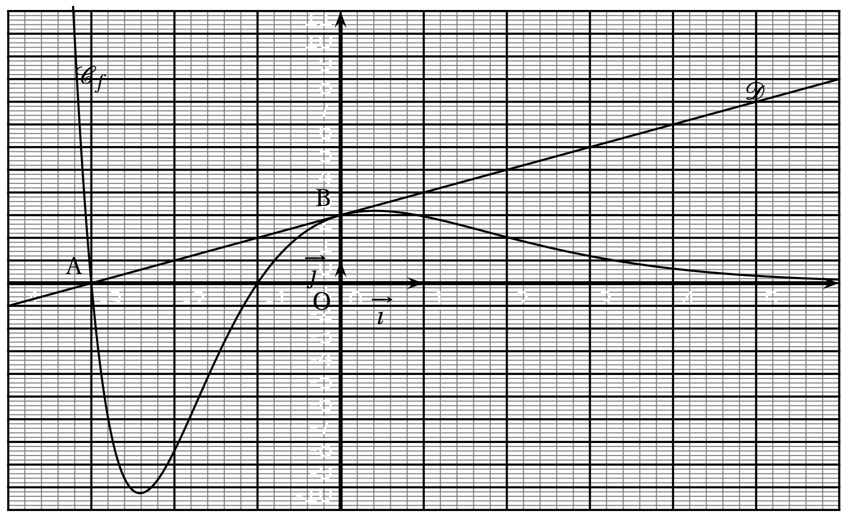
Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\text{e}^{-x}$$

où a, b et c désignent trois nombres réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.



On admet que la droite $\mathscr{D}$ passe par A et est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.

1. **a.** À l'aide d'une lecture graphique, déterminer les coordonnées entiéres des points A et B.
   En déduire $f(-3)$ et $f(0)$.
   b. Montrer qu'une équation de la droite (AB) est : $y = x + 3$. En déduire la valeur de $f'(0)$.
2. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,
   $f'(x) = \left[-ax^2 + (2a - b)x + b - c\right] \mathrm{e}^{-x}$.
   b. En déduire $f'(0)$, en fonction de b et c.
3. **a.** En utilisant les questions précédentes, montrer que les réels a, b et c sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 9a - 3b + c & = & 0 \\ b - c & = & 1 \\ c & = & 3 \end{array}\right.$$

   b. Résoudre le système et en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie B

On suppose que f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 + 4x + 3\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

1. **a.** Vérifier que pour x différent de zéro, $f(x) = \left(1 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right) x^2 \mathrm{e}^{-x}$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. En déduire une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   c. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. **a.** Vérifier que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ $f'(x) = (-x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{-x}$.
   b. Pour tout x réel, étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.
   c. Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'ordonnée de chacun des points de la courbe $\mathscr{C}_f$, où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique α pour x appartenant à $[-1 ; 0]$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie C

1. Soit F La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = (-x^2 - 6x - 9)\mathrm{e}^{-x}.$$

Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x+3-f(x)$.
3. On considère la partie du plan comprise entre la droite $\mathscr{D}$, la courbe $\mathscr{C}_f$, et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 0$.

   On désigne par $\mathscr{A}$ la valeur, exprimée en cm^2, de l'aire de cette partie.

   Calculer $\mathscr{A}$.

∽ Baccalauréat STI Génie électronique Polynésie ∾ juin 2004

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On considère les nombres complexes :

$$z_1 = -2 + 2i\sqrt{3} \qquad z_2 = 4e^{\frac{5i\pi}{6}} \qquad z_3 = 2 - 2i.$$

1. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_3.
2. Écrire z_2 sous forme algébrique.
3. Placer, dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A, B, C d'affixes respectives z_1, z_2, z_3.
4. **a.** Calculer le module et un argument de $\dfrac{z_2}{z_1}$.

   b. En déduire qu'il existe une rotation de centre O qui transforme A en B. On précisera l'angle de cette rotation.
5. Soit D le point d'affixe $z_4 = z_3 e^{\frac{i\pi}{6}}$.

   a. Placer D dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ en expliquant la construction.

   b. Écrire z_4 sous forme algébrique.

   c. Écrire z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

   d. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

   b. Déterminer la solution particuliére f de l'équation précédente telle que $f(0) = 1$.

   c. Déterminer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. On considére la suite numérique (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = f(n) = e^{-n}$.

   a. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{e}$.

   b. Étudier le sens de variations de la suite (u_n).

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

   d. À partir de quelle valeur de n a-t-on $u_n < 10^{-8}$?
3. **a.** Exprimer, en fonction de n, la somme $S_n = 0 + 1 + 2 + \ldots + n$.

   b. En déduire, en fonction de n, l'expression du produit $P_n = u_0 \cdot u_1 \cdot u_2 \ldots u_n$.

PROBLÈME **10 points**

La feuille fournie en annexe sera rendue avec la copie

Partie A : détermination d'une fonction. Tangente à une courbe

$\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est le repère orthonormal, d'unité graphique 4 cm, donné en annexe.

La courbe $\mathcal{G}$, déjà tracée, représente une fonction g de la variable x définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des coefficients réels.

