Baccalauréat STI 2007

L'intégrale de septembre 2006 à juin 2007

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

∽ Baccalauréat STI France septembre 2006 ∽
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **5 points**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2 + 2z\sqrt{3} + 4 = 0$$

On note z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive, z_2 la solution dont la partie imaginaire est négative.

2. **a.** Déterminer le module et un argument de z_1 puis de z_2.

   b. En déduire le module et un argument de z_1^2 puis de z_2^2.

   c. Donner les formes algébriques des nombres complexes z_1^2 et z_2^2.

3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

   a. Placer les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_\text{A} = -\sqrt{3} + \text{i}$, $z_\text{B} = -\sqrt{3} - \text{i}$, $z_\text{C} = 2 - 2\text{i}\sqrt{3}$ et $z_\text{D} = 2 + 2\text{i}\sqrt{3}$.

   b. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

Une entreprise produit des rondelles métalliques. Ces rondelles peuvent présenter deux défauts :

- un défaut de diamètre,
- un défaut d'épaisseur.

Le pourcentage des pièces présentant un défaut de diamètre est de 6 %. Celui des pièces présentant un défaut d'épaisseur est de 8 %. Le pourcentage des pièces présentant les deux défauts est de 5 %.

1. Recopier et compléter le tableau suivant en indiquant dans chaque case le pourcentage correspondant :

	Avec le défaut de diamètre	Sans le défaut de diamètre	Total
Avec le défaut d'épaisseur			
Sans le défaut d'épaisseur			
Total	6 %		100 %

2. Une pièce est choisie au hasard dans la production. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies. Montrer que la probabilité pi de présenter un défaut d'épaisseur et pas dc défaut de diamètre est égale à 3 %.

3. Une pièce est choisie au hasard parmi les pièces présentant un défaut de diamètre. Quelle est la probabilité p_2 qu'elle présente un défaut d'épaisseur ?

4. Soit X la variable aléatoire qui à toute pièce de cette production prise au hasard associe le nombre de défauts observés sur celle-ci.

   a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

   b. Donner sous la forme d'un tableau la loi de la variable aléatoire X.

c. Calculer $\mathrm{E}(X)$, l'espérance mathématique de la variable aléatoire X (on détaillera les calculs effectués).

PROBLÈME **10 points**

Partie I : étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthononné $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 5 cm.

1. Étudier la parité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   En déduire une propriété géométrique de la courbe $\mathscr{C}$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis en $-\infty$.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Déterminer $f'(x)$.
4. Étudier le signe de $(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ sur $\mathbb{R}$.
   En déduire le signe de $f(x)$.
5. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
6. Sur une feuille de papier millimétré, et en utilisant le repère indiqué, construire la portion de la courbe $\mathscr{C}$ dont les abscisses appartiennent à l'intervalle $[-2~;~2]$.
   Placer les points A et B de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives -1 et 1.
   On rappelle que l'unité graphique est 5 cm.

Partie II : étude de la longueur d'un arc de la courbe
On appelle ℓ la longueur de l'arc $\widehat{\mathrm{AB}}$ de la courbe $\mathscr{C}$.

1. Déterminer les coordonnées du point E d'abscisse 0 de la courbe $\mathscr{C}$.
2. Calculer, en centimètre, les valeurs exactes des longueurs AE et EB.
   En déduire qu'une valeur arrondie à 10^{-2} de (AE + EB) est égale à 11,38 cm.
3. On admet que la longueur ℓ de l'arc $\widehat{\mathrm{AB}}$ est donnée en centimètre par la formule suivante :
   $$\ell = 5 \times \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$
   a. Montrer que $1 + [f'(x)]^2 = \left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2$.
   b. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$.
   c. En déduire la valeur exacte de la longueur de cet arc. Quelle est l'erreur commise en prenant (AE + EB) comme valeur approchée de ℓ ?

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique, civil France septembre 2006

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 — 4 points

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$\left(z^2+9\right)\left(z^2-9z+27\right)=0.$$

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 3\text{i} \quad ; \quad z_{\text{B}} = \frac{9}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i} \quad \text{et } z_{\text{C}} = \frac{9}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}.$$

a. Écrire chacun des nombres complexes $z_{\text{A}}, z_{\text{B}}$ et z_{C} sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ où r est un nombre, réel positif et θ un nombre réel.

b. Soit I le point d'affixe $z_{\text{I}} = 2$. Calculer les distances AI, BI et CI.
En déduire que les points A, B et C sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c. À l'aide d'une règle et d'un compas, construire les points I, A, B et C. On utilisera une feuille de papier millimétré et on laissera apparents les traits de construction pour les points B et C.

EXERCICE 2 — 4 points

1. Résoudre l'équation différentielle : $y''+16y=0$, y désignant une fonction numérique d'une variable réelle définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

2. Déterminer la solution f de cette équation différentielle vérifiant :

$$f(0) = \frac{1}{10} \quad \text{et } f'(0) = -\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

3. Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) = \dfrac{1}{5}\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

4. **a.** Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{5}$.

b. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{5}$ qui appartiennent à l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$.
Représenter ces solutions sur un cercle trigonométrique.

PROBLÈME **12 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 2x^2 - 4\ln x + 4.$$

1. Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction g et prouver que, pour tout nombre réel x strictement positif :

$$g'(x) = \frac{4x^2 - 4}{x}.$$

2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ puis dresser son tableau de variations (on ne demande pas le calcul des limites).
3. Déterminer le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Dans toute la suite du problème, on étudie la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 2x - 3 + 4\frac{\ln x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en 0.
   b. Interpréter graphiquement le résultat précédent.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   c. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
3. Déterminer la dérivée f' de la fonction f et prouver que, pour tout nombre réel x strictement positif :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

4. À l'aide des résultats de la partie A, indiquer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1\ ;\ 2]$.
   b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-4} de α.
6. Pour quelle valeur de x la courbe $\mathscr{C}$ admet-elle, au point d'abscisse x, une tangente parallèle à $\mathscr{D}$?
7. Construire avec soin la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ (on utilisera une feuille de papier millimétré).

Partie C

Dans cette partie, on souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$, en cm^2, du domaine $\mathscr{E}$ situé entre les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$.

1. Hachurer le domaine $\mathscr{E}$ sur le graphique réalisé à la partie B.
2. Montrer que $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^5 4\frac{\ln x}{x}\,\text{d}x$.
3. **a.** On pose, pour tout nombre réel x strictement positif, $H(x) = (\ln x)^2$. Déterminer la dérivée de la fonction H.
   b. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis en donner une valeur approchée au mm^2 près.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie électronique ∾ génie électrotechnique, optique France septembre 2006

EXERCICE 1 **5 points**

j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $(1-2\text{i})z = (1-\text{i})z - 1 - \text{i}$.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm, on considère les points A, B et D tels que :

– A est le point d'affixe $z_{\text{A}} = 1 - \text{i}$,

– B est l'image du point A par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$;

– D est le symétrique du point A par rapport à O.

a. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.

b. Calculer le module et un argument de l'affixe z_{A} du point A.

c. Déterminer la forme algébrique de l'affixe z_{D} du point D. Justifier.

d. Calculer le module et un argument du nombre complexe z_{B} affixe du point B.

e. Justifier que le triangle AOB est équilatéral, en déduire la valeur de la distance AB.

