Baccalauréat STI 2005

L'intégrale de septembre 2004 à juin 2005

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat STI Arts appliqués France septembre 2004

Exercice 1 **8 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Parmi les réponses proposées à chaque question ou sous-question, une seule est correcte. Dans chaque cas une seule réponse est attendue : on indiquera seulement sur la copie la réponse exacte (aucune justification n'est demandée). Toutes les questions sont indépendantes. Chaque réponse exacte rapporte un point.

1. Des jetons contenus dans une urne peuvent être de 3 formes (ronds, carrés ou triangulaires) et de 4 couleurs (rouge, bleu, vert ou jaune). Toutes les possibilités de formes et de couleurs sont présentes dans l'urne. Le nombre de jetons différents est :

   81   7   12   64

2. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes, la probabilité de l'évènement « tirer une dame ou un cœur » est :

   $\dfrac{12}{32}$ $\dfrac{1}{11}$ $\dfrac{11}{32}$ $\dfrac{1}{12}$

3. On considère un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique, dans ce repère, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 20$. Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :

   $y = 2x + 14$ $y = 3x$ $y = 18$ $y = 3x + 12$

4. On considère un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique, dans ce repère, de la fonction f définie sur $]2 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x-4}{x-2}$. Cette courbe admet comme asymptote la droite d'équation :

   $y = 2$ $y = 3x - 4$ $x = 2$ $y = x - 2$

5. L'équation $\ln(x+3) + \ln(x+5) = \ln 15$ admet pour ensemble de solutions :

   $\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$ $\{0\}$ $\{0 ; -8\}$ $\left\{1 ; \mathrm{e}^{-8}\right\}$

6. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ on considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $25x^2 + 36y^2 - 900 = 0$.

   a. la courbe $\mathscr{C}$ est :

   une ellipse   un cercle   une hyperbole   une parabole

   b. un de ses foyers F a pour coordonnées dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$:

   $\mathrm{F}\left(0 ; \sqrt{11}\right)$ $\mathrm{F}\left(\sqrt{11} ; 0\right)$ $\mathrm{F}\left(0 ; \sqrt{61}\right)$ $\mathrm{F}\left(\sqrt{61} ; 0\right)$

   c. un de ses sommets A a pour coordonnées :

   A(0 ; 5)   A(5 ; 0)   A(36 ; 0)   A(0 ; 36)

EXERCICE 2 **12 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 4.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Recopier et compléter le tableau suivant, en donnant pour chaque valeur de x une valeur approchée de $f(x)$ à 10^{-1} près.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	1,5	2
$f(x)$								

2. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote D dont on donnera une équation.

3. a. Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(1 - 5\mathrm{e}^{-x} + 4\mathrm{e}^{-2x}\right)$.

b. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4. a. On note f' la fonction dérivée de f, calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout x réel $f'(x) = \mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 5\right)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

5. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - 5X + 4 = 0$ d'inconnue X.

b. A l'aide de la question **a.** et en posant $X = \mathrm{e}^{x}$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x.

c. En déduire les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

6. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et l'asymptote D dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

7. a. Déterminer une primitive F de la fonction f.

b. Hachurer sur le graphique la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 4$. On appelle $\mathscr{A}$ cette partie du plan.

c. On admet que la fonction f est négative sur l'intervalle $[0 ; \ln 4]$.
Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire de $\mathscr{A}$ puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

∽ Baccalauréat STI France septembre 2004 ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **6 points**

La question **4.** est indépendante des questions **1., 2.** et **3.**.

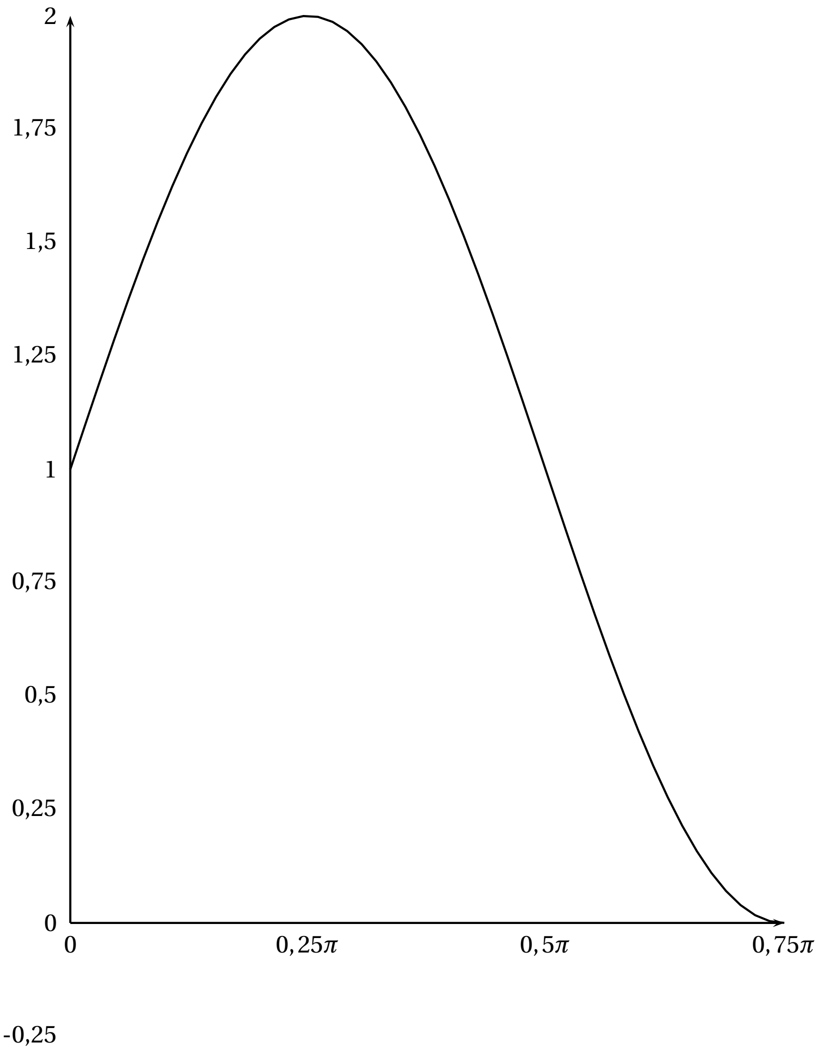
1. Soit ρ_n le terme général d'une suite géométrique de premier terme $\rho_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$.
   Déterminer ρ_n en fonction de n.
2. Soit θ_n le terme gnéral d'une suite arithmétique de premier terme $\theta_0 = \pi$ et de raison $-\frac{\pi}{3}$.
   Déterminer θ_n en fonction de n.
3. Soit z_n le nombre complexe de module ρ_n et d'argument θ_n.
   a. Donner une forme trigonométrique de z_n en fonction de n.
   b. Déterminer la forme algébrique de $z_0,\ z_1,\ z_2$ et z_3.
4. Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, (unité graphique : 2 cm) on donne les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -4, \quad z_{\text{B}} = -1 + \text{i}\sqrt{3}, \quad z_{\text{C}} = \frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_{\text{D}} = \frac{1}{2}.$$

   a. Placer les point A, B, C et D dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
   b. Soit B′ le projeté orthogonal de B sur l'axe des réels.
   Donner l'affixe de B′ et placer B′ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
   c. Calculer la valeur exacte en cm^2 de l'aire du triangle ABB′.
   d. Calculer la valeur exacte en cm^2 de l'aire du trapèze B′BCD.
   e. En déduire la valeur exacte en cm^2 de l'aire du quadrilatère ABCD.
   Donner la valeur arrondie au mm^2 près de cette aire.

T.S.V.P.

EXERCICE 2 **4 points**



Soit f la fonction numérique définie pour tout x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{3\pi}{4}\right]$ par :

$$f(x) = 1 + \sin 2x.$$

La représentation graphique Γ de la fonction f est donnée ci-dessus dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$(unité graphique 4 cm).

1. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de f.

   b. Démontrer que la courbe Γ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses aux points d'abscisses $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.

2. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sin^2(2x) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 4x)$.

