Baccalauréat STI 2006

L'intégrale de septembre 2005 à juin 2006

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie électronique Antilles septembre 2005

EXERCICE 1 **5 points**

Un professeur d'Education Physique et Sportive s'adresse à un groupe de vingt élèves au sujet de leurs loisirs : intérêt pour le football dans la pratique de ce sport ou comme spectacle à la télévision.

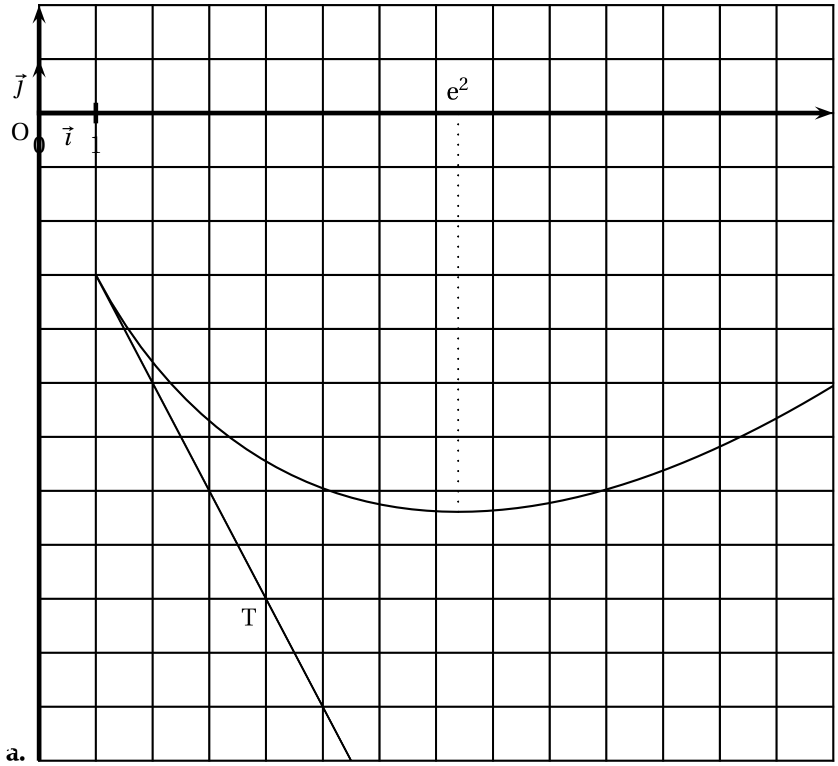
Parmi ces vingt élèves, on sait que quinze regardent des matches à la television, huit pratiquent ce sport et cinq font les deux.

1. Montrer que deux élèves dans ce groupe ne s'intéressent au football ni dans la pratique, ni à la télévision.
2. Un élève de ce groupe est choisi au hasard.
   a. Quelle est la probabilité qu'il ne s'intéresse au football ni dans la pratique ni à la télévision ?
   b. Quelle est la probabilité qu'il s'intéresse au football à la télévision sans le pratiquer ?
3. On interroge au hasard un élève qui regarde les matches à la télévision. Quelle est la probabilité qu'il pratique le football ?
4. On attribue au hasard un numéro à chacun des vingt élèves. Une urne comporte 20 jetons avec les numéros en question.
   On tire deux fois au hasard un jeton en le remettant dans l'urne après le premier tirage.
   À chaque tirage, l'élève désigné gagne un billet d'entrée au match de son choix à condition qu'il pratique le football et le suive à la télévision.
   a. Déterminer le nombre total de tirages de deux jetons.
   b. Déterminer le nombre total de tirages permettant d'obtenir deux billets, Soit X la variable aléatoire définie par le nombre de billets gagnants.
   c. Définir la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

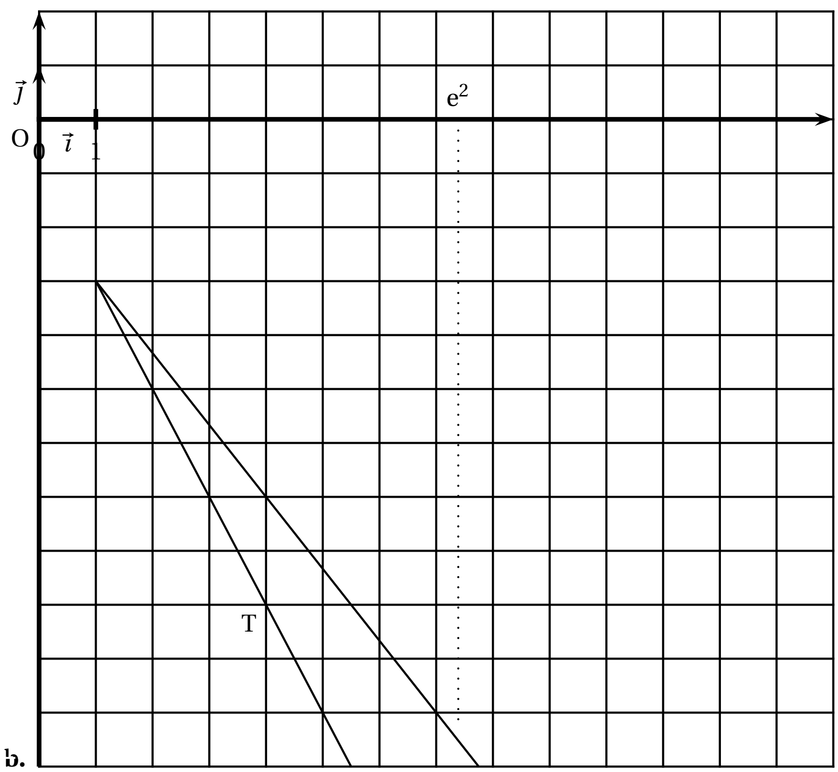
EXERCICE 2 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions suivantes, au moins une réponse est exacte. Indiquer la (ou les) réponse(s) exacte (s) sur votre copie. Aucune justification n'est demandée.

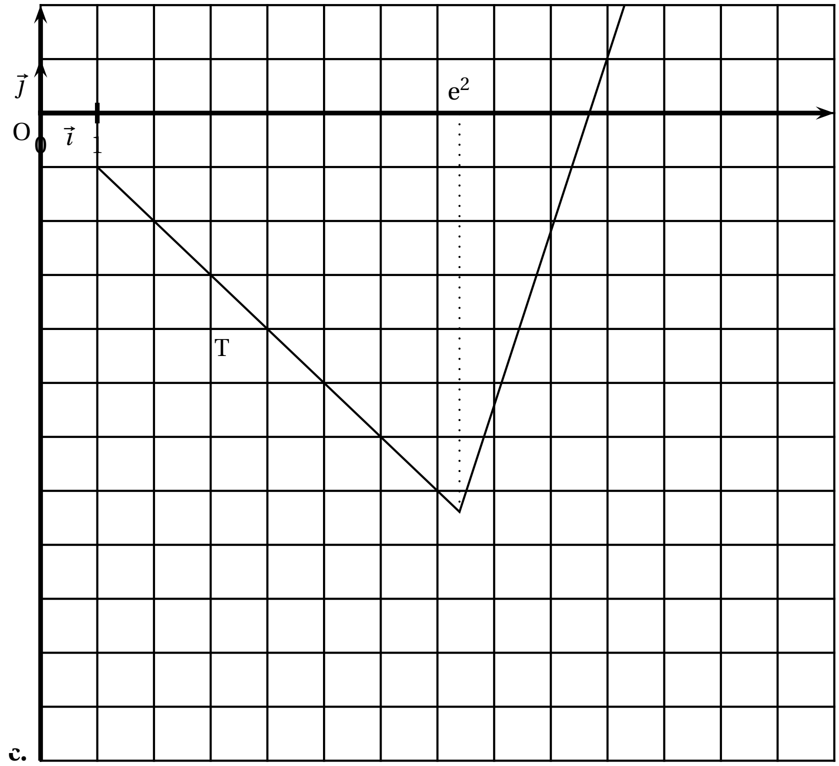
1. On considère l'équation différentielle $y' = -2 + \ln x$. Parmi les courbes ci-dessous, où la droite T représente chaque fois la tangente à la courbe considérée au point d'abscisse 1, quelle est celle susceptible de représenter une solution de cette équation différentielle ?



a.



b.

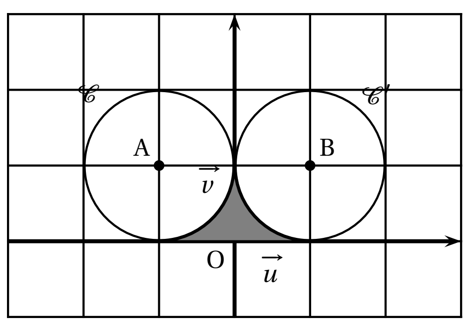


c.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $Z_A = -1 + i$ et $Z_B = I + i$.
On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon I et $\mathscr{C}'$ le cercle de centre B et de rayon I.

   Soit n un entier naturel non nul et $Z_n = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i\right)^n$.

   Pour quelles valeurs de n, parmi celles proposées ci-dessous, l'image de Z_n appartient-elle au domaine grisé ?



   a. $n = 1$.
   b. $n = 2$.
   c. $n = 3$.

3. La solution particulière f, définie sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle

$$y'' + 9y = 0$$

   telle que $f(\pi) = -\sqrt{3}$ et $f'(\pi) = 3$ est :
   a. $f(x) = \sqrt{3}\cos(3x) - \sin(3x)$.

b. $f(x) = -\sqrt{3}\cos(3x) + 3\sin(3x)$.

c. $f(x) = 3\sin\left(\dfrac{x}{3}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$.
La valeur moyenne μ de la fonction f sur l'intervalle $[\ln 5 ; \ln 10]$ est :

a. $\mu = \dfrac{2\ln 2}{75}$.

b. $\mu = \dfrac{75}{2\ln 5}$.

c. $\mu = \dfrac{75}{\ln 4}$.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 1 - 2\ln x.$$

1. On désigne par g' la fonction dérivée de g.
Déterminer $g'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
(L'étude des limites aux bornes de l'ensemble de définition n'est pas demandée.)

3. Calculer $g(1)$. En déduire que g est strictement positive sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\ln x.$$

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et par Γ la courbe d'équation $y = \ln x$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en zéro. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. On désigne par f' la fonction dérivée de f.

a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

b. étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. On définit sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la fonction h par :

$$h(x) = f(x) - \ln x.$$

a. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction h.

b. étudier le signe de la fonction h sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la courbe Γ.

5. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.
6. Tracer les courbes $\mathscr{C}$, Γ et la droite Δ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie C

1. Soit H la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, par :

$$H(x) = -\left(\frac{1+\ln x}{x}\right).$$

   Montrer que H est une primitive de h sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Soit α un nombre réel strictement supérieur à 1.
   Calculer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$, en cm^2, du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, la courbe Γ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.
3. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

Baccalauréat STI Antilles-Guyane septembre 2005
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **4 points**

Dans tout cet exercice, on note g la fonction numérique définie pour tout nombre réel x, par :

$$g(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right).$$

1. Soit (E) l’équation différentielle :

$$4y'' = -y,$$

où y est une fonction de la variable réelle x.

a. Donner la solution générale de l’équation différentielle (E).

b. On note f la solution particulière de l’équation différentielle (E) qui vérifie : $f(0) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $f'(0) = \dfrac{1}{4}$.
Démontrer que la fonction f est égale à la fonction g.

2. Soir μ la valeur moyenne de la fonction g sur l’intervalle $\left[\dfrac{2\pi}{3}\ ;\ \dfrac{14\pi}{3}\right]$.

a. Calculer μ.

b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en indiquant des valeurs exactes :

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{14\pi}{3}$
$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}$					
$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$					

c. Dans le plan muni d’un repère orthogonal, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g sur l’intervalle $\left[\dfrac{2\pi}{3}\ ;\ \dfrac{14\pi}{3}\right]$.
Tracer la couche $\mathscr{C}$.

d. La valeur de μ trouvée en a. est-elle cohérente avec le graphique effectué en c ?
Pourquoi ?

EXERCICE 2 **4 points**

Un jeu consiste à tirer une boule dans une urne qui contient des boules rouges, des boules vertes et des boules noires.
La règle du jeu indique que :

- si la boule tirée est rouge, l’organisateur du jeu donne 1 € au joueur
- si la boule tirée est verte, l’organisateur du jeu donne 2 *eaujoueursilabouletiréeestnoire,l'organisateurduje*

On admet que. lors de chaque tirage. toutes les boules ont la même probabilité d’être tirées.
On note :

- p_R la probabilité de tirer tine boule rouge

- p_V la probabilité de tirer une boule verte
- p_N la probabilité de tirer tine boule noire.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que le nombre de boules rouges, le nombre de boules vertes et le nombre de boules noires contenues dans l'urne sont tels que

$$p_V = 2p_R \quad \text{et} \quad p_R = 2p_N$$

On rappelle que, les boules contenues dans l'urne étant soit rouges, soir vertes, soit noires, on a l'égalité

$$p_R + p_V + p_N = 1$$

1. Calculer p_R, p_V et p_N. (Donner les valeurs exactes.)

2. Sachant que l'urne contient 3 boules noires, calculer le nombre total de boules contenues dans l'urne, ainsi que le nombre de boules rouges et le nombre de boules vertes contenues dans l'urne.

3. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage d'une boule associe la somme reçue par le joueur.

  a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X, puis calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

  b. Si l'organisateur du jeu vendait 1,50 € un ticket donnant le droit d'effectuer en tirage, quel bénéfice pourrait-il espérer avoir réalisé à l'issue de 1 000 jeux.

Partie B

PROBLÈME **12 points**

Le plan est rapporte à un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

Soie g la fonction numérique définie pour tout réel x strictement positif, par :

$$g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x.$$

1. On nomme g' la fonction dérivée de la fonction g.
Calculer $g'(x)$ pour tout réel x strictement positif.

2. **a.** étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et donner le tableau des variations de la fonction g (les limites en 0 et en $+\infty$ ne sont pas demandées).

  b. Préciser la valeur exacte de $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire le signe de $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

  c. Donner le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B - Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit f la fonction numérique définie pour tout réel x strictement positif, par

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

On note sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2},$$

où g est la fonction définie dans la partie A.

b. Donner le tableau des variations de la fonction f.

3. On nomme α l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

a. À l'aide d'une calculatrice, donner la valeur approchée décimale de α arrondie à 10^{-2}.

b. Préciser, dans un tableau, le signe de $f(x)$ pour x réel strictement positif.

4. **a.** On nomme $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = 2x+1$ dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
Montrer que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

b. La droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$ se coupent au point I.
Déterminer les coordonnées du point I.

c. étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

5. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}$ qui est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.

6. Sur un même graphique, placer le point I, puis tracer $\mathcal{T}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.

Partie C - Calcul d'aire

Soit F la fonction numérique définie pour tout réel x strictement positif, par :

$$F(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

1. Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. Soit $\mathcal{S}$ la surface plane limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \text{e}$.

a. On note $\mathcal{A}$ l'aire de la surface $\mathcal{S}$ exprimée en unités d'aires. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

b. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de l'aire de la surface $\mathcal{S}$ exprimée en cm^2.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI France
Génie Mécanique, civil, énergétique
septembre 2005

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Une feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 — 4 points

1. Soit (E) l'équation différentielle

$$y' = -\frac{1}{a}y$$

où y est une fonction de la variable x définie et derivable sur $\mathbb{R}$ et a une constante réelle non nulle. Résoudre cette équation.

2. Déterminer la solution p de (E) qui vérifie $p(0) = 1$.
3. La pression atmosphérique de l'air (en bar) à l'altitude x (en mètre) au-dessus du niveau de la mer est donnée par

$$p(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}.$$

   a. Déterminer la constante a sachant que la pression au sommet de l'Éverest à l'altitude $x = 8\,848$ est de $0,331$ bars.
   On arrondira a à l'entier le plus proche.

   b. On prend $a = 8\,003$. On mesure, en un lieu, une pression atmosphérique de $0,548$ bars, Calculer l'altitude du lieu.

EXERCICE 2 — 5 points

On désigne pat i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = -1 - \mathrm{i}, \qquad z_{\mathrm{B}} = 3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{C}} = 7 - \mathrm{i}.$$

1. **a.** Écrire z_{B} sous forme algébrique.

   b. Placer les points A, B et C dans le plan $\mathscr{P}$.
2. Déterminer les longueurs AB, AC, BC et en déduire la nature du triangle ABC.
3. Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un carré.
4. Soit I le point d'affixe $z_{\mathrm{I}} = 3 - \mathrm{i}$.
On considère l'ensemble (E) des points M de $\mathscr{P}$ dont l'affixe z vérifie

$$|z - (3 - \mathrm{i})[= 4.$$

   a. Les points A, B, C et D appartiennent-ils à (E) ?

b. Quelle est la nature de (E) ?

c. Tracer l'ensemble (E).

PROBLÈME **11 points**

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln x - \frac{1}{x^2} + 1.$$

1. a. Montrer que la dérivée g' de la fonction g est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g'(x) = \frac{x^2+2}{x^3}.$$

b. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. a. Calculer $g(1)$.

b. En déduire que $\begin{cases} g(x) > 0 & \text{pour} \quad x > 1 \\ g(x) < 0 & \text{pour} \quad 0 < x < 1. \end{cases}$

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln x + \frac{1}{x}.$$

On appelle Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. On admet que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$; déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 ; en déduire que Γ admet une asymptote verticale que l'on précisera.

b. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. a. Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f'(x) = g(x).$$

b. À partir des résultats de la **partie A** dresser le tableau de variations de f.

3. Tracer la courbe Γ.

Partie C

Soit H la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$H(x) = \frac{x^2}{2}\ln x + \ln x - \frac{x^2}{4}.$$

1. Comparer $H'(x)$ et $f(x)$. En déduire une primitive de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2+5}{4}$.

3. Calculer l'aire exprimée en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $= \mathrm{e}$.
On donnera la valeur exacte, puis approchée à 1 mm^2 près par excès.

Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat STI France ∾
Génie électronique, électrotechnique, optique
septembre 2005

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Une feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 2 cm.
Γ est le cercle de centre O et de rayon 1.

A est le point d'affixe $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}$.

1. Démontrer que le point A appartient au cercle Γ.

2. Soit r la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}} z$.

   a. Démontrer que l'affixe b du point B image de A par r est égal, à $-\text{i}$.

   b. Le point B appartient-il au cercle Γ ?

   c. Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.

3. Donner l'affixe c du point C diamétralement opposé au point A sur le cercle Γ.

4. Soit t la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}$.
Démontrer que l'affixe d du point D image de C par la transformation t est égale à i.

5. Tracer le cercle Γ et placer les points A, B, C, D dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

6. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

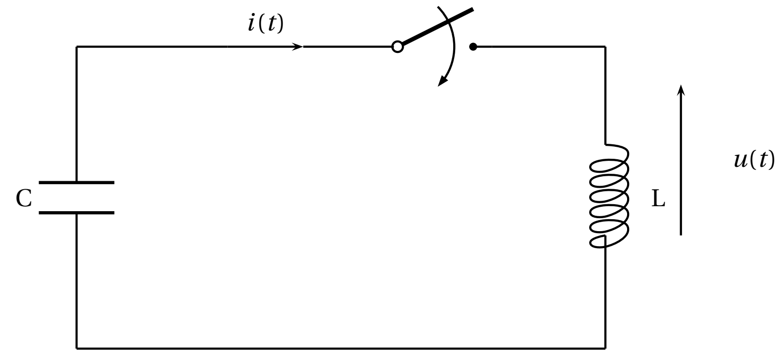
   a. Écrire le nombre complexe a sous forme exponentielle.

   b. Déterminer la forme algébrique de a^6.

   c. Le point d'affixe a^6 appartient-il à Γ ?

EXERCICE 2 **4 points**

Un circuit est composé d'une bobine d'inductance L, mesurée en farads, d'un condensateur de capacité C, mesurée en henrys, et d'un interrupteur. L'unité de temps est la seconde



On sait que :
$C = 125 \cdot 10^{-6}$ et $L = 200 \cdot 10^{-3}$.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, le circuit est alors parcouru par un courant.
On désigne par $q(t)$ la charge, mesurée en coulombs, du condensateur, $i(t)$, l'intensité, mesurée en ampères, du courant qui parcourt le circuit et $u(t)$ la tension, mesurée en volts, aux bornes de la bobine à l'instant t.
À l'instant $t = 0$, la charge du condensateur, mesurée en coulombs, est 10^{-3} et l'intensité du courant qui parcourt le circuit est nulle. On a donc les conditions initiales suivantes : $q(0) = 10^{-3}$ et $q'(0) = 0$.

1. On admet que la charge du condensateur est solution de l'équation différentielle (E) :

$$q''(t) + \frac{1}{\mathrm{LC}} q(t) = 0.$$

a. Résoudre l'équation différentielle (E).

b. Démontrer que l'unique solution de l'équation différentielle (E) verifiant les conditions initiales est la fonction q définie par $q(t) = 10^{-3}\cos(200t)$ où t est un réel positif.