3. On note C l'image de B par la translation T de vecteur d'affixe $-1+\text{i}$.

a. Établir l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\text{AD}} = 2\overrightarrow{\text{BC}}$.

b. Démontrer que le quadrilatère OBCD est un parallélogramme.

c. Prouver que CD = AB.

d. En déduire que le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.

EXERCICE 2 **4 points**

Un joueur lance successivement et dans cet ordre trois pièces de monnaie : une de 2 euros et deux de 1 euro.

1. Déterminer les différents résultats possibles, sachant qu'un résultat peut être considéré comme un triplet du type (P, F, P) par exemple, P désignant pile et F désignant face.
Chaque pièce est parfaitement équilibrée. On est dans une situation d'équiprobabilité.

2. Si les trois pièces présentent leur côté face, le joueur perd 5 euros : sinon il gagne la somme des euros figurant sur les pièces présentant leur côté pile.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer des trois pièces, associe la somme d'argent gagnée en euros. Lorsque le joueur perd, la variable X prend alors une valeur négative.

a. Quelles valeurs peut prendre X ?

b. Donner la loi de probabilité de X.

c. Calculer la probabilité de l'évènement « $X \leqslant 2$ ».

3. On dit qu'un jeu est équitable lorsque l'espérance mathématique du gain est égale à 0.

a. Ce jeu est-il équitable ?

b. Quelle somme le joueur devrait-il perdre lorsque les trois pièces présentent leur côté face pour que ce jeu soit équitable ?

PROBLÈME **11 points**

Partie A : Détermination d'une fonction

Soit f une fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan et f' la fonction dérivée de f.

On sait de plus que :

- la droite Δ d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$;
- la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point A(0 ; 4)
- la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse $\dfrac{1}{4}$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer les nombres réels suivants en justifiant la réponse donnée :

a. $f(0)$ **b.** $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$ **c.** $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

2. On admet que, pour tout réel x, $f(x) = a + (bx + c)\text{e}^{2x}$ où a, b et c sont trois constantes réelles.

a. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (2bx + b + 2c)\text{e}^{2x}$.

b. Exprimer en fonction de a, b et c les nombres réels suivants :
$f(0)$; $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$; $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$ (on admet que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x\text{e}^{2x} = 0$).

3. **a.** Déduire des questions précédentes que les réels a, b et c sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a + c & = & 4 \\ \dfrac{3}{2}b + 2c & = & 0 \\ a & = & 1 \end{array}\right.$$

4. Résoudre ce système et donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie B : étude et représentation d'une fonction

On admet que f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + (-4x + 3)\text{e}^{2x}.$$

C_f est la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité 2 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. On rappelle que la droite Δ d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.
Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

2. **a.** Calculer $f'(x)$, f' étant la fonction dérivée de la fonction f.

b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et établir son tableau de variations.

3. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\ ;\ 1\right]$.

   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

4. En utilisant les résultats précédents, construire sur la feuille de papier millimétré, la droite δ puis la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie C : calcul d'une aire

On considère les fonctions h et H définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (-4x+3)\text{e}^{2x} \text{ et } H(x) = \left(-2x+\frac{5}{2}\right)\text{e}^{2x}.$$

1. Vérifier que la fonction H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
2. On appelle $\mathscr{D}$ la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_f$,la droite Δ d'équation $y = 1$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

   a. Hachurer $\mathscr{D}$ sur le graphique.

   b. Calculer la valeur exacte de la mesure, en cm^2, de l'aire $\mathscr{A}$ de $\mathscr{D}$ puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Baccalauréat STI Arts appliqués – France septembre 2006

Coefficient : 2 Durée : 2 heures

L'usage d'une calculatrice réglementaire est autorisé durant l'ensemble de l'épreuve.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

EXERCICE 1 **8 points**

Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ d'unité 1 cm, on considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

1. Vérifier que les points M dont les coordonnées vérifient cette équation, sont solutions de l'équation : $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.
Quelle est la nature de la courbe $\mathscr{C}$?

2. Calculer les coordonnées des sommets A, A′, B et B′.

3. Calculer les coordonnées des foyers F et F′.

4. **a.** Placer sur un graphique les points A, A′, B, B′, F et F′.

b. Montrer que $\mathscr{C}$ est la réunion de deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'équations respectives

$$y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \quad \text{et} \qquad (1) \quad y = -3\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}.$$

c. En utilisant l'équation (1) de la courbe $\mathscr{C}_1$, compléter le tableau de valeurs, arrondies au dixième, ci-dessous.

x	0	1	2	3	4	5
y						

d. Tracer la courbe $\mathscr{C}_1$ sur l'intervalle $[0\,;\,5]$; puis en utilisant les éléments de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$, tracer $\mathscr{C}$.

5. Soit D le point de coordonnées $(-3\,;\,-2,4)$. Déterminer FD, F′D et FD + F′D.
Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 2 **12 points**

Soit f la fonction numérique définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 1}{(x+1)^2}.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représetative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm).

1. Vérifier que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = 2 - \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

2. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote dont on déterminera une équation.

3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote dont on déterminera une équation.

4. Vérifier que la dérivée de f est définie par $f'(x) = \dfrac{6}{(x+1)^3}$.
   Trouver le signe de $f'(x)$ sur $]-1\,;\,+\infty[$. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

5. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

6. Calculer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées puis du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

7. **a.** Compléter le tableau de valeurs, arrondies au dixième, suivant :

x	$-0,5$	0	1	2	3	5
$f(x)$						

   b. Construire sur un même graphique les asymptotes T puis $\mathscr{C}_f$.

8. **a.** Montrer que la fonction F définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $F(x) = 2x + \dfrac{3}{x+1}$ est une primitive de la fonction f sur $]-1\,;\,+\infty[$.

   b. On considère la partie $\mathscr{A}$ du plan comprise entre les droites d'équation $x = 1$, $x = 5$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.
   Déterminer l'aire de $\mathscr{A}$ en unités d'aire et ensuite en cm^2.

Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat STI Novembre 2006 ∾ Génie Mécanique - Génie Énergétique - Génie Civil Nouvelle-Calédonie

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet. Une feuille de papier millimétré sera mise á la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.