3. On appelle V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe Γ autour de l'axe des abscisses.
   On admet que la valeur de V, en unités de volume, est donnée par :

$$V = \pi \int_0^{\frac{3\pi}{4}} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

   Donner la valeur exacte de V en cm^3, puis sa valeur décimale arrondie au mm^3 près.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Soit g la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, par :

$$g(x) = 1 - x\ln x.$$

1. Déterminer la limite de g en 0.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. Déterminer la fonction dérivée g' de g et étudier son signe sur $]0~;~+\infty[$.
4. Établir le tableau de variations de g sur $]0~;~+\infty[$, en précisant la valeur exacte de l'extremum de g.
5. **a.** Justifier que l'équation $g(x) = 0$ a une solution α et une seule sur l'intervalle $[1~;~\text{e}]$.
   b. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
   c. En déduire, en fonction du nombre x de $]0~;~+\infty[$, le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de $]0~;~+\infty[$, par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\text{e}^x}.$$

Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Étude du comportement de f en 0 :
   a. Déterminer la limite de f en 0.
   b. En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation.
2. Étude du comportement de f en $+\infty$:
   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. On pourra écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)\left(\dfrac{x}{\text{e}^x}\right)$.
   b. En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation.
3. Étude des variations de f
   a. Déterminer la fonction dérivée f' de f. Montrer que pour tout x de $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x\text{e}^x}$.
   b. Établir le tableau de variations de f sur $]0~;~+\infty[$ en fonction de α.
   En prenant 1,76 comme valeur approchée de α, donner une valeur approchée de $f(\alpha)$.
   c. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
4. Dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, tracer $\mathcal{T}$, les asymptotes à $\mathcal{C}$, puis la courbe $\mathcal{C}$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie Mécanique France septembre 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Une feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit $P(z) = z^3 - 8z - 32$, où z est un nombre complexe.

1. **a.** Calculer $P(4)$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 8 = 0$.
   c. Déterminer les réels a, b, c tels que : $P(z) = (z-4)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   d. Déduire des questions précédentes la résolution de l'équation $P(z) = 0$.
2. Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C d'affixes respectives :

$$z_A = 4 \quad ; \quad z_B = -2 + 2i \quad ; \quad z_C = -2 - 2i.$$

   a. Faire une figure, sur la copie, représentant les points A, B, C dans le repère.
   b. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_B et z_C.
   c. Déterminer, en justifiant, la nature du triangle OBC.
3. Soit Ω le point d'affixe $z_\Omega = \dfrac{2}{3}$.
   a. Déterminer les modules des nombres complexes $z_A - z_\Omega$, $z_B - z_\Omega$, $z_C - z_\Omega$.
   b. Que représente Ω pour le triangle ABC ?

EXERCICE 2 **4 points**

Dans un atelier de réparation un technicien s'occupe des ordinateurs en panne qui lui arrivent. Les composants à l'origine de la panne peuvent uniquement être : l'alimentation, la carte graphique ou le processeur.
Une panne simultanée de deux ou trois composants est possible.
Le technicien chargé de la détection des pannes établit le diagnostic d'un ordinateur à l'aide d'un triplet utilisant les initiales des composants, surmontées d'une barre en cas de panne.
Par exemple : (A ; CG ; $\overline{\text{P}}$) signifie que l'alimentation et la carte graphique fonctionnent et que la panne provient du processeur.

1. Établir la liste des sept diagnostics possibles sur un ordinateur en panne.
2. On suppose que les sept diagnostics ont la même probabilité d'être établis. Quelle est la probabilité pour qu'un seul des composants soit en panne ?
3. Le tableau suivant donne le coût des composants à remplacer :

Composant	Alimentation	Carte graphique	Processeur
Prix en €	80	160	80

Le coût d'une réparation est celui du remplacement des pièces auquel il faut ajouter un forfait de main-d'oeuvre de 25 € indépendant du nombre de composants à remplacer.

4. **a.** Soit X la variable aléatoire qui à chaque ordinateur en panne associe le coût de la réparation. Donner la liste des valeurs possibles de X.

b. Donner dans un tableau la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X. Arrondir le résultat à l'unité.

d. Quel devrait être le coût du forfait de la main-d'œuvre, arrondi à l'unité, pour que le prix moyen d'une réparation soit de 200 € ?

PROBLÈME **11 points**

Ce problème a pour but de montrer un exemple de courbes représentatives de deux fonctions qui sont asymptotes, puis de calculer une aire comprise entre deux courbes.

Partie A : Détermination d'une fonction

On considère la courbe représentative $\mathscr{C}$, d'une fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$, dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1,5 cm en ordonnée.

Cette courbe est représentée sur le document fourni en annexe.

Les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses ont pour coordonnées respectives $(1\,;\,0)$ et $(3\,;\,0)$.

1. Soient a et b deux nombres réels tels que, pour tout réel $x \in]0\,;\,+\infty[$,
$g(x) = \dfrac{x^2+ax+b}{x}$.
En utilisant les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses, déterminer les nombres a et b.

2. Montrer que $g(x)$ peut s'écrire : $g(x) = x - 4 + \dfrac{3}{x}$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = x^2 + 1 - 2\ln x$.

1. Étudier les variations de h et dresser son tableau de variations.

2. Calculer $h(1)$. En déduire que $h(x)$ est strictement positif pour tout nombre réel x de $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C : Étude de fonction

On définit la fonction f par :

$$f(x) = x - 4 + \frac{1+2\ln x}{x}$$

sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On appellera Γ la courbe représentative de f dans le repère orthogonal du document 1.

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers zéro. En déduire que Γ admet une asymptote que l'on précisera.

2. Calculer la limite de f en $+\infty$.

3. Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$ montrer que $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variations de f.

4. Courbes asymptotes. On rappelle que $g(x) = x - 4 + \dfrac{3}{x}$.

a. Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x) - g(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b. Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point d'intersection des courbes Γ et $\mathscr{C}$.

c. Sur $]0 ; +\infty[$ déterminer la position de la courbe Γ par rapport à la courbe $\mathscr{C}$.

5. Construire la courbe Γ sur le document fourni en annexe et que l'on rendra avec la copie.

Partie D : Calcul d'une aire comprise entre deux courbes

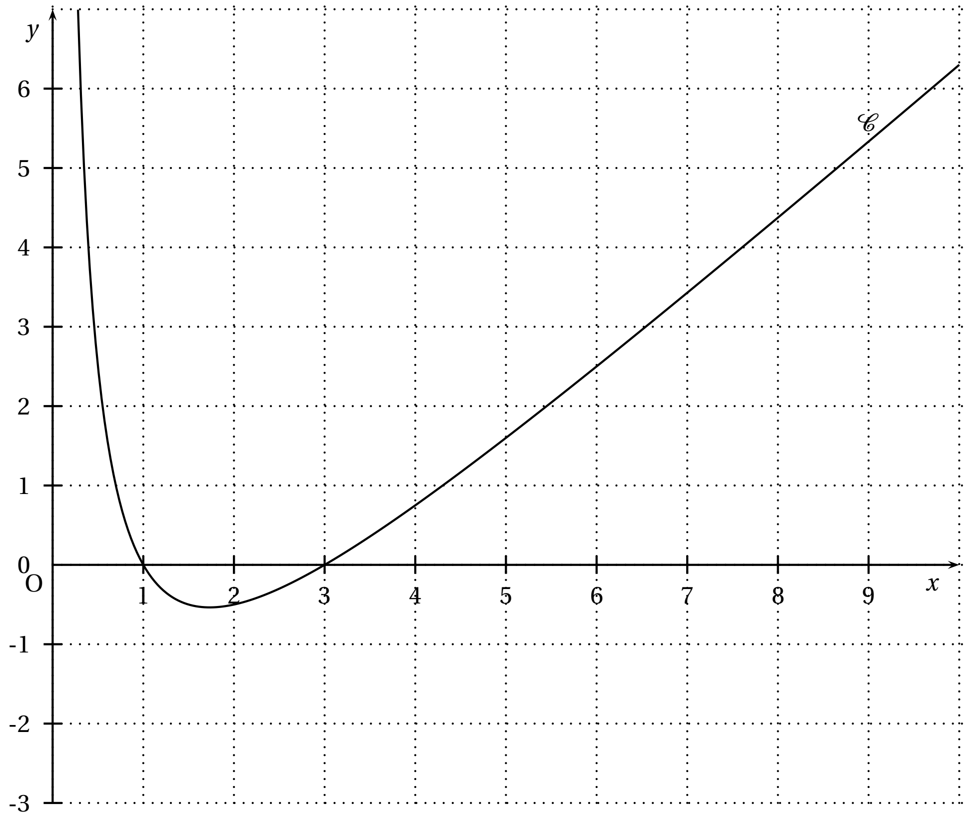
1. Montrer que $f(x) - g(x)$ admet pour primitive sur $]0 ; +\infty[$ la fonction K définie par :

$$K(x) = (\ln x - 1)^2.$$

2. Sur le document fourni en annexe, hachurer l'aire comprise entre les deux courbes et les droites d'équations $x = \text{e}$ et $x = \text{e}^2$.