$\mathcal{G}$ passe par les points $\text{E}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ $\text{A}(1\,;\,-1)$ et $\text{B}(0\,;\,1)$.

1. **a.** À l'aide des renseignements ci-dessus, écrire un système de trois équations vérifiées par a, b et c.

   b. En déduire que, pour tout nombre réel positif x, $g(x) = -2x^2 + 1$.

2. **a.** La courbe $\mathcal{G}$ coupe l'axe des abscisses au point K. Déterminer la valeur exacte de l'abscisse de K.

   b. Écrire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{G}$ au point K et tracer $\mathcal{T}$ sur le graphique de l'annexe. On indiquera les points utilisés pour tracer $\mathcal{T}$.

Partie B : étude d'une fonction et tracé d'une courbe

Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 1 - 2x^2 + \ln x$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ donné en annexe.

1. **a.** Déterminer la limite en 0 de la fonction f. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

   b. En remarquant que $f(x)$ peut aussi s'écrire sous la forme $f(x) = 1 + x\left(-2x + \dfrac{\ln x}{x}\right)$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. **a.** Déterminer la dérivée de f.

   b. Étudier le signe de cette dérivée sur $]0\,;\,+\infty[$. Justifier.

   c. En déduire le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. **a.** Calculer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{G}$.

   b. Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{G}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ sur le graphique après avoir complété le tableau de valeurs de f donné en annexe.

Partie C Calcul d'aire

1. Soit $\mathcal{E}$ la partie du plan limitée par $\mathcal{G}$, $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{\text{e}^2}$ et $x = 1$.

   Hachurer $\mathcal{E}$.

2. Soit H la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $H(x) = x - x\ln x$. Déterminer la dérivée de H.

3. **a.** Déterminer, en explicitant le calcul, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{E}$ en unités d'aire.

   b. Écrire l'arrondi au centième de l'aire $\mathcal{A}$ exprimée en cm^2.

Cette feuille annexe est à rendre avec la copie

Annexes du problème

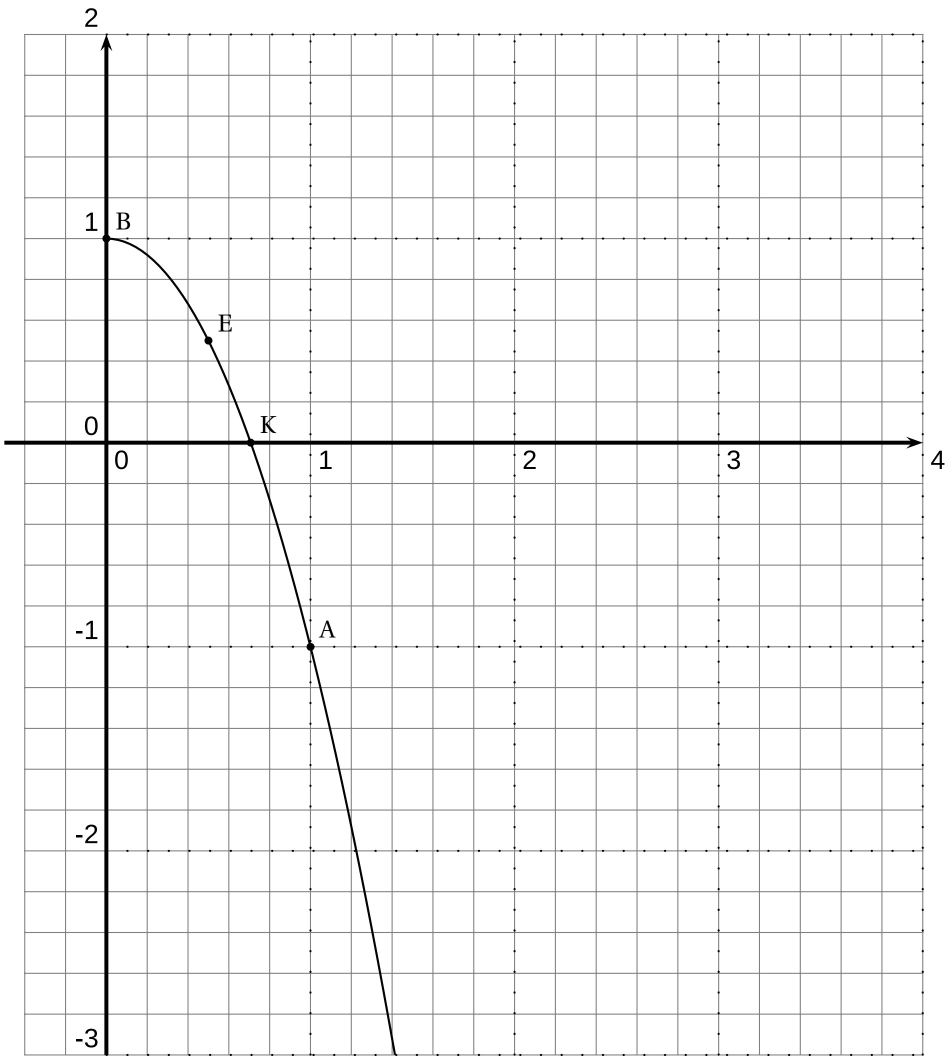


Tableau de valeurs de f

x	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
$f(x)$							