2. Les fonctions i et u définies dans le préambule vérifient pour tout t : $i(t) = -q'(t)$ et $u(t) = -L'(t)$, où i'est la dérivée de i.

a. Montrer que, pour tout t, $u(t) = -8\cos(200t)$.

b. La tension efficace $\mathrm{U_{eff}}$ aux bornes de la bobine est définie par :

$$(\mathrm{U_{eff}})^2 = \frac{100}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{100}} [u(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer la valeur exacte de $\mathrm{U_{eff}}$
$\left(\text{on pourra utiliser la relation } \cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}\right)$.

PROBLÈME **11 points**

A. Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'ensemble des réels par

$$g(x) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x}.$$

1. Montrer que : $g(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{x} - 5\right)$.

2. Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

B. Étude de f et tracé de sa courbe représentative
Soit la foncrion f définie sur par

$$f(x) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} - 2x + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représenranve dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Vérifier que pour tout réel x :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\frac{3}{2}\mathrm{e}^{x} - 5 - \frac{2x}{\mathrm{e}^{x}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right).$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Montrer que la droite D d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

c. Montrer que pour tout réel x, $g(x) = f(x) - (-2x + 1)$.
En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \left(3\mathrm{e}^{x} + 1\right)\left(\mathrm{e}^{x} - 2\right).$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f. On précisera la valeur exacte du minimum.

4. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} = 0$.

b. En déduire qu'il existe un unique point A de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente T est parallèle à la droite D.

5. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1\,;\,2]$.

b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

6. Sur une feuille de papier millimetre, tracer D, T et $\mathscr{C}$.

C. Calcul d'aire
On considère le domaine Δ du plan compris entre la droite D, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$ où λ est un réel strictement négatif.
On note $\mathscr{A}(\lambda)$ la mesure, exprimée en unités d'aire, de l'aire de ce domaine.

1. Hachurer sur le graphique le domaine Δ.

2. Démontrer que, pout tout réel strictement négatif λ,

$$\mathscr{A}(\lambda) = \left(\frac{17}{4} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{2\lambda} - 5\mathrm{e}^{\lambda}\right).$$

3. Calculer $\displaystyle\lim_{\lambda \to -\infty} \mathscr{A}(\lambda)$.

∽ Baccalauréat STI France septembre 2005 ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation suivante :

$$2x^2 - 3x - 2 = 0.$$

2. En déduire les solutions dans l'ensemble des nombres réels des équations suivantes :
   a. $2\sin x^2 - 3\sin x - 2 = 0$.
   b. $2\mathrm{e}^{2x} - 3\hat{\mathrm{e}}^{x} - 2 = 0$.
   c. $\ln x + \ln\left(x - \dfrac{3}{2}\right) = 0$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

EXERCICE 2 **6 points**

On désigne par I l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{6}\ ;\ \dfrac{\pi}{6}\right]$.

Soit Γ la représentation graphique dans un repère orrhonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 6 cm), de la fonction f définie, pour tout nombre réel de I, par :

$$f(x) = \cos 3x.$$

1. **a.** Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
   b. Déterminer le tableau de variations de f sur I.
2. **a.** Calculer le coefficient directeur de chacune des tangentes à Γ aux points d'abscisses $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$.
   b. Dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, tracer les tangentes à Γ aux points d'abscisses $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$, puis tracer Γ.
3. Déterminer l'aire de la partie (S) du plan comprise entre Γ et l'axe des abscisses.

PROBLÈME **10 points**

A.

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de $\left]\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, + tel, par :

$$f(x) = \ln[h(x)] = \ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Soir $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

1. Étude du comportement de f en $\dfrac{1}{2}$.

   a. Calculer $h\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

b. Déterminer la limite de f en $\frac{1}{2}$.

c. En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

2. Étude du comportement de f en $+\infty$:

a. Calculer la limite de la fonction h en ∞

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c. En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation.

3. Étude des variations de f :

a. Montrer que, pour tout nombre réel x de $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

$$f(x) = \ln(2x-1) - \ln(2x+1).$$

b. En déduire la fonction dérivée f' de f.

c. Étudier le signe de f' sur $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

d. Établir le tableau de variations de f sur $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

4. Dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$, tracer Δ, puis la courbe $\mathscr{C}$ sur $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$. On placera l'origine du repère au centre de la feuille).

B.

Soit G la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par :

$$G(x) = (2x-1)\ln(2x-I) - (2x+1)\ln(2x+1).$$

1. Déterminer la fonction dérivée G' de G, pour tout nombre réel x de $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

2. En déduire une primitive F de la fonction f, pour tout nombre réel x de $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

3. Calculer, en unités d'aires, l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.
Donner la valeur exacte de cette aire en cm^2, puis sa valeur décimale arrondie au mm^2 près.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Novembre 2005 ∾ Génie Mécanique - Génie Énergétique - Génie Civil Nouvelle-Calédonie

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet. Une feuille de papier millimétré sera mise á la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté á un repére orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique 2 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résolution d'une équation.

a. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$$

b. Calculer le module et un argument de chacune des solutions.

Soient A et M les points d'affixes respectives $a = \sqrt{3} + \text{i}$ et $m = \sqrt{3} - \text{i}$.

2. Mise en place d'une configuration géométrique.

a. Placer A et M dans le repére $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, en indiquant une méthode de construction.

b. On appelle B et C les points d'affixes respectives $b = \text{i}a$ et $c = \text{i}b$.
Calculer b et c sous forme algébrique, puis placer B et C dans le repére $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

c. Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocéle.

d. Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un carré. Placer D sur la figure.

3. Soient N et P les points d'affixes respectives $n = \text{e}^{\frac{2\text{i}\pi}{3}} m$ et $p = \text{e}^{\frac{2\text{i}\pi}{3}} n$

a. Déterminer la forme algébrique de n, puis démontrer que $P = C$.

b. Démontrer que le triangle MNP est équilatéral.

4. Calculer en cm^2 l'aire du carré $ABCD$, puis l'aire du triangle MNP. On donnera les valeurs exactes puis les valeurs approchées á l'unité.

EXERCICE 2 **4 points**

Un sac contient des boules indiscernables au toucher : 1 boule rouge, 3 boules jaunes et n boules noires. (n désigne un entier naturel strictement positif).

Un club sportif organise un jeu consistant, pour chaque joueur, á prélever dans le sac une boule au hasard. Si la boule tirée est rouge, le joueur reçoit 5 €, si la boule est jaune, il reçoit 2 € et si la boule est noire, il reçoit 1 €. Pour participer au jeu, le joueur doit acheter un billet d'entrée coûtant 1,70 €.

On note X_n la variable aléatoire qui, á chaque boule prélevée dans le sac, associe le gain algébrique du joueur c'est á dire la somme reçue diminuée du prix du billet.

1. Dans cette question seulement, on suppose $n = 6$.

a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_6 ?

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable a aléatoire X_6.

c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_6.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que l'entier naturel n est quelconque.

2. Étude de la variable aléatoire X_n.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n.

b. Déterminer en fonction de n l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_n

c. Le club souhaite que l'espérance de X_n soit strictement négative. Quel doit être le nombre minimal de boules noires contenues dans le sac pour que cette condition soit remplie ?

PROBLÉME **11 points**

Le plan est rapporté á un repére orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unités graphiques : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

Partie A :

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Étude de la limite de f en 0

a. En utilisant le résultat : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$, déterminer la limite de f en 0.

b. En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation.

3. Étude des variations de f.

a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant á l'intervalle $]0;+\infty[$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.

4. Tracer $\mathscr{C}$ dans le repére $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie B :

k désigne un entier naturel non nul. On appelle g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{1}{x} + k \ln x.$$

On appelle $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de g dans le repére $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. En particulier la courbe $\mathscr{C}_1$ est la courbe tracée á la fin de la premiére partie.

1. Étude des variations de g.

a. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant á l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$

b. Démontrer que $g'(x)$ s'annule pour $x = \frac{1}{k}$. Exprimer $g\left(\frac{1}{k}\right)$ en fonction de k.

c. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de g. On admettra que g admet en 0 comme en $+\infty$ les mêmes limites que f.

2. On pose $x_k = \dfrac{1}{k}$ et $y_k = g\left(\dfrac{1}{k}\right)$. On appelle S_k le point de $\mathscr{C}_k$ de coordonnées $(x_k ; y_k)$.

a. Déterminer la limite de la suite (x_k).

b. Déterminer la limite de la suite $\left(y_k\right)$.

c. Vérifier que, pour tout entier naturel non nul k, le point S_k est situé sur la courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1 + \ln x}{x}$.

Partie C :

1. Soit H la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$H(x) = x \ln x - x.$$

Déterminer la fonction dérivée de H et en déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. Calcul d'aire.

a. Démontrer que la fonction f est positive sur l'intervalle $[1~;~2]$.

b. Calculer l'aire du domaine plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. On donnera le résultat final arrondi au mm^2.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Novembre 2005 Génie électrique Nouvelle-Calédonie

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

EXERCICE 1 **5 points**

Soit i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = 2z^3 - 10z^2 + 21z - 18$.

1. Calculer $P(2)$, puis déterminer les réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z on ait $P(z) = (z-2)(az^2 + bz + c)$.

2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $2z^2 - 6z + 9 = 0$, puis en déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

3. Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique 2 cm).

On considère les points A et B, d'affixes respectives $z_A = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\text{i}$ et $z_B = \overline{z_A}$, ainsi que les points C et D d'affixes respectives z_C et z_D telles que $z_C = -z_A$ et $z_D = \text{i}z_A$.

a. Écrire les nombres complexes z_C et z_D sous forme algébrique.

b. Sur la copie, placer les points A, B, C, et D dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

c. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **4 points**

Une entreprise fabrique quatre type de pièces notées P_1, P_2, P_3 et P_4 et possède trois machines A, B et C pour procéder à leur conception.

- La fabrication de la pièce P_1 nécessite l'utilisation de chacune des machines A et B.

- La fabrication de la pièce P_2 nécessite l'utilisation de chacune des machines B et C.

- La fabrication de la pièce P_3 nécessite l'utilisation de chacune des machines A et C.

- La fabrication de la pièce P_4 nécessite l'utilisation de chacune des trois machines A, B et C.

On considère un échantillon de 2 000 pièces où il y a 700 pièces de type P_1, 1 000 pièces de type P_2, 200 pièces de type P_3 et 100 pièces de type P_4.

On choisit au hasard une pièce dans l'échantillon. Il y a équiprobabilité des choix.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :

a. « la pièce choisie est de type P_1 ».

b. « la fabrication de la pièce choisie a nécessité l'utilisation de la machine B ».