3. Calculer la valeur de cette aire en cm^2.

Document à rendre avec la copie



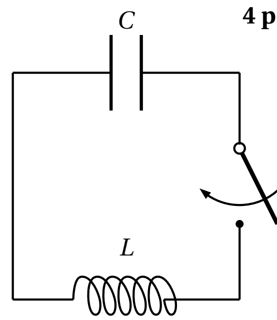
Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie électronique France septembre 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Une feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **4 points**

On considère le circuit électronique ci-contre comprenant un condensateur dont la capacité, exprimée en farads, a pour valeur C, une bobine dont l'inductance, exprimée en henrys, a pour valeur L et un interrupteur. Le temps test exprimé en secondes.



A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit.
On appelle $q(t)$ la valeur de la charge, exprimée en coulombs, du condensateur à l'instant t.
On définit ainsi une fonction q, deux fois dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
On admet que la fonction q est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + \frac{1}{LC}y = 0.$$

où y est définie et deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et de dérivée seconde y''.
Dans tout l'exercice, on prend $C = 2 \times 10^{-3}$ et $L = 1,25 \times 10^{-2}$.

1. Prouver qu'alors l'équation différentielle (E) s'écrit :

$$y'' + 4 \times 10^4 y = 0.$$

2. Résoudre l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la fonction q sachant qu'elle est la solution particuliére de (E) vérifiant :

$$q(0) = \frac{\sqrt{2}}{400} \quad \text{et} \quad q'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Montrer que pour tout t appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $q(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$q(t) = \frac{1}{200} \times \sin\left(200t + \frac{\pi}{4}\right).$$

5. Calculer la valeur moyenne q_m de la fonction q sur l'intervalle $\left[0~;~\dfrac{\pi}{800}\right]$.

   On donnera une valeur exacte.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans le hall d'accueil d'une gare téléphérique, trois appareils automatiques, (numérotés 1, 2 et 3) délivrent des tickets identiques d'une valeur de 20 €.
Deux personnes, que l'on désigne par les lettres M et N, se présentent dans cet ordre,

chacune devant un appareil (éventuellement le même) choisi aléatoirement pour acheter un ticket.
On convient de noter $(a,\ b)$ l'évènement élémentaire suivant : la personne M choisit l'appareil a et la personne N choisit l'appareil b.

1. Expliciter les neuf évènements élémentaires. On pourra s'aider d'un arbre ou d'un tableau.

2. On suppose que les neuf évènements élémentaires sont équiprobables.

  a. Calculer la probabilité des évènements suivants :
  A : « seul l'appareil 2 a été utilisé » ;
  B : « un seul des trois appareils a été utilisé » ;
  C : « l'appareil 2 n'a pas été utilisé ».

  b. Les évènements A et C sont-ils contraires ? Justifier.

3. L'appareil 1 est déréglé, il réclame seulement 10 € pour le paiement d'un ticket d'une valeur de 20 €. Les clients l'ignorent jusqu'au paiement de leur ticket.
On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque évènement élémentaire, associe la somme totale, exprimée en euros, payée par les deux personnes.

  a. Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire X.

  b. Calculer la probabilité : $P(X = 20)$.

  c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

  d. Calculer son espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$.
  On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au centiéme près.

PROBLÈME 12 points

Partie A : Introduction d'une fonction auxiliaire
Soit la fonction g définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{x} + x - 1.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction g puis dresser son tableau de variations (les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ ne sont pas demandées).

2. **a.** Vérifier que $g(0) = 0$.

  b. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

Partie B : Étude d'une fonction
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 3 - x\mathrm{e}^{-x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Vérifier que, pour tout x réel non nul :

$$f(x) = x\left(1 - \frac{3}{x} - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2. **a.** Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite D d'équation : $y = x - 3$.

c. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D.

3. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Pour tout nombre réel x, calculer $f'(x)$, puis vérifier que :

$$f'(x) = g(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

b. En utilisant les résultats de la **partie A**, determiner le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. a. à l'aide d'une calculatrice, donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de $f(3)$ et de $f(4)$.

b. Prouver qu'il existe un nombre α, compris entre 3 et 4, tel que : $f(\alpha) = 0$.

c. Donner une valeur approchée de α au centiéme près.

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite D dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie C : Calcul d'aire

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On note h' la fonction dérivée de la fonction h. Calculer $h'(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

2. On appelle $\mathscr{A}$ la valeur, exprimée en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite D, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

Donner la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis une valeur décimale approchée par excés à 10^{-2} prés.

Baccalauréat STI – Nouvelle – Calédonie
Génie électronique, électrotechnique, optique novembre 2004

EXERCICE 1 **5 points**

1. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, résoudre l'équation d'inconnue z :

$$2z^2 + 10z + 25 = 0.$$

Écrire les solutions de cette équation sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ où r est un nombre réel positif et θ un nombre réel.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, on considére le point A d'affixe $z_\text{A} = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{2}\text{i}$, le point B d'affixe $z_\text{B} = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2}\text{i}$ et le point C d'affixe $z_\text{C} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$.

a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

b. Calculer le module de $z_\text{A} - z_\text{B}$ et celui de $z_\text{B} - z_\text{C}$. En déduire la nature du triangle ABC.

3. On appelle A′ et B′ les images respectives des points A et B par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{12}$ et on note $z_{\text{A}'}$ et $z_{\text{B}'}$ les affixes respectives de A′ et B′.

a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes $z_{\text{A}'}$ et $z_{\text{B}'}$.

b. Écrire les nombres complexes $z_{\text{A}'}$ et $z_{\text{B}'}$ sous forme algébrique.

c. Placer les points A′ et B′ dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On expliquera la construction géométrique.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + \dfrac{1}{4}y = 0$, y désignant une fonction numérique définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

2. Déterminer la fonction f, solution de l'équation précédente, qui vérifie : $f(0) = 2$ et $f'(0) = \sqrt{3}$.

3. Vérifier, que pour tout nombre réel x, $f(x) = 4\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

4. **a.** En utilisant l'équation différentielle (E), expliquer comment on peut obtenir la représentation graphique de f'', dérivée seconde de f, à partir de celle de f.

b. Sur la feuille annexe est tracée la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0\,;\,4\pi]$. Tracer la représentation de f'' sur ce même graphique et sur ce même intervalle.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x + 1 - \mathrm{e}^{x}.$$

1. Déterminer la dérivée h' de h.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $1 - \mathrm{e}^{x} = 0$ et l'inéquation $1 - \mathrm{e}^{x} > 0$. En déduire le sens de variation de la fonction h.
3. Calculer $h(0)$. Dresser le tableau de variations de h (on ne calculera pas les limites aux bornes de l'ensemble de définition).
4. Justifier que, pour tout nombre réel x, $h(x) \leqslant 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(-2x^2 - x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. En remarquant que, pour tout nombre réel x différent de 0, on a

$$f(x) = \left(-2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)x^2\mathrm{e}^{-x},$$

   déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. **a.** Soit f' la dérivée de f. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \left(2x^2 - 3x - 2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous. On donnera les valeurs arrondies au centième.

x	$-1,3$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	2	3	4	6
$f(x)$										

5. On appelle A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0 et $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

   a. Donner une équation de $\mathscr{T}$; on l'écrira sous la forme $y = g(x)$ où g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

   b. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) - g(x) = (1-2x)h(x)\mathrm{e}^{-x}$, h étant la fonction étudiée dans le **partie A**.

   c. Étudier suivant les valeurs du nombre réel x, le signe de $f(x) - g(x)$. En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{T}$.
6. Tracer $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$.
7. **a.** Déterminer des nombres réels a, b et c pour que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de la fonction f.

   b. Calculer, en cm^3, la valeur exacte de l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

Baccalauréat STI – Nouvelle–Calédonie
Génie mécanique, civil, énergétique novembre 2004

EXERCICE 1 **5 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.