1. Résolution d'une équation.

a. Résoudre , dans l'esemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes I'équation

$$(z-4\text{i})\left(z^2-4z+8\right)=0.$$

b. Déterminer l'écriture de chacune des solutions sous la forme exponentielle $\rho\text{e}^{\text{i}\theta}$ où ρ est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel.

2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a=2-2\text{i}$, $b=2+2\text{i}$ et $c=4\text{i}$.

a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

b. Placer le milieu M du segment [BC] et calculer son affixe m sous la forme algébrique.

3. On désigne par B$'$, C$'$ et M$'$ les points d'affixes respectives $b'=\dfrac{16}{b}$, $c'=\dfrac{16}{c}$ et $m'=\dfrac{16}{m}$.

a. Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes b' et c'.

On admettra que $m'=\dfrac{8}{5}-\dfrac{24}{5}\text{i}$.

b. Placer les points B$'$, C$'$ et M$'$ sur la figure.

4. Quelques configurations géométriques.

a. Calculer les modules des nombres complexes $b'-a$, $c'-a$ et $m'-a$.

b. En déduire que les points B$'$, C$'$ et M$'$ appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ de centre A

c. Tracer le cercle $\mathscr{C}$ sur la figure et démontrer que le point O appartient au cercle $\mathscr{C}$.

d. Démontrer que le triangle isocèle AB$'$C$'$ est rectangle en A.

EXERCICE 2 **3 points**

Le dispositif de la figure A ci-dessous est constitué d'une cuve reliée à un récipient par un tuyau muni d'une vanne.

Cette vanne étant fermée, on remplit d'eau la cuve (figure A). On ouvre ensuite la vanne et l'eau passe dans le récipient d'où elle s'écoule en pluie fine par le fond percé d'une multitude du petits orifices comme l'indique la figure B ci-dessous.

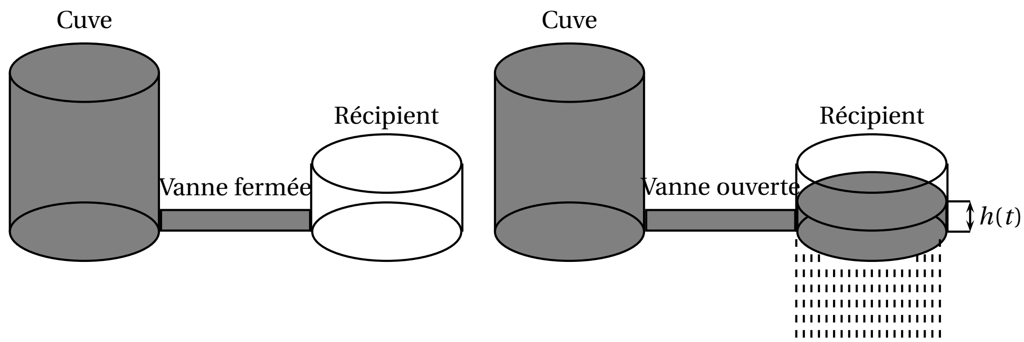


Figure A Figure B

On considère alors la fonction h qui à tout instant t exprimé en minutes, fait correspondre la hauteur d'eau $h(t)$, exprimée en mètres, dans le récipient. On choisit l'instant où l'on ouvre la vanne comme origine des temps et, à cet instant $t = 0$, la hauteur d'eau dans le récipient est nulle.

On admet que la fonction h est définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et qu'elle vérifie, pour tout nombre réel t de cet intervalle, la relation

$$h'(t) + 2h(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}$$

où h' désigne la dérivée de la fonction h.

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $g(t) = h(t) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}$.

  a. Démontrer que g est une solution de l'équation différentielle (E) $y' + 2y = 0$.

  b. Résoudre l'équation différentielle (E).

  c. Utiliser les résultats précédents et la condition initiale $h(0) = 0$ pour démontrer que, pour tout t appartenant à $[0~;~+\infty[$: $h(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right)$.

2. Étude des variations de h

  a. Déterminer la limite de h en $+\infty$

  b. Calculer $h'(t)$ et démontrer que pour tout réel t appartenant à $[0~;~+\infty[$, $h'(t)$ a même signe que $2\mathrm{e}^{-t} - 1$.

  c. Étudier le signe de $2\mathrm{e}^{-t} - 1$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction h. Calculer $h(\ln 2)$.

3. En déduire la hauteur minimale en millimètres que doit avoir le récipient pour que l'eau s'en écoule entièrement par le fond, c'est-à-dire sans déborder du récipient, lorsque la vanne reste ouverte.

PROBLÈME **10 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 4\ln 2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln x$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien. On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du plan d'unité graphique 2 cm.

Partie A Étude de la fonction f

1. Étude des limites.

a. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et en déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote dont on précisera une équation.

b. Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ on a :

$$f(x) = 4 - \ln 2 - x\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}\right) \quad \text{et en déduire } \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

2. Étude du signe de f sur un intervalle

a. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{2x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau des variations de la fonction f.

c. Calculer $f(4)$ et en déduire que la fonction f est positive ou nulle sur l'intervalle $[1\,;\,4]$.

3. On désigne par A et B les points de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives 1 et 4.

a. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en B.

b. Tracer les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points A et B puis $\mathcal{C}_f$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie B

On admet que, compte tenu de l'unité graphique utilisée, la longueur L, exprimée en cm, de l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$ de la courbe $\mathcal{C}_f$ est donnée par l'intégrale suivante :

$$L = \int_1^4 2\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Démontrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $1 + [f'(x)]^2 = \left(\dfrac{1}{2x} + \dfrac{x}{2}\right)^2$.

2. Calculer la valeur exacte de la longueur en cm de l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$ de la courbe $\mathcal{C}_f$, puis en donner un valeur approchée arrondie au mm.

Partie C

On considère la région $\mathcal{A}$ du plan délimitée par la droite d'équation $x = 1$, l'axe des abscisses et l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$ de la courbe $\mathcal{C}_f$.

1. On considère la fonction G définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $G(x) = x\ln x - x$. Démontrer que la fonction G est une primitive de la fonction $x \longmapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire de $\mathcal{A}$ (On utilisera le résultat de 2 c de la partie A), puis en donner une valeur approchée arrondie au mm^2.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique, civil France juin 2007

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **4 points**

On considère l'équation différentielle (E) : $4y'' + \pi^2 y = 0$ où y est une fonction numérique deux fois dérivable de la variable réelle x.