2. Pour produire une pièce, l'utilisation de la machine A coûte 5 €, celle de la machine B coûte 4 € et celle de la machine C coûte 2 €. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque pièce choisie dans l'échantillon, associe son coût de réalisation. Ainsi la réalisation de la pièce P_1 coûte 9 €.

a. Déterminer le coût de réalisation de chacune des pièces P_2, P_3 et P_4.

b. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Quel est le coût moyen de fabrication d'une pièce dans l'échantillon ?

PROBLÈME **11 points**

Partie A :

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Calculer la dérivée g' de la fonction g et étudier le signe de $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
3. Construire le tableau de variation de la fonction g.
4. Déterminer, en justifiant votre réponse, le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 4x - 1 + 2\ln x$.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. En remarquant que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2\ln x}{x^2}\right)$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a $f'(x) = 2g(x)$ (donner le détail des calculs).
4. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
5. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α dans l'intervalle $[3\,;\,4]$.

   b. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
6. **a.** Préciser $f'(1)$ et la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

   b. Représenter graphiquement la tangente T et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie C :

1. Soit la fonction H définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $H(x) = x\ln x - x$.

   a. Montrer que la fonction H est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1;3]$: donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie au centième.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI mars 2006 ∾
Génie mécanique - Génie énergétique - Génie civil
Nouvelle-Calédonie

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet. Une feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, unité graphique : 3 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation

$$\left(\text{i}z + 1 + \text{i}\sqrt{3}\right)\left(z^2 - 2z + 4\right) = 0,$$

et donner les solutions sous la forme algébrique.

2. On considère les nombres complexes

$$a = 1 + \text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad b = -\sqrt{3} + \text{i}$$

et on appelle A et B les points d'affixes respectives a et b.

   a. Déterminer la forme trigonométrique de a et b.

   b. Construire les points A et B dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

   c. Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle.

   d. Soit K le milieu du segment [AB]. Placer K et déterminer son affixe k.

3. On considère le complexe

$$c = (1 - \sqrt{3}) + \text{i}(1 + \sqrt{3}),$$

et on appelle C le point du plan d'affixe c.

   a. Montrer que K est le milieu du segment [OC] puis placer C.

   b. Démontrer que le quadrilatère OACB est un carré.

EXERCICE 2 **4 points**

Un client d'un supermarché reçoit lors de son passage en caisse un ticket d'un jeu du grattage. Ce ticket comporte trois cases à gratter. Pour la première case deux résultats sont possibles 1 ou 2, pour la deuxième et la troisième case trois résultats sont possibles 1, 2 ou 3. Le client gratte les trois cases de son ticket.

1. Préciser le nombre de résultats possibles.

2. On considère les évènements suivants :
   - A : « Avoir 3 chiffres identiques »
   - B : « Avoir au moins une fois un 2 ».

   a. Déterminer la probabilité de A notée $p(\text{A})$ et celle de B notée $p(\text{B})$.

   b. Déterminer $p(\text{A} \cap \text{B})$, puis démontrer que $p(\text{A} \cup \text{B}) = \dfrac{5}{6}$.

3. Le client reçoit 5 € lorsqu'il obtient trois chiffres identiques, 2 € lorsqu'il obtient exactement 2 chiffres identiques et 0 € dans les autres cas. On appelle X la variable aléatoire qui prend comme valeurs les gains précédents.
   - **a.** Déterminer la loi de probabilité de X.
   - **b.** Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

PROBLÈME **11 points**

On appelle f la fonction définie pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x - 1 + \frac{2\ln x - 1}{x}$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, unité graphique 2 cm.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

On appelle g la fonction définie pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 - 2\ln x + 3.$$

1. étudier les variations de g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B - Étude de la fonction *f*

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Étude d'une asymptote
   - **a.** Démontrer que $\mathcal{C}$ admet pour asymptote la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 1$.
   - **b.** Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
   - **c.** Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$.
3. Étude des variations de f
   - **a.** Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

   - **b.** En déduire le sens de variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   - **c.** Dresser le tableau de variations de f.
4. Construire $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie C - Calcul d'aire

1. Soit h la fonction définie pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle par :

$$h(x) = \frac{2}{x}\ln x.$$

Démontrer que la fonction H définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$H(x) = (\ln x)^2,$$

est une primitive de h sur cet intervalle.

2. En déduire une primitive Φ de la fonction φ définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \frac{2\ln x - 1}{x}.$$

3. Soit la partie $\mathscr{A}$ du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations

$$x = \sqrt{\mathrm{e}} \quad \text{et} \quad x = \mathrm{e}.$$

   a. Hachurer la partie $\mathscr{A}$.

   b. Déterminer la valeur exacte en cm^2, de l'aire de la partie $\mathscr{A}$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Antilles-Guyane Génie électronique juin 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 3 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = \sqrt{3} + \text{i}$ et $z_{\text{B}} = 1 - \text{i}\sqrt{3}$; i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. **a.** Écrire z_{A} et z_{B} sous forme trigonométrique, puis sous forme exponentielle.

   b. En utilisant la règle et le compas, placer les points A et B dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On laissera apparents les traits de construction.

   c. Démontrer que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.

2. Dans ce qui suit, on considère la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On appelle C l'image du point A par cette rotation.

   a. Placer le point C dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On laissera apparents les traits de construction.

   b. Déterminer l'affixe z_{C} du point C sous forme exponentielle.

   c. Quelle est l'image du point B par la rotation ? Justifier.

   d. En déduire l'image du triangle OAB par la rotation.

EXERCICE 2 **5 points**

Un circuit électrique comprend en série un générateur, un conducteur ohmique de résistance R (exprimée en ohms), un condensateur de capacité C (exprimée en farads) et un interrupteur. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et le générateur délivre alors une tension constante E (exprimée en volts). On procède ainsi à la charge du condensateur.

La charge q en coulombs du condensateur est une fonction dérivable du temps t (exprimé en secondes) ; l'intensité i du courant (exprimée en ampères) est alors telle que $i(t) = q'(t)$.

On considère l'équation différentielle :

$$y' + \frac{1}{RC}y = \frac{E}{R}$$

dans laquelle y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dans tout ce qui suit, on prend $R = 1\ 000$, $C = 10^{-4}$ et $E = 10$.

1. Écrire l'équation différentielle ci-dessus en remplaçant R, C et E par leurs valeurs respectives.

2. On admet que la fonction q est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$q(t) = -10^{-3}\text{e}^{-10t} + 10^{-3}.$$

a. Déterminer la fonction dérivée q' de la fonction q, puis vérifier que q est solution sur $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle établie à la question 1.

b. Déterminer $q(0)$, la limite de q en $+\infty$ et le sens de variations de q sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. On admet que l'intensité du courant i qui parcourt le circuit à l'instant t est donnée par $i(t) = 10^{-2}\mathrm{e}^{-10t}$.
Déterminer la valeur exacte de l'instant t_0 à partir duquel l'intensité $i(t)$ est inférieure ou égale à 10^{-3} ampère. Préciser sa valeur arrondie au centième de seconde.

4. On sait enfin que l'énergie W dissipée dans le conducteur ohmique, exprimée en joules, entre les instants $t = 0$ et $t = 0,23$, est donnée par :
$W = 1\ 000 \displaystyle\int_0^{0,23} i^2(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Préciser une primitive de la fonction h définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(t) = \mathrm{e}^{-20t}$.

b. Calculer alors W et en donner la valeur arrondie à 10^{-3} près.

PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction f définie et dérivable sur v dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité 1 cm est donnée en annexe. Cette courbe passe par le point A(1 ; 4).

Dans la partie I, le but est de déterminer graphiquement certaines propriétés de la fonction f. On prouve ensuite ces propriétés dans la partie II à partir de l'expression de $f(x)$. Enfin, dans la partie III, on s'intéresse à un calcul d'aire.

Partie I

On répondra aux questions suivantes en utilisant la représentation graphique donnée en annexe. Si cela n'est pas demandé explicitement, on ne justifiera pas la réponse.

1. a. On admet que la fonction f est décroissante sur $]0\,;\,1[$ et que l'axe des ordonnées est asymptote à $\mathcal{C}_f$. Donner $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.

b. Peut-on donner $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ à partir du graphique ? Pourquoi ?

2. a. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[1\,;\,15]$, deux solutions ; on notera α et β ces solutions, avec $\alpha < \beta$.

b. Donner un encadrement d'amplitude 0,5 pour chacun des deux nombres α et β.

c. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x dans l'intervalle $[1\,;\,15]$.

3. On admet que la droite passant par les points A(1 ; 4) et B(2 ; −2) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

a. Donner la valeur de $f'(1)$.

b. Donner, en justifiant, une équation de la droite (AB).

Partie II

On admet maintenant que la fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 2(\ln x)^2 - 6\ln x + 4.$$

Le but de cette partie est de démontrer les résultats obtenus à la partie I, en utilisant l'expression de $f(x)$.

1. a. Calculer $\lim_{x \to 0} f(x)$. Quelle propriété graphique de la courbe $\mathscr{C}_f$ retrouve-t-on ainsi ?

   b. Démontrer que pour $x \neq 1$ on a $f(x) = (lnx)\left[2\ln x - 6 + \dfrac{4}{\ln x}\right]$ puis en déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2. a. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{4\ln x - 6}{x}$ ou f' désigne la dérivée de f.

   b. Résoudre dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$ l'inéquation $4\ln x - 6 > 0$.

   c. En déduire le sens de variations de f et dresser le tableau de variations de f. On calculera la valeur exacte du minimum de f sur $]0~;~+\infty[$.

3. a. En utilisant les résultats de la question 2 démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[1~;~15]$.

   b. Donner les valeurs exactes de $f\left(\sqrt{\text{e}}\right)$, $f(\text{e})$ et $f\left(\text{e}^2\right)$.

   c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[1~;~15]$.

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

Partie III

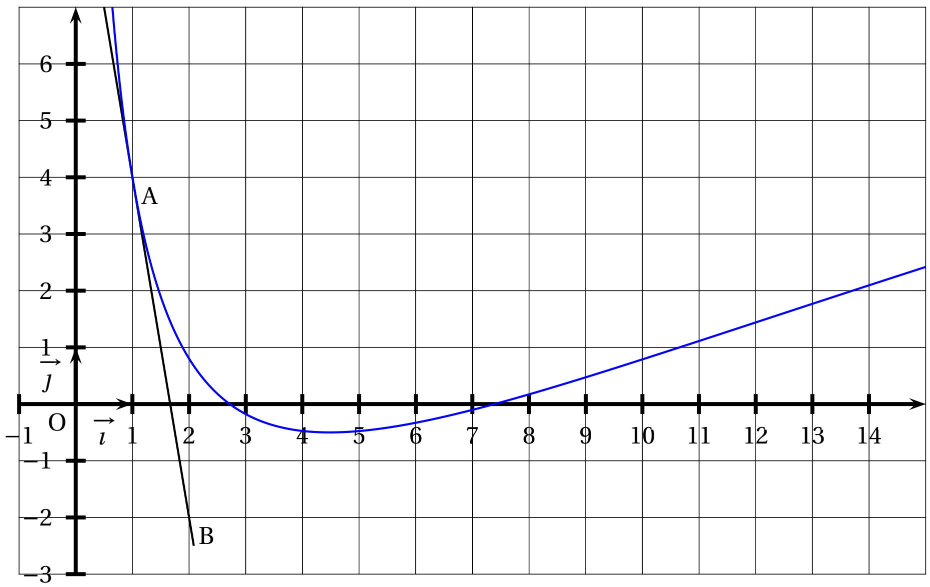
1. Sur la feuille annexe **à rendre avec la copie**, hachurer le domaine D délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

2. Démontrer que la fonction F définie sur $]0~;~+\infty[$ par $F(x) = 2x(\ln x)^2 - 10x\ln x + 14x$ est une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.