On appelle $a,\ b,\ c$ les nombres complexes suivants

$$a = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}, \quad b = \sqrt{2} + \text{i}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad c = ab.$$

1. Écrire b et c sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ où r est un nombre réel positif et θ un nombre réel.
2. Donner la forme algébrique des nombres complexes a et c.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et de $\sin\frac{7\pi}{12}$.
4. On considère les points B d'affixe b et C d'affixe c.

   Placer les points B et C dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ et montrer que le triangle OBC est équilatéral.
5. On appelle D le point d'affixe $d = b + c$. Placer le point D sur la figure et montrer que le quadrilatère OBDC est un losange.

EXERCICE 2 **4 points**

I. Première partie

Une entreprise fabrique des appareils susceptibles de présenter deux types de pannes « a » ou « b ». On admettra que 5 % des appareils sont concernés par la panne « a », 3 % par la panne « b » et 1 % par les deux pannes.

On prélève au hasard un appareil dans la production. On note A l'évènement : l'appareil présente la panne « a » et B l'évènement : l'appareil présente la panne « b ».

1. Montrer que la probabilité pour cet appareil de présenter la panne « a » ou la panne « b » est 0,07.
2. Quelle est la probabilité pour cet appareil de présenter la panne « a » et pas la panne « b » ?
3. Quelle est la probabilité pour cet appareil de ne présenter aucune des deux pannes ?

II. Deuxiéme partie

L'entreprise fabrique un grand nombre d'appareils par semaine. Chaque appareil a un coût de fabrication de 200 €. La réparation d'une panne « a » coûte 60 € à l'entreprise, la réparation d'une panne « b » coûte 40 € et la réparation des deux pannes coûte 100 €.

On considère la variable aléatoire X qui, à chaque appareil, associe son prix de revient total (coût de fabrication et coût de la réparation éventuelle).

1. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
3. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

4. Que représente E(X) pour l'entreprise ?

PROBLÉME **11 points**

I. Première partie
Le but de cette partie est de trouver des solutions de l'équation différentielle (L) :

$$y' - 2y = -2x - 5$$

où y désigne une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

1. Soit h la fonction définie pour tout nombre réel x par $h(x) = x + 3$. Montrer que h est solution de l'équation (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' - 2y = 0$. On notera g la solution générale de (E_0).

3. Recherche d'une solution particulière de l'équation (E).
On considère la fonction φ définie pour tout réel x par $\varphi(x) = g(x) + h(x)$.

a. Montrer que φ est solution de l'équation différentielle (E).

b. Déterminer la solution particuliére φ_0 de l'équation (E) qui vérifie $\varphi'(0) = 2$.

II. Deuxième partie : étude d'une fonction *f*
On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = -e^{2x} + x + 3.$$

On appelle ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unités graphiques : 3 cm sur l'axe des-abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Étude en $-\infty$.

a. Étudier la limite de la fonction f en $-\infty$.

b. Montre que la droite Δ d'équation $y = x+3$ est asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$) en $-\infty$.

c. Étudier la position de la courbe ($\mathscr{C}$) par rapport à la droite Δ.

2. Étude en $+\infty$.

a. Justifier que pour tout nombre réel x non nul,

$$f(x) = \left[\frac{e^x}{x}\left(e^{-x}\right) + 1 + \frac{3}{x}\right]x.$$

b. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. Étude des variations de f

a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout nombre réel x.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f. Donner la valeur exacte de son maximum.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 0.

5. Tracer dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ les droites Δ et (T) puis la courbe $(\mathscr{C})$.

III. Troisième partie : calcul d'une aire

Soit a un nombre appartenant à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{3}{2}\right]$.

1. Déterminer en unité d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.
2. Déterminer a pour que $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie électronique Antilles juin 2005

EXERCICE 1 **4 points**

Soit (E) l'équation différentielle : $9y'' + \pi^2 y = 0$ où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer la solution particuliére f de (E) dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées $\left(0\,;\sqrt{3}\right)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -\dfrac{\pi}{3}x$.
3. Montrer que, pour tout réel x, f peut s'écrire sous la forme : $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.
4. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;3]$.

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Soit le nombre complexe $z = 1 - \text{i}\sqrt{3}$ et soit A le point d'affixe z.

1. Calculer le module et un argument de z, donner leur interprétation géométrique puis en utilisant ces deux valeurs, placer le point A.
2. On considère les points B et C d'affixes respectives z^2 et $\dfrac{2}{z}$.
   a. Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes z^2 et $\dfrac{2}{z}$.
   b. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes z^2 et $\dfrac{2}{z}$.
   c. Placer dans le plan les points B et C.
3. Montrer que les points A, B et C appartiennent à un cercle dont le centre Ω a pour affixe $\omega = -\dfrac{3}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan est rapporte à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On considére la fonction f définie sur l'intervalle $]-3\,;\ 2[$ par $f(x) = \ln\left(ax^2 + bx + c\right)$.

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer les réels a b et c.

1. Montrer que : pour tout $x \in]-3\,;\,2[$, $f'(x) = \dfrac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}$.

2. a. Traduire les données ci-dessous par des relations entre a, b et c.
   - La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points A$(0~;~\ln 6)$ et B$\left(-\dfrac{1}{2}~;~2\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)\right)$.
   - Au point B, la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale.

   b. Déterminer a, b et c.

Partie B - Étude de la fonction *f*

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -x^2 - x + 6$$

et f la fonction de la partie A définie sur $]-3~;~2[$ par $f(x) = \ln[g(x)]$. La courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans le repère précédent est donnée en **ANNEXE**.

1. a. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

   b. Déterminer les limites suivantes : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -3\\ x>-3}} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$.

   c. En déduire les équations des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$

2. Montrer que : pour tout $x \in]-3~;~2[$, $f'(x) = \dfrac{-2x-1}{g(x)}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer une équation de la tangente â $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
5. a. Montrer que, sur l'intervalle $[0~;1,9]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0.

   b. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de x_0 d'amplitude 10^{-2}.

Partie C - Calcul d'aire

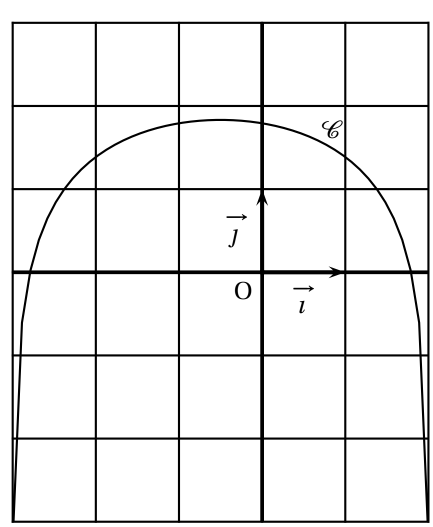
Soit F la fonction définie sur $]-3~;~2[$ par :

$$F(x) = (x+3)\ln(x+3) + (x-2)\ln(-x+2) - 2x.$$

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]-3~;~2[$.
2. a. Préciser à l'aide du graphique le signe de f sur l'intervalle $[0~;1]$.

   b. Calculer la valeur exacte $\mathscr{A}$ (en unités d'aire), de l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

ANNEXE : courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f



∾ Baccalauréat STI Arts appliqués – France ∾ juin 2005

EXERCICE 1

Lors d'un concours de karaoké, le public, composé de 450 jeunes, dont 150 garçons, a voté pour l'un des trois finalistes, Hatxi, Élodie et Machyl.
Les voix sont réparties de la façon suivante :

- 45 garçons ont voté pour Hatxi ;
- 35 % des filles ont voté pour Élodie.
- Parmi les 165 jeunes qui ont voté pour Machyl, il y a 20 % de garçons.