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer la fonction g, solution de cette équation, dont la courbe représentative dans un repère du plan passe par le point N de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et qui, en ce point, admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
3. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $g(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
4. Calculer la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

EXERCICE 2 **5 points**

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation
$$z^2 + 2z + 10 = 0.$$
2. Déterminer les nombres complexes c et d vérifiant le système :
$$\left\{\begin{array}{rcl} -2c + d & = & 1 + 13\text{i} \\ -c + d & = & 4 + 8\text{i} \end{array}\right.$$
3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
   a. Placer sur une figure les points A, B, C et D dont les affixes respectives sont :
   $$-1 + 3\text{i},\ -1 - 3\text{i},\ 3 - 5\text{i}\ \text{ et } 7 + 3\text{i}.$$
   b. Démontrer que le triangle BAD est rectangle en A.
   c. Démontrer que le triangle BCD est rectangle en C.
   d. En déduire que les quatre points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on déterminera le centre Ω et le rayon. Tracer le cercle sur la figure.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par
$$f(x) = \text{e}^x \ln x + \frac{\text{e}^x}{x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

L'objet de cette première partie est l'étude des limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x,
   $f(x) = \dfrac{\text{e}^x}{x}(x \ln x + 1)$.
   On rappelle que $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$. En déduire la limite de f en 0.

   b. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote $\mathscr{D}$ dont on donnera une équation.

Partie B : étude d'une fonction intermédiaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

1. **a.** On désigne par g' la dérivée de la fonction g.
   Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x,
   $g'(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$.

   b. Étudier le signe de $g'(x)$. En déduire que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0~;+\infty[$. L'étude des limites n'est pas demandée.
2. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}~;~1\right]$.

   b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. Déduire des questions B 1 et B 2 le signe de $g(x)$, pour x appartenant à l'intervalle $]0~;+\infty[$.

Partie C : étude des variations de la fonction f et construction de la courbe associée

1. **a.** f' désignant la dérivée de f, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \text{e}^x g(x)$, pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $]0~;+\infty[$.

   b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0~;+\infty[$.
2. **a.** Dresser le tableau de variations de la fonction f.

   b. Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de $f(\alpha)$, en prenant $0,6$ pour valeur approchée de α.
3. **a.** Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

x	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5
$f(x)$ à 10^{-1} près										

   b. Construire l'asymptote $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ pour x appartenant à l'intervalle $]0~;2,5]$.

Partie D : calcul d'aire

1. Montrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0~;+\infty[$ par $F(x) = \text{e}^x \ln x$ est une primitive de f.

2. On désire calculer l'aire de la partie $\mathscr{E}$ du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

a. Hachurer la partie $\mathscr{E}$ sur le dessin.

b. Déterminer la valeur exacte de l'aire de $\mathscr{E}$ en unités d'aires, puis en cm^2.

Baccalauréat STI France juin 2007
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

Exercice 1 **4 points**

Une entreprise fabrique des plaquettes de métal. Pour cela elle utilise deux machines, une qui les ajuste en longueur et une autre qui les ajuste en largeur.
Les machines sont programmées pour donner des plaquettes de 2,5 cm sur 1,5 cm.
Des erreurs de manipulation peuvent conduire à des dimensions non conformes : une longueur de 2,6 cm au lieu de 2,5 cm ; une largeur de 1,6 cm au lieu de 1,5 cm.

Afin de vérifier la conformité de ces plaquettes, on procède à deux tests : un test sur la longueur et un test sur la largeur. On effectue les deux tests sur 100 plaquettes et on obtient :

- 20 plaquettes ont une longueur de 2,6 cm ;
- 18 plaquettes ont une largeur de 1,6 cm ;
- 5 plaquettes ont une dimension de 2,6 cm sur 1,6 cm.

On prélève au hasard une plaquette parmi les 100. Elles ont donc toutes la même probabilité d'être choisies.

1. Recopier et compléter le tableau des effectifs suivant :

	Largeur conforme 1,5	Largeur non conforme 1,6	Total
Longueur conforme 2,5			
Longueur non conforme 2,6		5	20
Total			100

2. a. Quelle est la probabilité qu'une plaquette prélevée au hasard soit conforme à ce que veut l'entreprise ?
   b. Quelle est la probabilité qu'une plaquette prélevée au hasard ait exactement une de ses dimensions non conforme ?
3. Soit X la variable aléatoire qui à chaque plaquette prélevée au hasard associe le nombre de ses dimensions non conformes.
   a. Donner les valeurs possibles de X.
   b. Donner la loi de probabilité de X.

Exercice 2 **5 points**

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

   On donnera les solutions sous forme algébrique puis, pour chacune d'elles, le module et un argument.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
   On note A, B et C les points du plan ayant pour affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 1 - \text{i}\sqrt{3}, \quad z_{\text{B}} = 2 \text{ et } z_{\text{C}} = 1 + \text{i}\sqrt{3}.$$

   a. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

b. Montrer que les triangles OAB et OBC sont équilatéraux.

c. Soient D, E et F les points tels que le polygone ABCDEF soit un hexagone régulier. Construire les points D, E et F sur la figure commencée dans la question 2 a.
On rappelle qu'un hexagone est un polygone à 6 *côtés.*

d. Calculer le produit des affixes des 6 sommets de cet hexagone régulier.

Problème **11 points**

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x - 3.$$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Limites aux bornes

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
On pourra établir au préalable que. pour tout nombre réel x,
$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1 + 2x\mathrm{e}^{x} - 3\mathrm{e}^{x}\right)$.

2. Asymptote oblique

a. Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 2x-3$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

b. Étudier la position relative de la droite $(\mathscr{D})$ par rapport à la courbe $(\mathscr{C})$.

3. Étude des variations de la fonction *f*

a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{x} - 1}{\mathrm{e}^{x}}$ où f' est la dérivée de la fonction f.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x, $f(x) = 0$.

c. Étudier le signe de la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Établir le tableau de variations de la fonction f.

e. Calculer $f(1)$ et déterminer le signe de $f(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.

4. Tracer la droite $(\mathscr{D})$ et la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

5. Calculer l'aire $(\mathscr{A})$ en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On donnera la valeur exacte de $(\mathscr{A})$, puis la valeur arrondie à 10^{-2}.