3. a. En déduire l'expression de l'aire, en unités d'aire, du domaine D sous la forme d'une intégrale.

   b. Donner la valeur exacte de cette aire en cm^2, puis sa valeur en mm^2, arrondie à l'unité.

Feuille annexe à rendre avec la copie



Baccalauréat STI Arts appliqués – France juin 2006

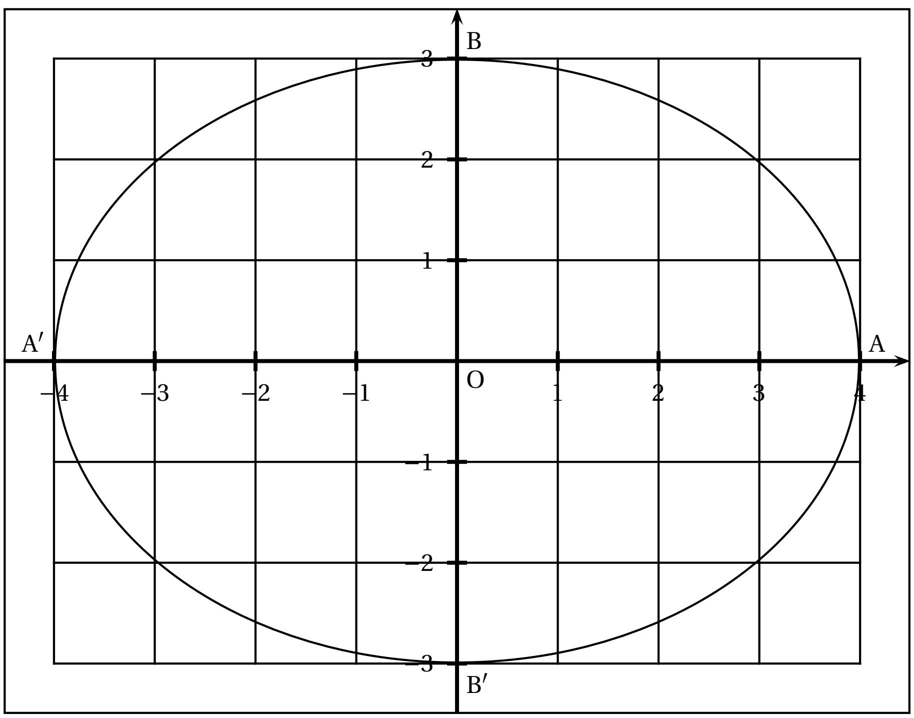
Coefficient : 2 Durée : 2 heures

L'usage d'une calculatrice réglementaire est autorisé durant l'ensemble de l'épreuve.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

EXERCICE 1 **8 points**

Dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ on a dessiné une ellipse $\mathscr{E}$ de sommets :

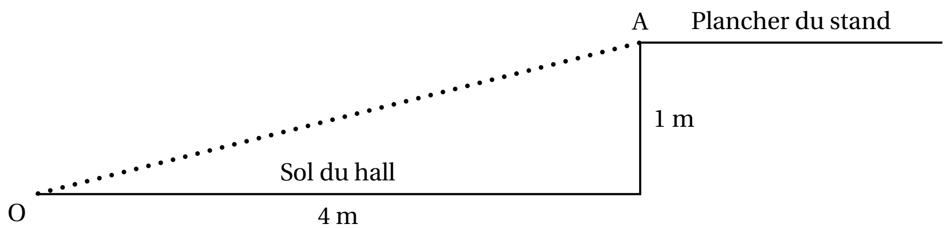
$$A(4\,;\,0) \qquad A'(-4\,;\,0) \qquad B(0\,;\,3) \quad \text{et} \quad B'(0\,;\,-3)$$



1. Montrer qu'une équation de cette ellipse dans $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est : $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.
2. Construire géométriquement les deux foyers F et F′ puis calculer leurs coordonnées exactes.
3. Pour tout point M de l'ellipse $\mathscr{E}$, par quelle relation MF et MF′ sont-ils liés ?
4. Déterminer les valeurs exactes des abscisses des points de $\mathscr{E}$ d'ordonnée 2.
5. Les sommets d'un rectangle de centre O sont des points de l'ellipse $\mathscr{E}$ et ses côtés sont parallèles aux axes. Quelle doit être la longueur du côté horizontal de ce rectangle pour que sa hauteur soit égale à $2\sqrt{7}$?

EXERCICE 2 **12 points**

Pour la construction d'un stand d'exposition, des étudiants en BTS EVEC ont besoin de créer une rampe d'accès reliant le plancher du stand au sol du hall d'exposition. Une rampe plane ne pouvant permettre l'accès aux fauteuils roulants, les élèves de BTS proposent comme solution de remplacer sur la coupe ci-dessous, le segment [OA] par la courbe $\mathscr{C}$ qui fait l'objet du problème suivant.



On choisit le repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ dans lequel le point A a pour coordonnées (4 ; 1) et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie que l'intervalle [0 ; 4] par :

$$f(x) = \frac{1}{32}\left(-x^3 + 6x^2\right).$$

1. Vérifier que O et A sont bien sur la courbe $\mathscr{C}$.
2. **a.** Calculer la fonction dérivée f' de f. Montrer que $f'(x) = \frac{-3}{32}x(x-4)$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur [0 ; 4]. Donner ensuite le tableau de variations de f sur [0 ; 4].
3. **a.** Calculer $f'(0)$ et $f'(4)$. Donner une interprétation graphique de ces résultats.

   b. Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point I d'abscisse 2 ?
4. **a.** Recopier et compléter le tableau suivant : (on arrondira les valeurs au centième).

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$								0,96	

   b. On prendra comme unité graphique 5 cm. Représenter sur une feuille de papier millimétré la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que les tangentes aux trois points d'abscisses 0, 2 et 4.
5. **a.** Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 4].

   b. On note $\mathscr{S}$ la partie située entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$.
   Calculer l'aire de $\mathscr{S}$ (en unités d'aires).

   c. On précise qu'une unité d'aire sur le graphique correspond à 1m^2 en réalité. Sachant que le stand a une largeur de 4 m, quel volume de béton devra-t-on utiliser pour construire la rampe d'accès ? La formule donnant ce volume est $V = B \times h$ où V est le volume, B l'aire de la partie correspondant à la partie $\mathscr{S}$ du graphique et h la largeur du stand.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie électronique ∼ génie électrotechnique, optique France juin 2006

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$.

2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 1 + \text{i}\sqrt{3}$ et $z_{\text{B}} = 1 - \text{i}\sqrt{3}$.

  a. Déterminer le module et un argument de z_{A} et z_{B}.

  b. Donner la forme exponentielle de z_{A}.

  c. Placer les points A et B dans le plan muni du repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

3. On désigne par R la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}} z.$$

  a. Indiquer la nature de la transformation R et préciser ses éléments caractéristiques.

  b. On nomme C l'image du point A par la transformation R. Déterminer la forme exponentielle de l'affixe z_{C} du point C. En déduire sa forme algébrique.

  c. Placer le point C.

  d. Montrer que le point B est l'image du point C par la transformation R.

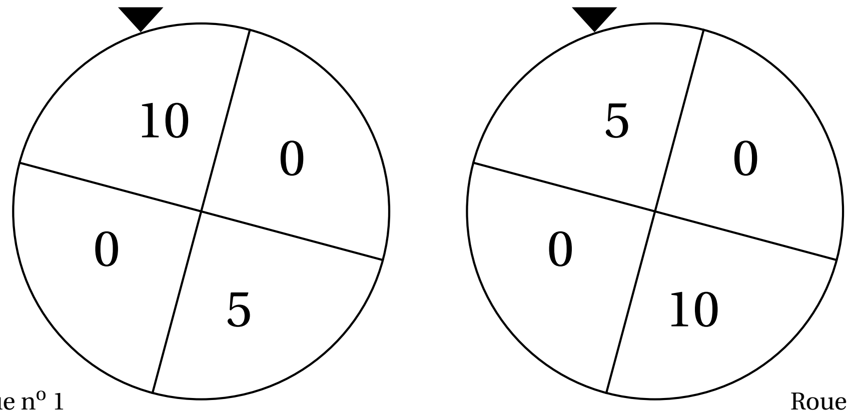
4. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 2 **4 points**

Pour la fête de l'école, une association propose une loterie selon le principe suivant :

– Le joueur mise 10 euros.
– Il fait tourner deux roues identiques chacune s'arrêtant devant un repère.

Chaque roue est divisée en quatre quartiers sur lesquels sont indiqués les gains en euros 10 ; 0 ; 5 ; 0. Tous les quartiers ont la même probabilité de s'arrêter devant le repère. La gain obtenu par le joueur est égal à la somme des gains indiqués sur les quartiers sur lesquels se sont arrêtées les roues.



Roue n$^{\text{o}}$ 1 Roue n$^{\text{o}}$ 2

Dans l'exemple ci-dessus, la partie assure au joueur un gain de 15 €.

1. Étude du gain d'un joueur pour une mise de 10 euros.
On nomme G la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain du joueur en euros.

a. Reproduire et compléter le tableau suivant donnant les valeurs prises par la variable aléatoire G selon les quartiers sur lesquels se sont arrêtées les roues :

Roue n$^{\text{o}}$ 1 / Roue n$^{\text{o}}$ 2	10	0	5	0
10				
0				
5				
0				

b. Prouver que la probabilité que le joueur obtienne un gain supérieur ou égal à sa mise est 50 %.

c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

d. Calculer la probabilité, notée $p(G > 10)$, qu'un joueur obtienne un gain strictement supérieur à sa mise.

e. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire G, puis donner son interprétation.