1. Reproduire puis compléter le tableau suivant :

	Hatxi	Élodie	Machyl	Total
Garçons				
Filles				
Total				

2. On choisit au hasard un jeune du public. On suppose que tous les choix sont équiprobables et on considère les évènements suivants :

A : « le jeune choisi est un garçon » ;

B : « le jeune choisi a voté pour Machyl ».

Les résultats demandés seront donnés sous forme décimale arrondie au centième.

a. Calculer les probabilités $P(\text{A})$ et $P(\text{B})$.

b. Définir par une phrase les évènements suivants : A $\cap$ B et A $\cup$ B.

c. Calculer $P(\text{A} \cap \text{B})$, en déduire $P(\text{A} \cup \text{B})$.

EXERCICE 2

Un club sportif confie l'élaboration d'un logo à une agence. Celle-ci choisit un « drapeau » pour motif.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ par

$$f(x) = x^3 - x + 2.$$

Le plan est muni dun repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 5 cm. On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans ce repère.

1. f' désigne la fonction dérivée de f ; calculer $f'(x)$.

2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[-1\ ;\ 1]$ sachant que $f'(x) = 3\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

On indiquera pour $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ des valeurs apporchées décimales arrondies au centième.

3. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :
(on donnera des valeurs approchées décimales arrondies au centième).

x	-1	$-0,8$	$-0,6$	$-0,4$	$-0,2$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x)$			2,38					1,66			

4. Tracer $\mathscr{C}_f$ sur la feuille de papier millimétré.
5. Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ par

$$g(x) = (x-1)\mathrm{e}^x + 2.$$

On appelle $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[-1\,;\,1]$, $g'(x) = x\mathrm{e}^x$ où g' désigne la fonction dérivée de g.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $[-1\,;\,1]$ et dresser le tableau de variations de g.
3. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera des valeurs approchées décimales arrondies au centième).

x	-1	$-0,8$	$-0,4$	0	0,4	0,6	0,8	1
$g(x)$		1,19				1,27		

4. Tracer $\mathscr{C}_g$ dans le même repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ que précédemment.
5. On considère la fonction G définie sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ par

$$G(x) = (x-2)\mathrm{e}^x + 2x.$$

   a. Montrer que G est une primitive de g sur $[-1\,;\,1]$.

   b. Calculer l'intégrale $\mathrm{J} = \displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie C

La partie du plan $\mathscr{A}$ limitée par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et par la droite d'équation $x = -1$ représente la toile du drapeau.

1. Placer les points P$(-1\,;\,2)$ et Q$(-1\,;\,0)$ puis tracer le segment [PQ] pour achever le motif.
2. On suppose que, pour tout x de l'intervalle $[-1\,;\,1]$, $f(x) \geqslant g(x)$ et que l'aire de la partie $\mathscr{A}$ du plan est donnée, en unités d'aires, par $\mathrm{A} = \displaystyle\int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

   a. Calculer la valeur exacte de A.

   b. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire de $\mathscr{A}$ exprimée en cm^2.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI France juin 2005 ∽ Génie mécanique, énergétique, civil

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
Le nombre i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. **a.** Déterminer sous forme algébrique le nombre complexe z_1, vérifiant :

$$z_1(1+\text{i})+3+\text{i}=0.$$

   b. Déterminer sous forme algébrique les nombres complexes z_2 et z_3 vérifiant le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2z_2+z_3 & = & 5 \\ z_2+3z_3 & = & -10\text{i} \end{array}\right.$$

2. Soient A, B et trois points du plan d'affixes respectives $z_A = 3+2\text{i}$, $z_B = -1-4\text{i}$ et $z_C = -2+\text{i}$.
   a. Placer ces trois points dans le plan complexe.
   b. Calculer, les longueurs AB, BC et CA.
   c. En déduire la nature du triangle ABC, puis calculer son aire.

EXERCICE 2 **5 points**

Le Comité des fêtes d'un village organise une loterie à l'aide de deux urnes.
L'urne U_1 contient trois boules rouges notées R_1, R_2, R_3 et deux boules jaunes notées J_1 et J_2.
L'urne U_2 contient quatre boules bleues notées B_1, B_2, B_3, B_4 et une boule verte V.
Pour participer à cette loterie, un joueur doit d'abord miser 3 €. Il tire ensuite au hasard une boule dans U_1, puis une boule dans U_2. Les boules sont indiscernables au toucher. On suppose que tous les tirages de couples de boules sont équiprobables..

1. À l'aide d'un tableau ou d'un arbre montrer qu'il y a 25 couples de boules possibles.
2. Une boule rouge fait gagner 2 €. Une boule jaune fait gagner 3 €. Une boule bleue fait gagner 1 €. La boule verte fait gagner 5 €. À chaque tirage de 2 boules la variable aléatoire X associe le gain finalement réalisé par le joueur. Ainsi, en tenant compté de. la mise de 3 €, le tirage d'une boule rouge et d'une boule verte occasionne finalement un gain de 4 €.
   a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b. Démontrer que $P(X=5) = \dfrac{2}{25}$.
   c. Présenter en tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

d. Quelle est la probabilité que le gain du joueur ne dépasse pas finalement 1 € ?

3. **a.** Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

b. Le Comité s'aperçoit que son jeu est déficitaire. Expliquer quelle est, en nombre entier d'euros, la mise minimale qu'il faudrait demander afin de rendre le jeu favorable au Comité.

PROBLÈME **11 points**

L'objectif est de déterminer une fonction dont la représentation graphique est donnée sur la page annexe à joindre à la copie, puis d'étudier certaines propriétés de cette fonction.

Partie A

Sur la page annexe, on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm, la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points de coordonnées A(0 ; 4) et B(−1,5 ; 1)

1. Donner les valeurs de $f(0)$ et de $f(-1,5)$.
2. On suppose que pour tout nombre réel x, $f(x)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$f(x) = (ax+b)\text{e}^{-x}+1, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

Utiliser les résultats de la question **1.** pour déterminer la valeur des nombres réels a et b.

Partie B

Dans toute la suite du problème on étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x+3)\text{e}^{-x}+1.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. **a.** Montrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = 2\dfrac{x}{\text{e}^x}+\dfrac{3}{\text{e}^x}+1$.

   b. Déterminer alors la limite de f en $+\infty$.
   En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ a une asymptote (D) dont on donnera une équation.

   c. Démontrer que cette asymptote (D) coupe la courbe $\mathscr{C}$ au point B.

   d. Étudier, en le justifiant soigneusement, la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (D).
3. Prouver que la dérivée f' de la fonction f est définie pour tout nombre réel x par :

$$f'(x) = (-2x-1)\text{e}^{-x}.$$

4. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Déterminer une équation de la droite (T) tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

Partie C

1. On rappelle que, sur la feuille annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.
Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point E d'abscisse (−0 ; 5).
Tracer sur la feuille annexe la tangente A.
Compléter cette figure en représentant l'asymptote (D) et la tangente (T).
Hachurer la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$.