6. Contrôler l'ordre de grandeur du résultat de la question précédente en calculant l'aire en cm^2 de la surface d'un ou deux trapèzes que l'on précisera.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie électronique génie électrotechnique, optique France juin 2007

EXERCICE 1 **6 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

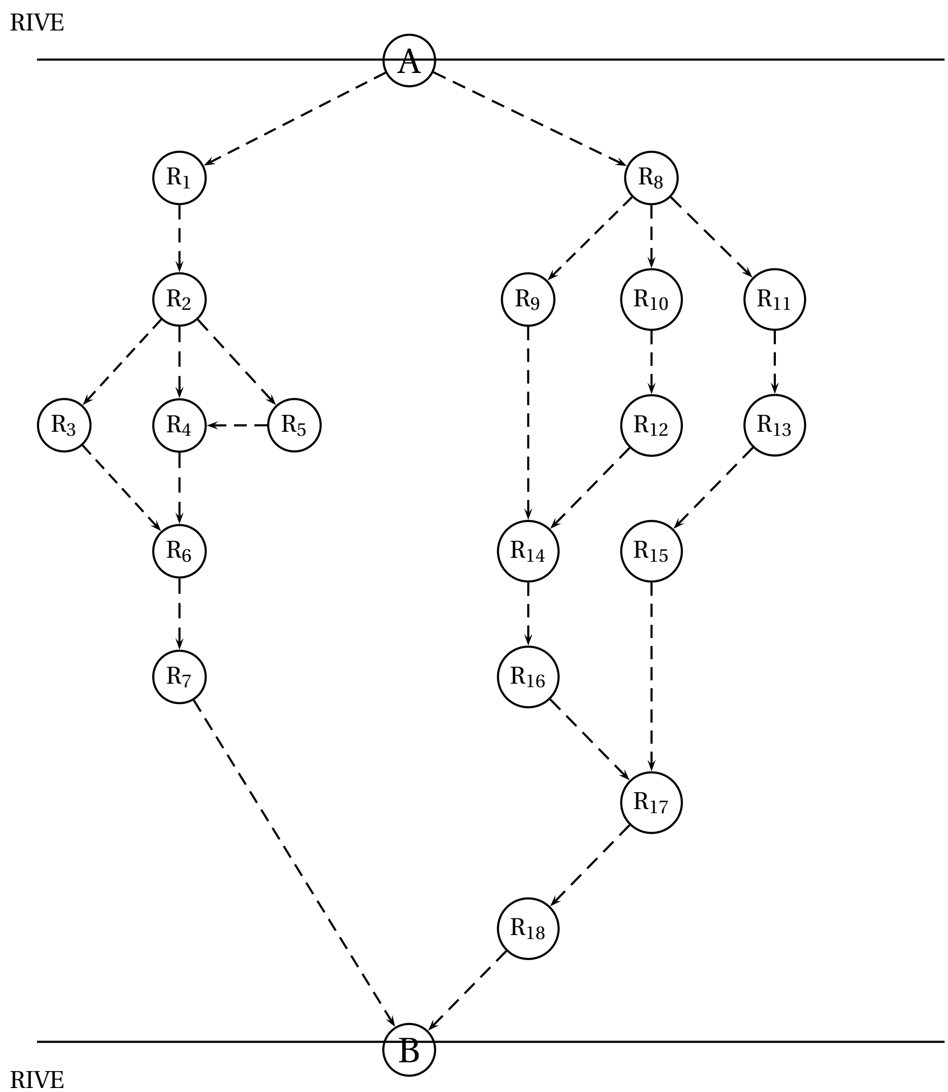
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2+4z+16=0$.
2. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z)=z^3-64$.
   - **a.** Calculer $P(4)$.
   - **b.** Trouver les réels $a,\ b$ et c tels que, pour tout nombre complexe z, $P(z)=(z-4)\left(az^2+bz+c\right)$.
   - **c.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z)=0$.
3. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_{\text{A}}=-2+2\text{i}\sqrt{3},\ z_{\text{B}}=\overline{z_{\text{A}}}$ et $z_{\text{C}}=4$.
   - **a.** Établir que $z_{\text{A}}=4\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$.
     Écrire z_{B} sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$, où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.
   - **b.** Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   - **c.** Déterminer la nature du triangle ABC.
4. On appelle D l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$, et on appelle z_{D}, l'affixe du point D.
   - **a.** Déterminer le module et un argument de z_{D}.
   - **b.** En déduire la forme algébrique de z_{D}.
   - **c.** Placer le point D sur le graphique précédent

EXERCICE 2 **4 points**

Le personnage virtuel d'un jeu électronique doit franchir un torrent en sautant de rocher en rocher.

Le torrent se présente de la manière suivante (les disques R_1, R_2, $\dots$, R_{17}, R_{18}, représentent les rochers) :



Le personnage virtuel part de A pour aller en B. Il ne peut choisir que les trajets matérialisés par des pointillés et avancer uniquement dans le sens des flèches. On appelle « parcours » une suite ordonnée de lettres représentant un trajet possible.
Par exemple : $AR_1R_2R_3R_6R_7B$ est un parcours qui nécessite 6 bonds.
Toute probabilité demandée sera donnée sous forme de fraction.

1. Déterminer les six parcours possibles.
2. Le joueur choisit au hasard un parcours. On admet que les différents parcours sont équiprobables.
   a. Quelle est la probabilité p_1 de l'évènement « le personnage virtuel passe par le rocher R_7 » ?
   b. Quelle est la probabilité p_2 de l'évènement « le personnage virtuel passe par le rocher R_{14} » ?
3. Chaque bond du personnage virtuel nécessite 2 secondes.
   On note X la variable aléatoire qui, à chaque parcours, associe sa durée en secondes.
   a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.
4. Quelle devrait être la durée d'un bond du personnage virtuel pour que la durée moyenne d'un parcours soit égale à 10 secondes ?

Problème **10 points**

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On s'intéresse dans ce problème à une fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan $.\mathcal{P}$.
On note ln la fonction logarithme népérien.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln x.$$

On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Calculer $g(1)$ et en déduire l'étude du signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B : détermination de l'expression de la fonction *f*

On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f(x) = ax + b - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Calculer $f(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Sachant que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point de coordonnées $(1~;~0)$ et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres a et b.

Partie C : étude de la fonction *f*

On admet désormais que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;+\infty[$, $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.

   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. **a.** Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$,
   $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   b. Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   c. En déduire le signe de $f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 1$.

   a. Justifier que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

   b. Étudier les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

   c. Traver la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie D : calcul d'aire

On note $\mathcal{A}$ la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire de la partie du plan $\mathcal{P}$ comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$.
   On désigne par H' la fonction dérivée de la fonction H.

   a. Calculer $H'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. **a.** Calculer $\mathcal{A}$.

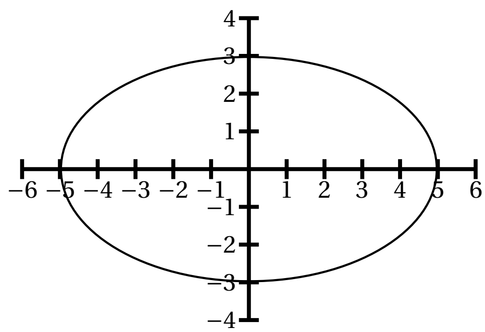
   b. Donner la valeur de $\mathcal{A}$ arrondie au mm^2.

Baccalauréat STI Arts appliqués – France juin 2007

EXERCICE 1 **8 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Parmi les réponses proposées, une seule est correcte. On indiquera sur la copie, pour chaque question, la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Toutes les questions sont indépendantes. Les réponses exactes aux questions 2 et 3 rapportent deux points, les autres un point.