2. Étude du bénéfice de l'association pour une valse de m euros.
On suppose dans cette question que la mise du joueur est m euros.
On note B la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le bénéfice (positif ou négatif) réalisé par l'association, c'est-à-dire la différence entre la mise qu'elle a encaissée et le gain éventuel qu'elle a reversé au joueur.

a. Exprimer en fonction de m l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.

b. Déterminer m pour que l'espérance de bénéfice de l'association soit d'au moins 5 €.

PROBLÈME **11 points**

Partie A ; Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad : \quad y' + y = -x - 1$$

où y désigne une fonction de la variable x. définie et dérivable sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

1. a. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.
   b. Déterminer la solution h de cette équation différentielle $y' + y = O$ prenant la valeur $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ en $x = 1$.
2. Déterminer le nombre réel a tel que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax$ soit solution de l'équation différentielle (E).

Partie B : étude d'une fonction auxiliaire f
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} - x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. f' désigne la fonction dérivée de la fonction f. Calculer, pour tout réel x, $f'(x)$ puis en déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   b. Donner un encadrement de α d'amplitude $0,01$.
4. Préciser le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Partie C : Calcul de l'aire d'une partie du plan
La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est tracée sur la feuille jointe en annexe, qui est à rendre avec la copie.

1. Dans le demi-plan constitué des points d'abscisses positives, hachurer la partie $\mathscr{D}$ limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$ l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
2. Calculer en fonction de α la mesure, en unités d'aire, de l'aire de la partie $\mathscr{D}$ du plan.

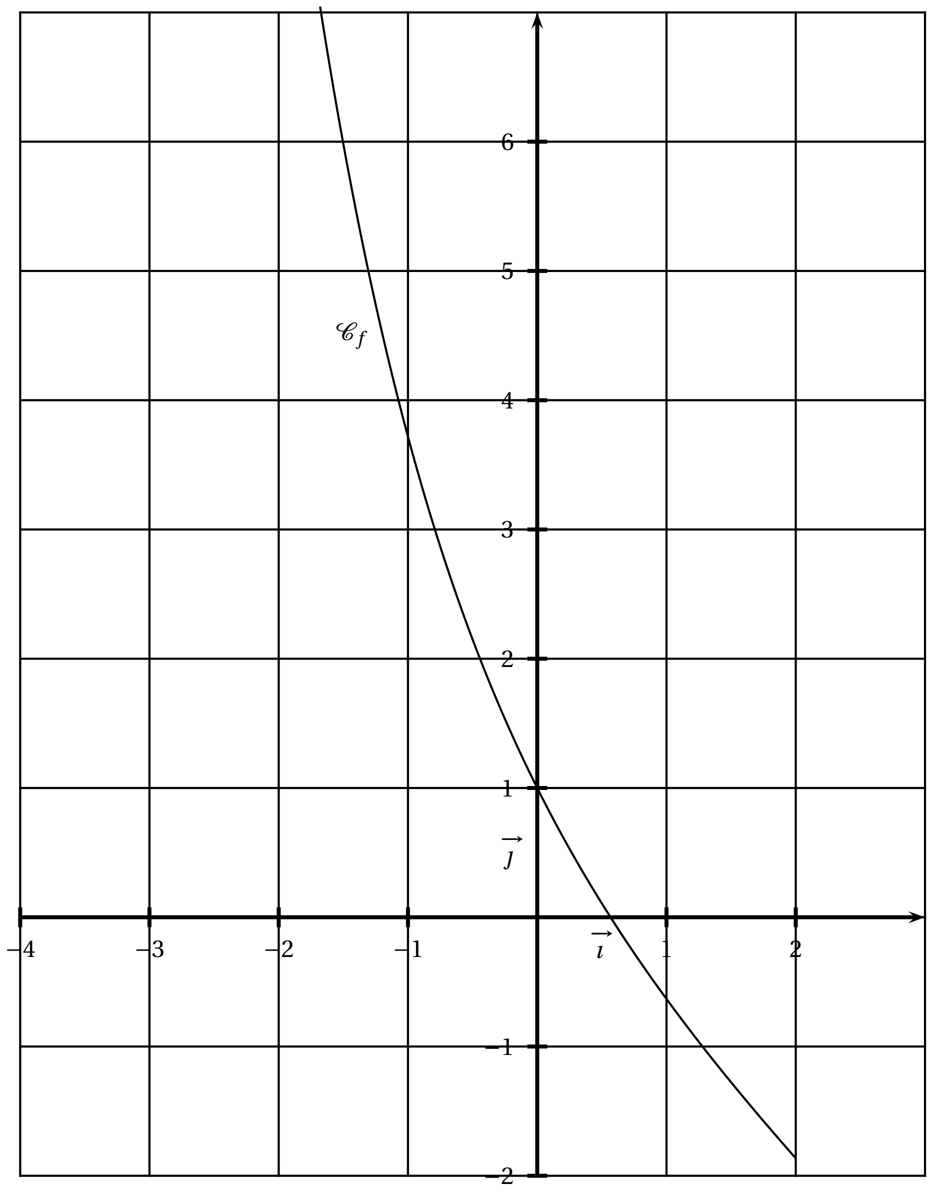
Partie D : étude d'une fonction g et représentation graphique
La fonction g est définie sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ par :

$$g(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{-x} - x}$$

(où α désigne le nombre réel trouvé à la partie B et on note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. a. Vérifier que, pour tout $x \in]-\infty\,;\,\alpha[$, $g(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^{x}}{1 - x\mathrm{e}^{x}}$.
   b. En déduire la limite de la fonction g en $-\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.
2. En utilisant les résultats trouvés dans la partie B question 4, déterminer la limite de la fonction g en α. Interpréter graphiquement cette limite.
3. a. La fonction g' désignant la dérivée de la fonction g, montrer que pour tout x de $]-\infty\,;\,\alpha[$, $g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}(1+x)}{(\mathrm{e}^{-x} - x)^2}$.
   b. En déduire les variations de la fonction g sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ et dresser le tableau des variations de la fonction g.
4. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g dans le repère figurant sur la feuille annexe à remettre avec la copie.

Feuille annexe à remettre avec la copie



Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat STI Génie mécanique, civil France ∾ juin 2006

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **5 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les nombres complexes suivants :

$$z_A = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}, \qquad z_B = 2 - 2\mathrm{i}.$$

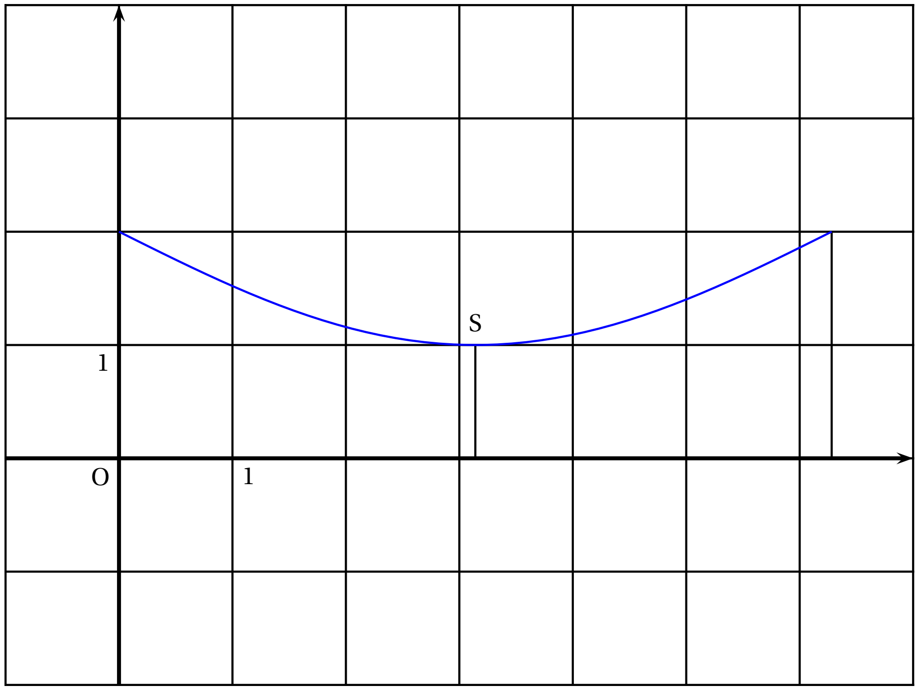
On pose $z = \dfrac{z_A}{z_B}$.

1. Écrire z sous forme algébrique.
2. a. Calculer le module et un argument de z_A et de z_B.
   b. En déduire le module et un argument de z.
   c. Ecrire z sous forme trigonométrique.
3. Déduire des résultats obtenus aux questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{7\pi}{12}$
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
   a. Sur papier millimétré, construire les points A et B, images respectives de z_A et de z_B.
   b. Déterminer la nature du triangle OAB.

EXERCICE 2 **4 points**

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}$, dans un repère orthonormal d'unité 2 cm, de la fonction f définie sur $[0~;~2\pi]$ par :

$$f(x) = 2 - \sin\frac{x}{2}$$



1. Vérifier, par le calcul, que :
   a. la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point S(π ; 1).
   b. la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point S est parallèle à l'axe des abscisses.
   c. la fonction f est solution de l'équation différentielle : $4y'' + y - 2 = 0$.
2. On veut calculer la valeur exacte du volume du solide de révolution engendré par la courbe $\mathscr{C}$ lors de sa rotation autour de l'axe des abscisses. On rappelle que la valeur V de ce volume, en unités de volume, est donnée par la formule :

$$\mathrm{V} = \pi \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x.$$

   a. On pose, pour tout nombre réel x appartenant à $[0\ ;\ 2\pi]$, $g(x) = [f(x)]^2$.
   Démontrer que l'on a : $g(x) = \dfrac{9}{2} - 4\sin\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\cos x$.
   b. Donner la valeur exacte de ce volume en cm^3, puis sa valeur arrondie au mm^3 près.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unités graphiques 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.

2. a. En remarquant que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$

$$f(x) = \frac{1}{1+x}[2x - (1+x)\ln(1+x)],$$

calculer la limite de f en -1 (on pourra utiliser sans démonstration $\lim\limits_{X\to 0} X\ln X = 0$).

b. En déduire une équation d'une droite $\mathscr{D}$ asymptote à $\mathscr{C}$.

3. Déterminer la dérivée f' de f et montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1-x}{(1+x)^2}$. (1+ x)

4. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.

b. Calculer la valeur exacte de $f(1)$.

c. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.

Partie B

1. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

2. a. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution α dans l'intervalle $[1\ ;5]$.
Démontrer que $\ln(1+\alpha) = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha}$.

b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[O\ ;\ \alpha]$.

4. Tracer, dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$, la tangente $\mathscr{T}$, la droite $\mathscr{D}$ puis la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C

1. Démontrer que, sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, la fonction F définie par

$$F(x) = (-3-x)\ln(1+x) + 3x$$

est une primitive de la fonction f.