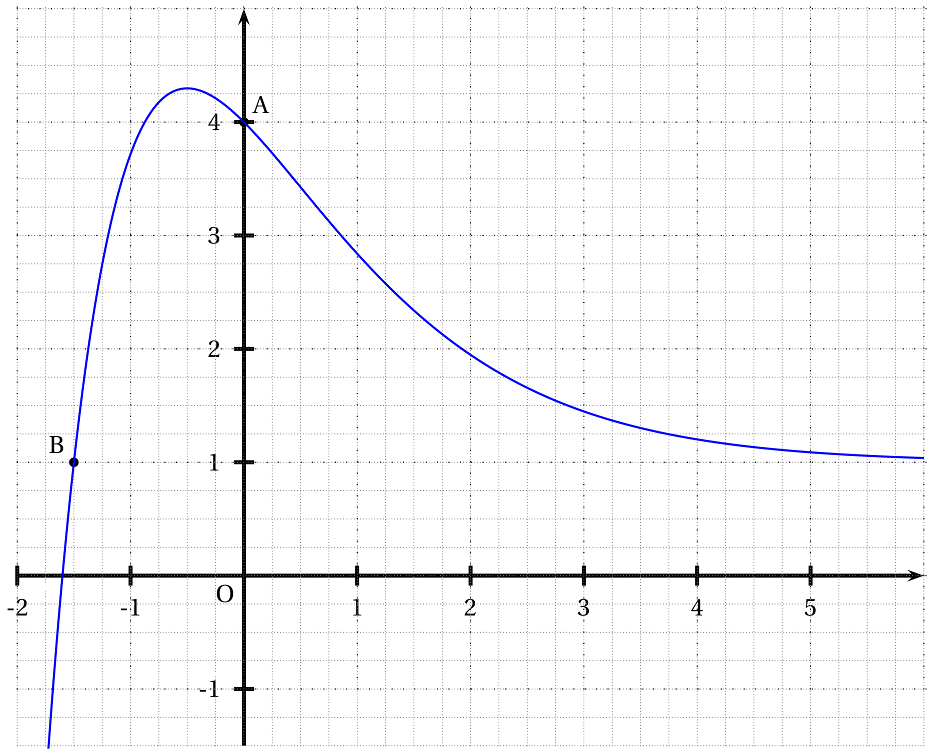
2. Montrer que la fonction F définie par

$$F(x) = (-2x - 5)\mathrm{e}^{-x} + x$$

est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $\mathscr{A}$ l'aire en cm^2 de la partie hachurée précédemment. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis en donner une valeur arrondie au centième.

Annexe du problème à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie électronique France juin 2005

EXERCICE 1 **5 points**

1. Le nombre i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
On considère $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$ où z est un nombre complexe.
   a. Calculer $P(2)$.
   b. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que $P(z) = (z-2)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ d'unité 5 cm.
   a. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 2$, $z_{\text{B}} = 1 + \text{i}$, $z_{\text{C}} = 1 - \text{i}$.
   b. Déterminer le module et un argument de z_{A}, z_{B} et z_{C}.
   c. Montrer que C est l'image de B par une rotation de centre O dont on précisera l'angle.
   d. Déterminer les affixes des points I et J, milieux respectifs des segments [OA] et [BC].
   e. Quelle est la nature du quadrilatère OBAC ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **4 points**

1. On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = 3x - 1 + \frac{1}{\text{e}^{2x}}.$$

   a. Montrer que la fonction dérivée f' est telle que $f'(x) = \dfrac{3\text{e}^{2x} - 2}{\text{e}^{2x}}$.
   b. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$, puis justifier l'existence d'un minimum et en donner la valeur exacte.
   c. Dresser le tableau de variations de f (les limites en $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas demandées).

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 6x + 1$ où y est une fonction de la variable réelle x et y' sa dérivée.
   a. Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.
   b. Démontrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x - 1$ est solution de l'équation (E).
   c. Vérifier que la fonction f est solution de (E) et que $f(0) = 0$.

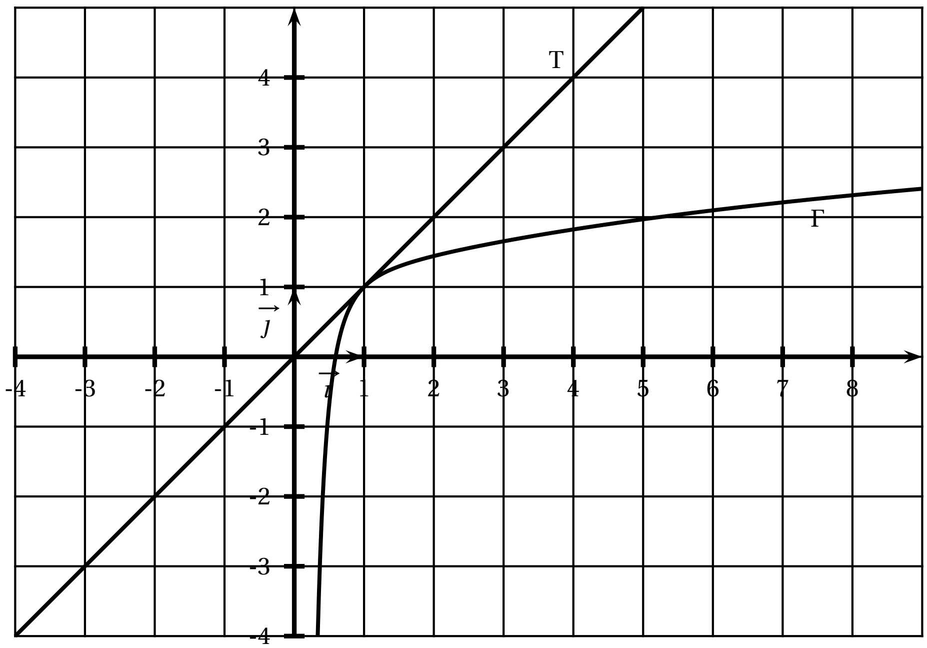
Problème **11 points**

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On donne dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la représentation graphique Γ d'une fonction g, définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty]$.

La droite T passant par O et A(1 ; 1) est tangente en A à la courbe Γ.

La courbe Γ admet pour asymptote verticale l'axe des ordonnées.



1. Déterminer graphiquement :

a. $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ **b.** $g(1)$ **c.** $g'(1)$.

2. On admet que, pour tout réel de l'intervalle $]0 ; +\infty]$,

$$g(x) = \ln x + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

a. Exprimer $g(1)$ et $g'(1)$ en fonction de a et b.

b. Déterminer a et b en utilisant les résultats précédents.

3. On suppose que g est définie sur $]0 ; +\infty]$ par $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$.

a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0,2 ; 0,8]$; déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,01 et en déduire une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

b. En déduire, en utilisant le sens de variations de g, le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty]$.

Partie B : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty]$ par

$$f(x) = \text{e}^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Vérifier que l'on peut écrire, pour tout x, appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty]$,

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}(x\ln x + 1).$$

   c. En déduire la limite de f en 0 (on admettra que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$).

2. a. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et vérifier que, pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = g(x)\mathrm{e}^x$.

   b. En utilisant le signe de g obtenu précédemment, étudier le sens de variations de f sur $]0~;~+\infty[$.

3. a. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

   b. Sur la feuille annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe $\mathscr{C}$. Sur cette tigure, tracer la droite Δ.

Partie C : Calcul d'une aire

1. On note a un nombre réel tel que $0 < a < 1$.

   a. Montrer que la fonction h, définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $h(x) = \mathrm{e}^x \ln x$ est une primitive de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$.

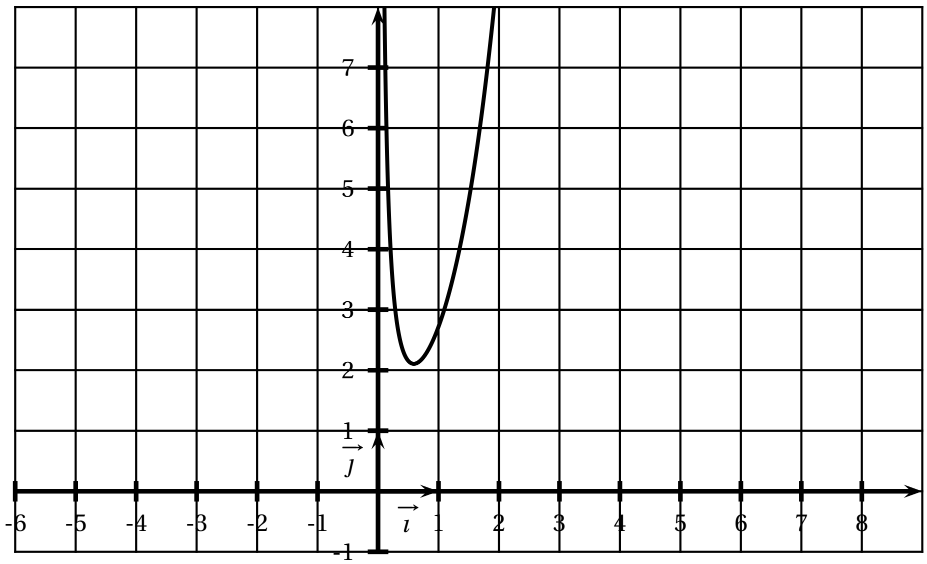
   b. En déduire que $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^a \ln a$.