1. On considère l'ellipse tracée dans un repère orthonormé sur la figure ci-dessous :



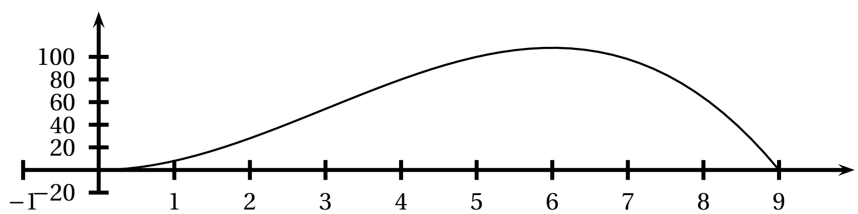
a. Une équation de cette ellipse est :

A : $25x^2+9y^2=225$	B : $9x^2+25y^2=225$	C : $3x^2+5y^2=15$	D : $9x^2-25y^2=225$

b. Un de ses foyers est le point F de coordonnées :

A : (4 ; 0)	B : (5 ; 0)	C : (0 ; 3)	D : (2 ; 0)

2. Soit la fonction f définie sur $[0 ; 9]$ par $f(x)=-x^3+9x^2$ dont la courbe représentative dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. On remarquera que $f(0)=0$ et $f(9)=0$.



L'aire du domaine compris entre la courbe de f et l'axe des abscisses est, en unités d'aire :

A : 0	B : 546,75	C : 81	D : impossible à calculer

3. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x)=\ln x+4x$. Une primitive de f est la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

A : $\dfrac{1}{x}+4$	B : $\dfrac{1}{x}+2x^2$	C : $\ln x+2x^2$	D : $x\ln x+2x^2-x$

4. On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Toutes les cartes ont la même probabilité d'être tirées. La probabilité de tirer une carte qui ne soit ni un roi ni un cœur est :

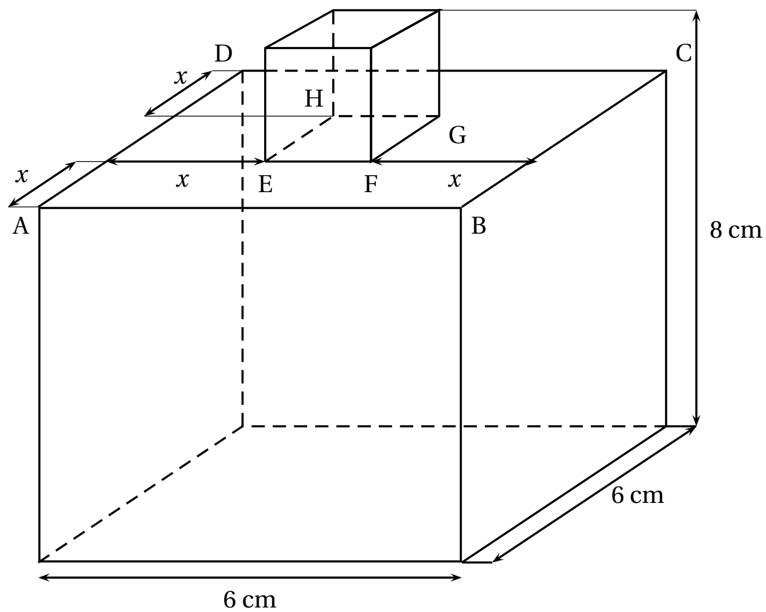
A : $\dfrac{35}{52}$	B : $\dfrac{17}{52}$	C : $\dfrac{9}{13}$	D : $\dfrac{2}{13}$

5. On donne la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + x$; l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ vaut :

A : $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} + 1$	B : $\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} + 1$	C : $3 - 2$

EXERCICE 2 **12 points**

Un graphiste designer a conçu un flacon pour un parfum. ll s'agit d'un parallélépipède rectangle de base carrée surmonté d'un cube, comme le montre la figure ci-dessous :



Le cube de base EFGH est placé au centre du carré supérieur ABCD. La variable x désigne la distance entre les côtés du carré de base EFGH du cube et les côtés du carré ABCD. Le flacon a une hauteur totale de 8 cm et les côtés du carré ABCL) mesurent 6 cm. On admettra que l'on a : $0 \leqslant x \leqslant 3$.

Partie A.

1. Démontrer que le volume du petit cube est $U(x) = -8x^3 + 72x^2 - 216x + 216$.
2. En déduire que le volume total du flacon est $V(x) = -8x^3 + 72x^2 - 144x + 288$.

Partie B.

1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,3]$ par $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 36$.
   Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentant la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   (unités graphiques : 5 cm en abscisses et 0,5 cm en ordonnées).
   a. f' désignant la dérivée de la fonction f, calculer $f'(x)$.
   b. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ dans l'intervalle $[\,0\,;\,3]$. On appelle α la valeur exacte de son unique solution. Déterminer α puis sa valeur arrondie au dixième.
   c. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[\,0\,;\,3]$ et dresser le tableau de variations de f sur $[\,0\,;\,3]$.
   d. Pour quelle valeur de x cette fonction admet-elle un minimum ?
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 1.

3. a. Recopier puis compléter le tableau de valeurs suivant en arrondissant les valeurs calculées au centième.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$							

b. Construire la tangente T et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur la feuille de papier millimétré.

Partie C.

1. Vérifier que le volume du flacon vérifie $V(x) = 8f(x)$.
2. À l'aide de la partie B de ce problème, déterminer la valeur en cm^3, arrondie à l'unité, du volume minimal $\mathrm{V_m}$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie électronique Antilles-Guyane juin 2007

EXERCICE 1 **4 points**

On rappelle que i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation d'inconnue z :
$$z^2 - 6z + 10 = 0.$$
2. Soit P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :
$$P(z) = z^3 - 12z^2 + 46z - 60.$$
   a. Calculer $P(6)$.
   b. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout complexe z, on ait $P(z) = (z-6)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. Le plan est rapporté à un repère orthonormat direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm ; soient A, B et C les points de ce plan d'affixes respectives $3 + \mathrm{i}$, $3 - \mathrm{i}$ et 6.
Placer les points A, B et C.
4. Démontrer que le quadrilatère OACB est un parallélogramme :
5. Comparer les longueurs OA et OB. En déduire la nature du parallélogramme OACB.

EXERCICE 2 **6 points**

Une personne a 5 jetons indiscernables au toucher dans sa poche : un jeton d'une valeur de 2 €, deux jetons d'une valeur de 1€ chacun et deux jetons d'une valeur de 0,50 € chacun.

Partie I

Cette personne choisit au hasard, *successivement et sans remise*, deux jetons dans sa poche. On s'intéresse à la somme S des valeurs des deux jetons choisis.