2. Soit $\mathscr{H}$ la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

a. Hachurer la partie $\mathscr{H}$ sur le dessin.

b. Calculer, en unités d'aire et en fonction de α, l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de la partie $\mathscr{H}$ et démontrer que $\mathscr{A}(\alpha) = 2\left(\dfrac{\alpha^2 - 3\alpha}{1+\alpha}\right)\ \mathrm{cm}^2$.

Baccalauréat STI France juin 2006
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **5 points**

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$(z-4)\left(z^2+4z+16\right)=0.$$

2. Soient les nombres complexes suivants :

$$z_1=4 \qquad z_2=-2-2\mathrm{i}\sqrt{3} \qquad z_3=-2+2\mathrm{i}\sqrt{3} \qquad z_4=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \qquad z_5=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

a. Donner le module et un argument de chacun des nombres complexes $z_1,\ z_2,\ z_3$.

b. Donner les formes algébriques de z_4 et de z_5.

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. Soient les points A, B, C, D et E d'affixes respectives $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ et z_5.

a. Placer les points A , B , C , D et E dans le repère indiqué.

b. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$\pi^2 y+9y''=0,$$

où y est une fonction de la variable réelle x et y'' sa dérivée seconde.

1. Soit g la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par :

$$g(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)+4\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right).$$

Vérifier que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E).

2. **a.** Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E).

b. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie :

$$f(0)=1 \quad \text{et} \quad f'(0)=\frac{\pi}{3}.$$

c. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{4}\right).$$

d. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;3]$ l'équation $f(x)=1$.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels l'équation $2X^2 - 5X + 2 = 0$.
2. En déduire les solutions, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, de l'équation $2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0$.
   On pourra poser $X = \ln x$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2.$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. Limites aux bornes
   - **a.** étudier la limite de f en 0. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?
   - **b.** Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra factoriser par $\ln x$).
2. Variations
   - **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
     Vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,
     $f'(x) = \dfrac{4\ln x - 5}{x}$.
   - **b.** Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   - **c.** En déduire le signe def(x) sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On pourra remarquer que la fonction f s'annule en $\sqrt{\mathrm{e}}$ et en e^2.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse i.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
5. Calcul d'une aire
   - **a.** Hachurer le domaine $\mathscr{A}$ du plan situé en dessous de l'axe $(\mathrm{O}x)$ et compris entre la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe $(\mathrm{O}x)$.
   - **b.** Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par
     $F(x) = x\left[2(\ln x)^2 - 9\ln x + 11\right]$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   - **c.** Calculer en cm^2 l'aire du domaine $\mathscr{A}$. En donner l'arrondi à 10^{-2}.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI La Réunion juin 2006
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **4,5 points**

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes et i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 4z + 16 = 0.$$

2. On considère les nombres complexes :

$$z_1 = 2 + 2\text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = 2 - 2\text{i}\sqrt{3}.$$

   a. Déterminer le module et un argument de z_1.
   b. Écrire z_1, puis z_2 sous forme exponentielle.

3. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 1 cm.
   On considère la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
   a. Placer les points M_1, et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   b. Montrer que le point M_2 est l'image du point M_1 par la rotation r.
   c. On appelle M_3 le point image du point M_2 par la rotation r.
   Calculer l'affixe z_3 du point M_3. Placer le point M_3 dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   d. Démontrer que le triangle $\text{M}_1\ \text{M}_2\text{M}_3$ est équilatéral.

4. Vérifier que les nombres complexes $(z_1)^6$ et $\frac{(z_1)^4}{(z_2)^2}$ sont des entiers naturels.
   On utilisera la forme de z_1 et z_2 la plus adaptée.

EXERCICE 2 **4,5 points**

I. On considère l'équation différentielle :

$$(\text{E}_0) \quad : \quad y'' + 4y = 0$$

où y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et y'' sa dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation (E_0).
2. Déterminer la solution particulière f de (E_0) vérifiant :

$$f(0) = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad f'(0) = 2$$

   où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3. Montrer que pour tout réel t, $f(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(t) = 2\cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right).$$

4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

II. On considère maintenant l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_1) \quad : \quad y'' + 4y = 3\sin t$$

où y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$, et y'' sa dérivée seconde.

1. Montrer que si une fonction g est solution de l'équation (E_0), alors la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(t) = g(t) + \sin t$ est solution de l'équation (E_1).
2. Donner une solution particulière, ne s'annulant pas pour $t = 0$, de l'équation (E_1).

PROBLÈME **11 points**

Sur la feuille annexe, **qui doit être remise avec la copie**, on donne, dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$.

Partie A : détermination de la fonction f

On suppose que la courbe passe par le point A de coordonnées $\left(3\,;\,-\frac{7}{2} + 3\ln 2\right)$.
La droite D d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale â la courbe $\mathscr{C}_f$.
On note f' la fonction dérivée de f.

1. Quelle est la valeur exacte de $f(3)$?
2. Donner sans justification la limite de la fonction f en 2.
3. On suppose que, pour tout réel x de l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$,

$$f(x) = ax - 5 + 3\ln(x-1) - 3\ln(x-2).$$

En utilisant la réponse de la question 1, déterminer algébriquement le nombre a.

Partie B : étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln(x-1) - 3\ln(x-2).$$

1. **a.** Retrouver par le calcul la limite de la fonction f en 2.

   b. Montrer que, pour tout x réel de l'intervalle $]2 + \infty[$

   $$f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right).$$

   c. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x - 5$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$. Tracer Δ sur la feuille annexe.

3. **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{2(x-1)(x-2)}.$$

b. étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$.

4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2{,}1\,;\,3]$ et une solution unique β dans l'intervalle $[9\,;\,10]$.

b. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune des solutions α et β.

Partie C : calcul d'aire

1. On considère les fonctions h et H définies sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par

$$h(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \quad \text{et} \quad H(x) = (x-1)\ln(x-1) - (x-2)\ln(x-2).$$

a. Montrer que la fonction H est une primitive de la fonction h sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$.

b. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$.

2. On considère le domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 9$.

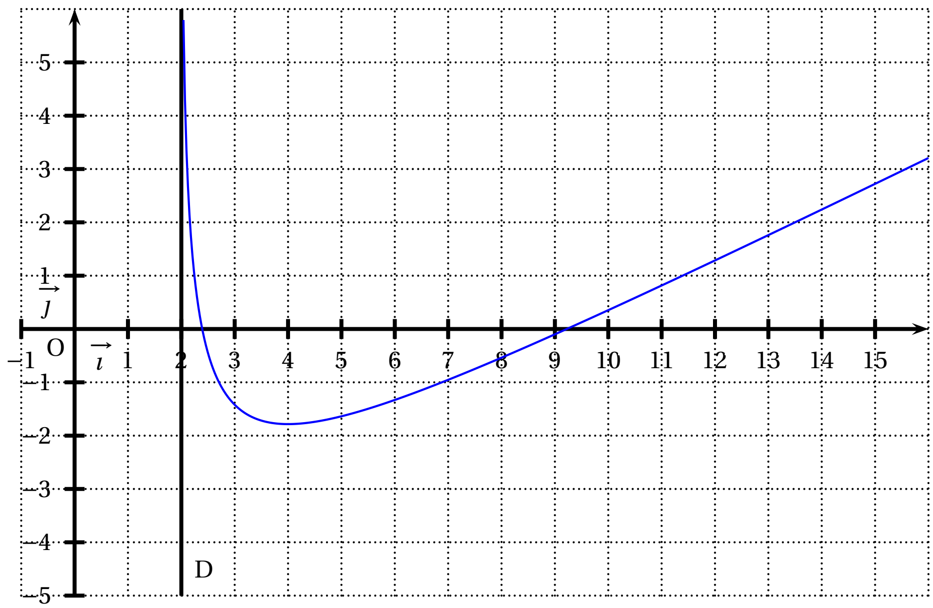
a. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique de la feuille annexe.

b. On note $\mathscr{A}$ la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine $\mathscr{D}$. Exprimer $\mathscr{A}$ sous la forme d'une intégrale.

c. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Courbe de la fonction f



Durée : 4 heures

Baccalauréat STI La Réunion
Génie des matériaux, génie mécanique B, C, D, E
juin 2006

EXERCICE 1 — 4 points

Partie A

On désigne par (E) l'équation différentielle : $2y' + y = 0$ où y est une fonction numérique définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer la solution particulière f de (E) telle que $f(0) = 0,5$.

Partie B

La direction d'un musée vient de faire l'acquisition d'une nouvelle statue et elle souhaite réaliser un socle en bois pour y déposer celle-ci. On appelle V le volume de ce socle dont la forme est donnée sur la feuille annexe jointe.
Le socle est constitué de deux parties.

1. La première partie est un cylindre de révolution de 0,50 m de rayon et de 0,50 m de hauteur. Calculer la valeur exacte, en m^3, du volume V_1 de cette première partie.
2. Le volume V_2 de la deuxième partie est celui du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f d'équation $y = 0,5\text{e}^{-0,5x}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 0,5$.
   On précise que la valeur exacte, en m^3, de ce volume est donnée par la formule :
   $$V_2 = \pi \int_0^{0,5} [f(x)]^2 \,\text{d}x.$$
   a. Calculer V_2.
   b. En déduire que la valeur exacte, en m^3, du volume du socle est :
   $$V = \frac{\pi\left(+ - 2\text{e}^{-0,5x}\right)}{8}.$$
   c. Donner la valeur arrondie du volume V à 10^{-3} près.

EXERCICE 2 — 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :
   $$\text{i}z = -\sqrt{3} + \text{i}.$$
   Exprimer la solution sous forme algébrique.

2. Soit A le point d'affixe z_A défini par $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

   a. Déterminer le module et un argument de z_A.

   b. En déduire que l'écriture algébrique de z_A est $1 + i\sqrt{3}$.

3. On désigne par B et C les points dont les affixes z_B et z_C sont définies par :

$$z_B = -z_A \quad \text{et} \quad z_C = z_A^2.$$

   a. Ecrire z_B et z_C sous forme algébrique.

   b. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

   c. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

4. On note D le point d'affixe z_D définie par $z_D = \dfrac{4}{z_A}$.

   Montrer que $z_D = \overline{z_A}$ où $\overline{z_A}$ désigne le nombre complexe conjugué de z_A.

5. On note E le point de la droite (AC) dont l'affixe z_E est un nombre réel. Calculer z_E.

PROBLÈME **11 points**

On note I l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie A

Soient a et b deux nombres réels.

On considère la fonction numérique f définie, pour tout nombre réel x de I, par :

$$f(x) = x^2 + ax + b - 2\ln x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm). Soit A le point de coordonnées $(1\,;\,-3)$.