2. $\mathscr{D}$ désigne la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 1$.

   a. Sur la feuille annexe, hachurer le domaine $\mathscr{D}$.

   b. Calculer la valeur exacte de la mesure, exprimée en unités d'aire, de l'aire de $\mathscr{D}$.

Feuille annexe



Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique France juin 2005

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **5 points**

Tous les résultats demandés seront justifiés.

Soit le nombre complexe $z_1 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$. On pose :

$z_2 = \overline{z_1}$, où $\overline{z_1}$ désigne le nombre complexe conjugué de z_1,
$z_3 = -z_1$,
$z_4 = z_1\text{e}^{\frac{2\text{i}\pi}{3}}$.

1. Déterminer la forme algébrique des nombres complexe z_1, z_2 et z_3.

2. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_2 et z_3.

3. **a.** Montrer que $z_4 = 3\text{e}^{\frac{5\text{i}\pi}{6}}$

b. En déduire le module et un argument du nombre complexe z_4.

c. Quelle est la forme algébrique de z_4 ?

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (Unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4.

a. Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. Construire ce cercle.

b. Construire les points A, B, C et D en utilisant leurs ordonnées.

c. Calculer les distances AC et BD.

d. Quelle est la nature du quadrilatére ABCD ?

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre l'équation différentielle : $9y'' + y = 0$.

2. Déterminer la solution f de cette équation différentielle vérifiant les conditions initiales :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & \sqrt{3} \\ f'(0) & = & -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

3. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, on peut écrire : $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

b. Résoudre, dans l'ensemble des nombres réels, l'équation $f(x) = -\sqrt{2}$.

4. Calculer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

PROBLÉME **11 points**

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (Unité graphique 2 cm).

1. Comportement de f en $-\infty$.

   a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -2x$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.

   c. Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.

2. Comportement de f en $+\infty$.

   a. Montrer que, pour tout nombre réel x différent de 0, on peut écrire :

   $$f(x)x\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2x} + \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} - 2\right).$$

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. Étude des variations de f.

   a. Déterminer la fonction dérivée f' de f et vérifier que l'on a pour tout nombre réel x,

   $$f'(x) = \left(\mathrm{e}^{x} + 2\right)\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right).$$

   b. Étudier le signe de $f'(x)$, lorsque x décrit l'ensemble des nombres réels.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

5. Calcul d'une aire.
   Soit α un nombre réel strictement négatif.

   a. Hachurer la partie $\mathscr{H}$ du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$.

   b. Calculer, en fonction de α et en unités d'aire la valeur de l'aire de la partie $\mathscr{H}$, que l'on notera $\mathscr{A}(\alpha)$.

   c. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$. Interpréter le résultat obtenu.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie 8 juin 2005
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

I. Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) d'inconnue z : $z^3 - 2z^2 + 25z - 50 = 0$.

1. Vérifier que 2 est solution de l'équation (E).
2. En déduire que (E) peut s'écrire $(z-2)\left(\alpha z^2 + \beta z + \gamma\right) = 0$ où α, β, γ sont trois nombres réels que l'on déterminera.
3. Résoudre alors l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. Étude d'une configuration du plan

1. Dans un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique 1 cm, placer les points A et B d'affixes respectives $a = 2$ et $b = 5\text{i}$.
2. Soit M le milieu du segment [AB]. Placer M dans le repère et déterminer son affixe m.
3. Soit P le point d'affixe $p = \frac{7\sqrt{2}}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.
   Donner l'écriture algébrique de p et placer P dans le repère.
4. Démontrer que le triangle BMP est rectangle et isocèle.

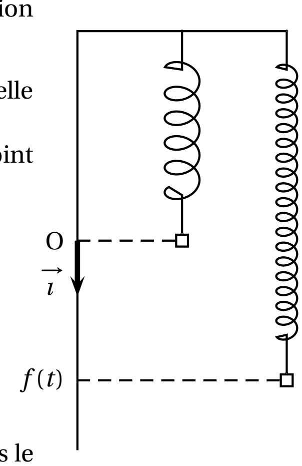
EXERCICE 2 **5 points**

Un mobile, de masse 1 kg, est attaché à un ressort dont la constante de raideur vaut $k = 9$ N/m.

Si l'on écarte le mobile de sa position d'équilibre O, il effectue des oscillations autour de cette position.

À chaque instant t, la position du mobile est repérée par son abscisse $f(t)$ dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\right)$.

Les lois de la Physique montrent que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $\frac{1}{9}y'' + y = 0$.



1. Trouver la solution générale de l'équation différentielle (E).

2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le mobile est au point $f(0) = 0,5$ m et a une vitesse initiale $f'(0) = 1,5$ m/s.

Montrer que la fonction f est définie par :

$f(t) = \frac{1}{2}(\cos 3t + \sin 3t)$.

3. Vérifier que, pour tout nombre réel t :

$f(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$.

4. Résoudre l'équation $f(t) = 0$ dans l'intervalle $[0\ ;\pi]$.

5. à partir de l'instant $t = 0$, au bout de combien de temps le mobile repassera-t-il pour la première fois à sa position d'équilibre ? (On donnera la réponse arrondie au millième de seconde.)

PROBLÈME **10 points**

Partie A Préliminaires

On appellle f la fonction définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x}$$

où a et b sont deux nombres réels , qu'on se propose de déterminer.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 2 cm.

1. Sachant que $\mathscr{C}$ passe par Ie point A de coordonnées $(0\,;2)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$, déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
2. En déduire que $a = 1$ et que $b = 2$.

Partie B Étude de la fonction f

1. Étude des limites
   - **a.** Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   - **b.** En déduire la présence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ et en donner une équation.
2. Étude des variations de f
   - **a.** Déterminer la dérivée f' de f, puis étudier son signe.
   - **b.** Dresser le tableau de variations de f.
3. Étude d'un problème de tangente
   - **a.** Déterminer une équation de la droite (T), tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2.
   - **b.** Factoriser l'expression $f(x) - x\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^2$ et en déduire son signe.
   - **c.** En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente (T).
4. Tracer dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ les tangentes et asymptote connues puis la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C Un calcul de volume

Soit $\mathscr{S}$ le solide obtenu par rotation de la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe $\left(\mathrm{O}\, \vec{\imath}\right)$, sur l'intervalle $[0\,;3]$.

On se propose de calculer le volume $\mathscr{V}$ du solide $\mathscr{S}$.

On rappelle que $\mathscr{V} = \displaystyle\int_0^3 \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$ en unités de volume.

1. Soient g et G les fonctions définies pour tout nombre réel x par :

   $$g(x) = (x+2)^2\mathrm{e}^{-2x} \quad \text{et} \quad G(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{13}{4}\right)\mathrm{e}^{-2x}.$$

   Montrer que G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\mathscr{V}$ en cm^3. (On donnera la valeur exacte du résultat puis une valeur arrondie au mm^3).

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat Génie mécanique, énergétique, civil ∼ STI La Réunion juin 2005

EXERCICE 1 **4 points**

Une urne contient six billets numérotés de 1 à 6.
On tire au hasard deux billets successivement et sans remise. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Chaque tirage peut être modélisé par un couple $(a~;~b)$ de deux nombres distincts. Par exemple le tirage du billet numéroté 3 suivi du billet numéroté 5 sera noté $(3~;5)$.

   a. Justifier qu'il y a 30 couples possibles.

   b. Soit A l'évènement : « les deux numéros tirés sont pairs ».
   Vérifier que la probabilité de A est égale à $\dfrac{1}{5}$.

   c. Calculer la probabilité de l'évènement B : « au moins l'un des numéros est impair ».