1. Construire un arbre ou un tableau décrivant cette expérience. En déduire les valeurs possibles de la somme S.
2. Soit A l'évènement : « la somme S est égale à 1,5 » et B l'évènement : « la somme S est égale à 1 ».
   a. Vérifier que la probabilité de l'évènement A est égale à $0,4$.
   b. Déterminer la probabilité de l'évènement B.
3. Déterminer la probabilité pour que la somme S soit supérieure ou égale à 2.

Partie II

Cette personne introduit les deux jetons choisis dans un appareil de stationnement. Le coût est de 0,50 € pour une heure de stationnement. Soit X la variable aléatoire qui à chaque choix de deux jetons associe la durée maximale dc stationnement autorisé, exprimée en heures.

1. Déterminer, en utilisant la partie I, la probabilité pour que X prenne la valeur 3.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

PROBLÈME **10 points**

Les parties II *et* III *peuvent être traitées indépendamment de la partie* I.

Partie I

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0)\ :\ y' = 2y$ où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.
2. Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = \mathrm{e}^x$ où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.
   a. Soit a un nombre réel et u la fonction définie pour tout réel x par $u(x) = a\mathrm{e}^x$.
   Déterminer a pour que la fonction u soit une solution de l'équation différentielle (E).
   b. Soit b un nombre réel. On admet que la fonction w définie pour tout réel x par $w(x) = b\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x$ est une solution de l'équation différentielle (E). Déterminer b pour que la fonction w vérifie $w(0) = 0$.

Partie II

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x.$$

On appelle f' la fonction dérivée de f et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 cm. On remarquera que, pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et étudier son signe.
   b. Calculer $f(-\ln 2)$. On détaillera les calculs.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer la droite T et la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie III

1. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.
2. Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. On considère la partie $\mathscr{D}$ du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.
   a. Hachurer la partie $\mathscr{D}$ sur le graphique.
   b. Déterminer l'aire de $\mathscr{D}$. On exprimera le résultat en centimètres carrés.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI La Réunion juin 2007
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 3z + 9 = 0.$$

2. On considère les points A et B du plan d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = \frac{3}{2} + \text{i}\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad z_{\text{B}} = \frac{3}{2} - \text{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

   a. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_{A} et z_{B}, puis les écrire sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$, où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

   b. Placer les points A et B dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   c. Justifier que les points A et B sont symétriques par rapport à l'axe $\left(\text{O} ; \vec{u}\right)$.

3. On considère la rotation R de centre O et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$ et M un point du plan d'affixe z.
On note M' le point d'affixe z' image du point M d'affixe z par cette rotation.

   a. Exprimer z' en fonction de z.

   b. Démontrer que le point B est l'image du point A par la rotation R.

4. On considère les points C et D du plan $\mathscr{P}$, d'affixes respectives $z_{\text{C}} = -3$ et $z_{\text{D}} = 4$.

   a. Placer les points C et D sur le graphique précédent.

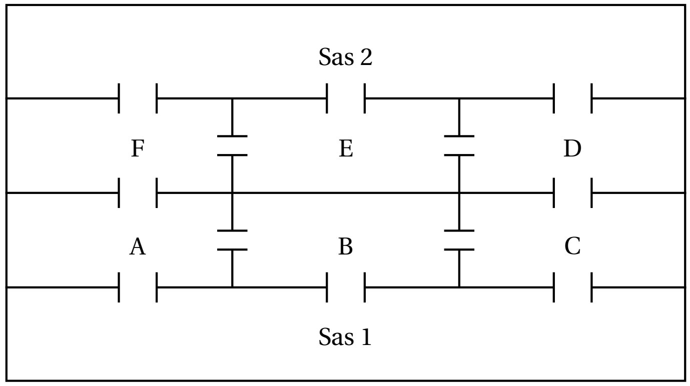
   b. Calculer les distances OD, DC et AB.

   c. On note I le milieu du segment [AH].
Calculer la distance IB et déduire la valeur exacte $\mathscr{A}_1$ de l'aire du triangle CBD.

   d. On note $\mathscr{A}_2$ l'aire du triangle AOD. Calculer la valeur du quotient $\dfrac{\mathscr{A}_1}{\mathscr{A}_1}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Un établissement est composé de deux sas, notés 1 et 2, et de six salles de travail, notées A, B, C, D, E et F. Les communications entre ces différentes salles se font par le moyen de 12 portes représentées par le schéma suivant :



On remarquera que les salles B et E ne communiquent pas directement.

- Un robot, rangé dans le sas 1, est programmé pour nettoyer exactement trois salles différentes parmi les salles A, B, C, D, E et F.
- Le robot commence toujours son parcours par l'une des salles A, B ou C.
- Dès que le robot entre dans une salle, il la nettoie systématiquement.
- Il lui est impossible de franchir la même porte plus d'une fois ou de nettoyer deux fois la même salle.
- Une fois les trois salles nettoyées, le robot ressort :
  - Soit par le sas 1,
  - Soit par le sas 2. Dans ce cas, il retourne plus tard dans le sas 1 par un couloir non représenté sur le schéma.

On appelle « trajet » une suite ordonnée de 3 salles constituant un parcours possible pour le robot.

Exemples :

- ABC et BCD sont des trajets.
- CBA et ABC sont deux trajets différents.
- ABE n'est pas un trajet (les salles B et E ne communiquent pas directement).
- DEF n'est pas un trajet (le robot ne peut pas commencer par la salle D).

1. Déterminer les six trajets possibles (on pourra s'aider d'un arbre).
Dans toute la suite, on admet que les six trajets obtenus sont équiprobables.

2. **a.** Calculer la probabilité p_1 de l'évènement « la salle E est la troisième salle nettoyée par le robot ».

b. Calculer la probabilité p_2 de l'évènement « le robot sort par le sas 2 ».

3. Le tableau suivant donne le temps de nettoyage du robot dans chacune des salles en minutes :

Salles	A	B	C	D	E	F
Temps de nettoyage du robot	20 min	24 min	30 min	14 min	22 min	14 min

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque trajet, associe le temps de nettoyage des 3 salles exprimé en minutes.

a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance E(X) de la variable aléatoire X. Que représente ce nombre ?

d. Calculer la probabilité p_3 de l'évènement « le robot effectue le nettoyage des 3 salles en moins de 60 minutes » ?

4. On appelle $\sigma(X)$ l'écart type de la variable aléatoire X.

a. Déterminer la valeur arrondie au centième de $\sigma(\mathrm{X})$

b. Le robot effectue un parcours par jour, 7 jours sur 7. Soit n un entier naturel non nul. On admet qu'il est acceptable d'utiliser le robot durant n jours d'affilée sans révision si le nombre :

$$n \times \mathrm{E}(\mathrm{X}) + 1,5 \times \sigma(\mathrm{X}) \times \sqrt{n}$$

est inférieur à 500 heures. Est-il acceptable de ne faire réviser le robot qu'une fois par an ?