Calculer les valeurs respectives des nombres réels a et b pour que, d'une part la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A et que, d'autre part, la tangente à cette courbe au point A admette un coefficient directeur égal à 0.

Partie B

Dans toute la suite du problème, on étudiera la fonction numérique f définie, pour tout nombre réel x de I, par :

$$f(x) = x^2 - 4 - 2\ln x.$$

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

   b. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. a. Verifier que, pour tout nombre réel x de I, on a $f(x) = x\left(x - \dfrac{4}{x} - 2\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

   b. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f puis montrer que, pour tout nombre réel x de I, on a $f'(x) = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

4. Étudier le signe de la fonction f' sur I et dresser le tableau de variations de la fonction f sur I.

5. Déterminer le signe de $f(x)$ quand le nombre réel x appartient à l'intervalle $[1\,;\,2]$.

6. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

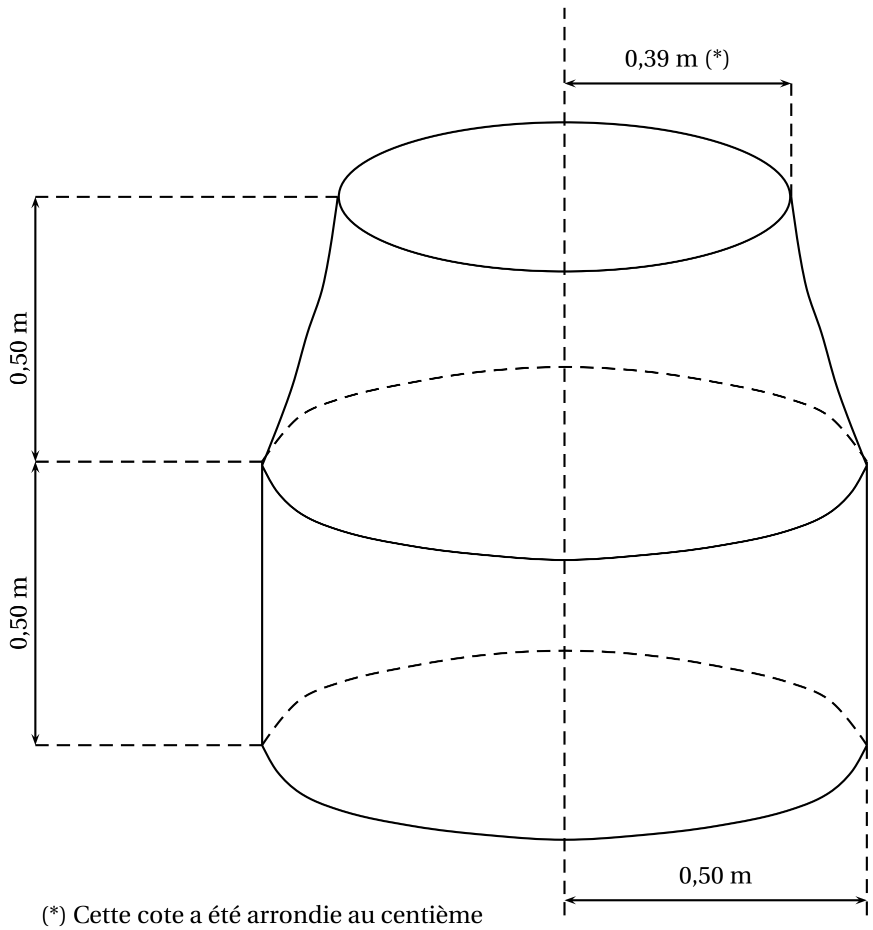
Partie C

Soit H la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de I, par :

$$H(x) = x \ln x - x.$$

1. Calculer $H'(x)$ où H' désigne la fonction dérivée de H.
2. En déduire une primitive F de la fonction f sur I.
3. On appelle Δ la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. Hachurer Δ. Calculer la valeur exacte de l'aire de Δ en unités d'aire, puis en cm^2.

Annexe de l'exercice 1



(*) Cette cote a été arrondie au centième

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie juin 2006 Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthononnal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8.$$

   a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z-2)\left(z^2 - 2z + 4\right)$.

   b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2. On note A, B, C, les points d'affixes respectives : $a = 2$; $b = 1 + \text{i}\sqrt{3}$; $c = 1 - \text{i}\sqrt{3}$.

   a. Déterminer le module et un argument de a, b, c.

   b. En déduire le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

   c. Placer les points A, B et C en laissant visibles les traits de construction.

   d. Démontrer que le quadrilatère OBAC est un losange.

3. On pose $d = a + b$ et on note D le point d'affixe d.

   a. Construire le point D dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   b. Démontrer que A est le milieu du segment [CD].

   c. Ecrire d sous forme exponentielle.

   d. Démontrer que OCD est un triangle rectangle.

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : Calcul d'une primitive

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par

$$g(x) = \frac{x}{x+1}$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;2]$, $g(x) = a + \dfrac{b}{x+1}$.
2. En déduire une primitive de g sur l'intervalle $[0\,;2]$.

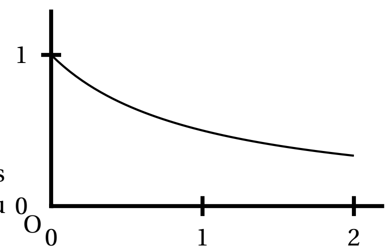
Partie B : Détermination du centre de gravité d'une plaque homogène

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

On considère une plaque homogène formée par l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan dont les coordonnées vérifient les relations : $0 \leqslant x \leqslant 2$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. (Voir schéma ci-dessous).

1. Soit $\mathscr{S}$ l'aire de la plaque exprimée en unité d'aire. Démontrer que $\mathscr{S} = \ln 3$.
2. Soit G le centre de gravité de la plaque. On admettra que les coordonnées $(X\ ;\ Y)$ de G sont données par les formules suivantes :
   $X = \dfrac{1}{\mathscr{S}} \displaystyle\int_0^2 x f(x)\,\mathrm{d}x$ et
   $Y = \dfrac{1}{2\mathscr{S}} \displaystyle\int_0^2 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.
   - **a.** Calculer la valeur exacte de X, puis une valeur approchée arrondie au centième.
   - **b.** Calculer la valeur exacte de Y, puis une valeur approchée arrondie au centième.



PROBLÈME **10 points**

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (1) : $y' + y = 2\mathrm{e}^{-x}$, dans laquelle y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x, dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' + y = 0$.
2. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$. Vérifier que h est solution de l'équation (1).
3. On admet que toute solution de (1) s'écrit sous la forme $g + h$, où g désigne une solution de l'équation (2).
   - **a.** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).
   - **b.** Déterminer la solutionf de l'équation (1) vérifiant la condition initiale $f(0) = -1$.

Partie B. Étude d'une fonction exponentielle

On note f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (2x - 1)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Unités graphiques : 1cm en abscisses et 2cm en ordonnées.

1. Étude des limites.
   - **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   - **b.** En écrivant, pour tout réel x, $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
     Quelle conséquence graphique peut-on en tirer pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Étude des variations de f
   - **a.** Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f, puis démonter que, pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de $(-2x + 3)$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f

3. Représentations graphiques.

a. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

b. Déterminer une équation de chacune des tangentes (T) et (T') à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.

c. Tracer (T), (T') et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie C. Détermination d'une primitive

1. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = -f'(x) + 2\text{e}^{-x}$.

2. En déduire une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

∽ Baccalauréat STI Génie électronique Polynésie ∾ juin 2006

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

Soient les nombres complexes $z_1 = \sqrt{2} + \text{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = 1 + \text{i}\sqrt{3}$.

1. **a.** Déterminer le module et un argument des nombres z_1 et z_2.
   b. Placer les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2.
2. Soit Z le nombre complexe tel que $Z = \dfrac{z_2}{z_1}$.
   Écrire Z sous forme exponentielle, en déduire une mesure en radians de l'angle θ de la rotation de centre O qui transforme A en B.
3. **a.** écrire Z sous forme trigonométrique.
   b. En utilisant les formes algébriques de z_1 et z_2, déterminer la forme algébrique de Z.
   c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 2 **4 points**

Un commercial vend entre 0 et 4 voitures d'un certain modèle en une semaine. Soit X la variable aléatoire qui, pour une semaine, donne le nombre de voitures vendues. X suit la loi de probabilité ci-dessous :

Nombre de voitures vendues	0	1	2	3	4
$p(X = k)$	0,26	0,23		0,15	0,05

1. Calculer la probabilité de vendre exactement deux voitures en une semaine.
2. Justifier que la probabilité de vendre au moins deux voitures en une semaine est égale à 0,51.
3. Donner une représentation graphique de la fonction de répartition F de cette loi dans un repère convenablement choisi.
4. Calculer l'espérance mathématique de cette variable aléatoire. En déduire le nombre moyen de voitures vendues en une année (c'est-à-dire 52 semaines).
5. Le prix de vente d'une voiture est de 13 500 €. Le vendeur perçoit une commission de 0,4 % sur le prix de vente pour chaque voiture vendue. Déterminer le montant moyen de la commission perçue en un an.

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté à un repère orthononnal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

Soit une fonction f définie sur un intervalle I. On a déterminé expérimentalement des valeurs de f qui ont permis d'obtenir une partie de la courbe $(\mathscr{C})$, représentative de la fonction f, et sa tangente (T) au point O (voir feuille annexe).

Partie A

1. À l'aide du graphique, déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.

2. On admet que l'expression de $f(x)$ est de la forme $f(x) = ax + b - \ln(10x+1)$ où a et b sont des réels.

   a. Déterminer $f'(x)$ en fonction de a.

   b. En utilisant les résultats du 1., déterminer les réels a et b.

Partie B

On admet désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $\text{I} =]-0,1~;~10]$ par

$$f(x) = 0,5x - \ln(10x+1).$$

1. Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x \to -0,1 \\ x > -0,1}} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$ représentant f ?

2. Calculer la fonction f' dérivée de la fonction f. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $5x - 9,5$ sur l'intervalle I.
Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle I.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ a dans l'intervalle $[6~;~10]$ une solution unique, que l'on notera α.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $\text{I} =]-0,1~;~10]$ par :

$$F(x) = 0,25x^2 + x - (x+0,1)\ln(10x+1)$$

   a. Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

   b. Calculer l'intégrale $\text{J} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x$. On donnera la valeur exacte.

   c. On considère dans le repère défini initialement, l'ensemble des points M de coordonnées $(x~;~y)$ tels que : $\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\ f(x) & \leqslant & y & \leqslant & O \end{array}\right.$
   Utiliser la question précédente pour déterminer l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2 de cette région. On en donnera la valeur décimale arrondie à 10^{-2} près.

Annexe (problème)