2. Soit D la variable aléatoire, qui à chaque tirage associe la différence entre le plus grand et le plus petit des deux nombres du couple. Ainsi au couple $(3~;5)$ comme au couple $(5~;3)$ la variable aléatoire D associe le réel $5 - 3 = 2$.

   a. Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire D ?

   b. Calculer les probabilités $P(D = 1)$ et $P(D = 3)$.

   c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire D.

   d. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire D.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 9y = 0$, où y est une fonction de la variable x définie sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. La courbe $\mathscr{C}$, donnée ci-dessous, représente une solution particulière notée f de l'équation différentielle (E). La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $\text{A}(0~;~1)$ et le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$ est égal à $-3\sqrt{3}$.

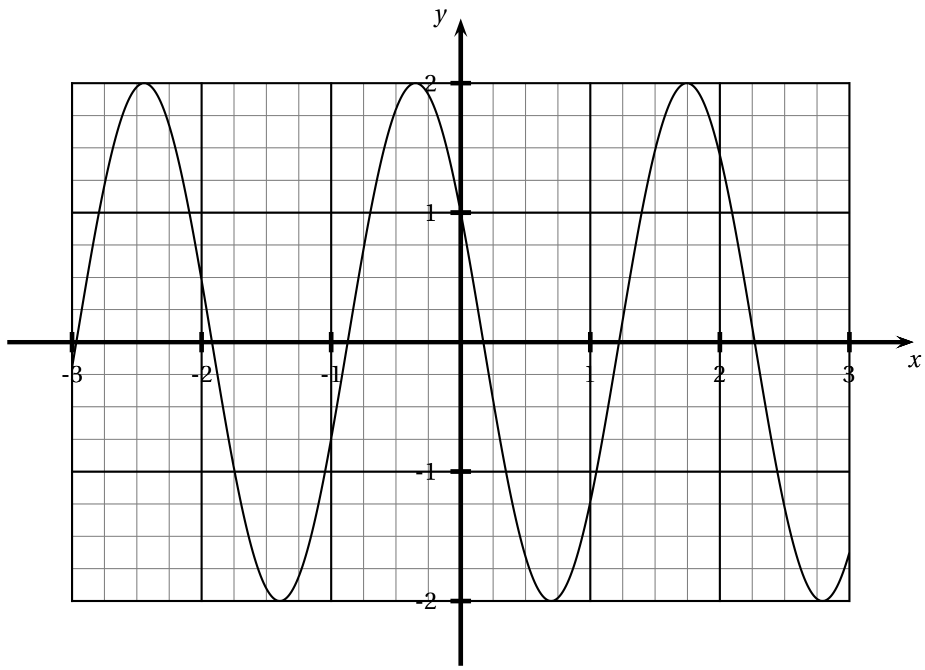
   a. En déduire les valeurs exactes de $f(0)$ et de $f'(0)$.

   b. Déterminer cette solution particulière f.

   c. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

3. **a.** Montrer que $\dfrac{7\pi}{18}$ et $\dfrac{13\pi}{18}$ sont deux solutions de l'équation, d'inconnue x, $f(x) = 0$.
   Déterminer deux autres solutions de cette équation.

   b. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[\dfrac{7\pi}{18}~;~\dfrac{13\pi}{18}\right]$.



PROBLÈME **12 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 4 - \mathrm{e}^{-x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

Partie A : Étude d'une fonction

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote Δ à la courbe $\mathscr{C}$ et donner son équation.
2. **a.** Déterminer la dérivée f' de la fonction f et justifier son signe sur $\mathbb{R}$.
   b. Donner le tableau de variations de f.
3. **a.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x, $f(x) = 0$.
   b. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ défini ci-dessus.

Partie B : Résolution d'une équation

Soit (E) l'équation d'inconnue réelle x : $f(x) = 2x + 3$.

1. Vérifier que $x = 0$ est une solution de (E).
2. **a.** Tracer la droite D d'équation $y = 2x + 3$ sur le même graphique que la courbe $\mathscr{C}$.
   b. Justifier graphiquement l'existence d'une deuxiéme solution notée α de l'équation (E).
   Placer α sur l'axe des abscisses.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

Partie C : Calcul d'une aire

1. Hachurer le domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire en cm^2 de ce domaine plan.

2. **a.** Vérifier que $\mathscr{A} = 8\displaystyle\int_{\alpha}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   b. Calculer $\mathscr{A}$ en fonction de α.

   c. En utilisant l'équation (E) de la **partie B**, justifier que $\mathrm{e}^{-\alpha} = 1 - 2\alpha$.
   En déduire que $\mathscr{A} = -16\alpha$.

   d. À l'aide du résultat obtenu dans la **partie B**, déterminer une valeur de $\mathscr{A}$ arrondie au dixième.

Baccalauréat STI Génie électronique Polynésie 8 juin 2005

EXERCICE 1 **4 points**

Un établissement scolaire propose à chaque éléve des sorties culturelles. Celles-ci sont de trois types : théâtre, sport ou cinéma.
On considère que chaque éléve choisit de façon aléatoire deux sorties culturelles. On suppose l'équiprobabilité des choix.

1. On s'intéresse aux différents choix possibles qui s'offrent à un éléve. Ainsi participer à une sortie sport et une sortie théâtre correspond au choix [S ; T]. De même participer à deux sorties cinéma correspond au choix [C ; C]. On ne tient pas compte de l'ordre des sorties. Dresser la liste des six choix possibles.
2. Une sortie théâtre coûte 12 €, une sortie sport coûte 8 €et une sortie cinéma coûte 4 €. On définit une variable aléatoire X qui, à chaque choix, associe la dépense totale pour l'éléve. Ainsi, au choix [S ; T], la variable aléatoire X associe 20.
   a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant, donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

x_i					
$P[X = x_i]$					

   c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X. Que représente $E(X)$?

EXERCICE 2 **5 points**

La figure sera construite sur la copie et complétée au fur et à mesure de la résolution de l'exercice. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm.
Soit A le point d'affixe z_{A} de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{3}$, B le point d'affixe z_{B} égale à i et C le point d'affixe z_{C} égale à 1.

1. **a.** Placer les points A, B et C (la construction du point A se fera uniquement avec le compas et on laissera apparents les traits de construction sur la copie).
   b. Construire le point E tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}E} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$.
   c. Prouver que le quadrilatére OAEB est un losange.
2. On note z_E l'affixe du point E. Écrire le nombre complexe z_{A} sous forme algébrique, en déduire que $z_E = \frac{1}{2} + \frac{2+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
3. **a.** On considére l'application f définie dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z$. Caractériser la transformation géométrique r associée à f.

b. Le point E' est l'image du point E par la transformation r. On note $z_{E'}$ l'affixe du point E'.

Sachant qu'un argument de z_E est $\dfrac{5\pi}{12}$ justifier qu'un argument de $z_{E'}$ est $\dfrac{\pi}{4}$ et construire le point E'.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

Soit une fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée dans l'annexe 1 (à remettre avec la copie). Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

1. Déterminer une équation de chacune des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Partie B

La fonction de la **partie A** est définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x}{x+1} - \mathrm{e}^{-x}.$$

1. **a.** Retrouver par le calcul $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   b. Retrouver par le calcul $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)$.
2. **a.** On note f' la dérivée de la fonction f, déterminer $f'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur cet intervalle.

   c. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse zéro ; tracer cette tangente T sur l'annexe 1 (à remettre avec la copie).
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ une solution unique α et donner une valeur du nombre réel α, arrondie à 10^{-2}.

Partie C

1. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ on a :

$$f(x) = 2 - \frac{2}{x+1} - \mathrm{e}^{-x}.$$

2. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.
3. En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 10^{-1}.