PROBLÈME **10 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + x(1 + \ln x)$$

où ln désigne le logarithme népérien.

1. On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.
Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$g'(x) = 2 + \ln x.$$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
En déduire les variations de la fonction g sur cet intervalle.

3. Calculer la valeur exacte du minimum de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, puis en donner la valeur décimale arrondie au dixième.

4. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B : étude de la fonction f

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (x+1)\ln x$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan $\mathscr{P}$.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$?

b. Déterminer la limite de la fonction f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Montrer que, pour tout x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}$$

b. En utilisant le résultat obtenu dans la partie A, question 4, dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique, notée α, dans l'intervalle $[1\ ;2]$.
Donner la valeur décimale arrondie au dixième du nombre réel α.

5. Tracer dans le plan $\mathscr{P}$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\mathrm{e}]$.

Partie C : calcul d'une aire

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)(\ln x - 1) + \frac{x^2}{4}.$$

1. Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. **a.** Hachurer, sur le graphique obtenu dans la partie B, la partie $\mathscr{E}$ du plan, limitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

b. Déterminer la valeur exacte de l'aire de la partie $\mathscr{E}$ en cm^2.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie juin 2007
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.

On note i nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Pour tout nombre complexe z, on pose :

$$P(z) = z^3 + \left(2\sqrt{2} - 4\right) z^2 + \left(8 - 8\sqrt{2}\right) z + 16\sqrt{2}.$$

a. Calculer $P(-2\sqrt{2})$.

b. Déterminer une factorisation de $P(z)$ sous la forme :
$P(z) = \left(z + 2\sqrt{2}\right)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right)$ où α et β sont deux nombres réels que l'on déterminera.

c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $P(z) = 0$.

2. On note A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 2 + 2\text{i}$, $b = 2 - 2\text{i}$ et $c = -2\sqrt{2}$.

a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Démontrer que A, B, C sont sur un même cercle Γ de centre O, dont on donnera le rayon.

b. Déterminer un argument du nombre complexe a puis un argument du nombre complexe b.
En déduire une mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OB}},\ \overrightarrow{\text{OA}}\right)$.

c. Déterminer alors une mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{CB}},\ \overrightarrow{\text{CA}}\right)$..

d. Démontrer qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AC}},\ \overrightarrow{\text{AB}}\right)$ est $\dfrac{3\pi}{8}$.

e. En déduire l'égalité : $\tan\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) = 1 + \sqrt{2}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Pour former une pièce métallique à partir d'un profilé de 2 centimètres d'épaisseur, on utilise un marteau pilon.

Le marteau pilon frappe toutes les 6 secondes, et à chaque coup, l'épaisseur de métal diminue de 2 %.

On note u_n (n entier naturel) l'épaisseur en millimètres de la pièce après n frappes de marteau pilon.

On a donc $u_0 = 20$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats arrondis au centième de millimetre.

2. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique, et préciser sa raison.

3. Déterminer u_n en fonction de l'entier n.

4. Quelle est l'épaisseur, arrondie au centième de millimètre, de la pièce après 10 frappes ?

5. On considère que la pièce est terminée dès que son épaisseur est inférieure à 14 millimètres.
Quel est le temps minimal pour que la pièce soit terminée ?

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté au repère orthonorinal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. (L'unité graphique est 2 cm).
Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln(x)}{x}$$

puis de calculer une aire.

I. Étude d'une fonction auxiliaire *g*

On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 4 + 2\ln(x).$$

1. Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g. (On ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$.
3. Résolution de l'équation $g(x) = 0$.
   a. Démontrer que sur l'intervalle $[1\ ;\ 2]$ l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique α.
   b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de ce nombre α.
4. Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x, dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

II. Étude de la fonction *f*

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la limite de f en 0. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Etude en $+\infty$.
   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   c. Déterminer les coordonnées du point A commun à la courbe $\mathscr{C}$ et à la droite $\mathscr{D}$.
   d. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
3. Étude des variations de f.
   a. Déterminer la fonction dérivée f' de la-fonction f. Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, où g est la fonction étudiée dans la partie I.
   b. En utilisant les résultats de la partie I, dresser le tableau des variations de la fonction f
4. On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e^2. Montrer que $\mathscr{T}$ est parallèle à l'asymptote $\mathscr{D}$.
5. Dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. tracer la droite $\mathscr{D}$, la tangente $\mathscr{T}$ et la courbe $\mathscr{C}$ à l'aide de l'étude précédente. (On prendra $f(\alpha) \approx 1,25$.)

Ill. Calcul d'une aire

On définit sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction H par :

$$H(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln x - (\ln x)^2$$

.

1. Démontrer que H est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Soit la région du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.
   a. Hachurer la région sur votre figure.
   b. On note S l'aire, exprimée en unité d'aire, de la région S. Déterminer la valeur exacte de S.
   c. Donner la valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2.

∾ Baccalauréat STI Génie électronique Polynésie ∾ juin 2007

EXERCICE 1 **5 points**

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z on ait : $z^3 - 8 = (z-2)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   En déduire la résolution dans C de l'équation $z^3 - 8 = 0$.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité 2 cm), on considère les points A d'affixe $z_{\text{A}} = 2$, B d'affixe $z_{\text{B}} = -1 + \text{i}\sqrt{3}$ et C d'affixe $z_{\text{C}} = -1 - \text{i}\sqrt{3}$.
   a. Placer les points A, B et C
   b. Déterminer la nature du triangle ABC. Justifier la réponse.
3. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et on appelle A$'$, B$'$ et C$'$ les images respectives de A, B et C par R.
   a. Déterminer les formes exponentielles de z_{A}, z_{B}, et z_{C} puis de $z_{\text{A}'}$, $z_{\text{B}'}$, et $z_{\text{C}'}$.
   b. Placer A$'$, B" et C$'$ sur la figure précédente.
   c. Vérifier que $z_{\text{A}'}$, $z_{\text{B}'}$, et $z_{\text{C}'}$ sont solutions de l'équation $z^3 = 8\text{i}$.

Exercice 2 **4 points**

Partie A

En 1990, le chiffre d'affaires d'une entreprise A s'élevait à 230000 euros.
Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 15000 euros.

1. Calculer le chiffre d'affaires u_1 en 1991.
2. Soit u_n le chiffre d'affaires de l'année $1990 + n$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser le premier tenue u_0 et la raison a de cette suite.
3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise A.

Partie B

En 1990, le chiffre d'affaires dune entreprise B s'élevait à 1150000 euros.
Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 7,4 %.

1. Calculer le chiffre d'affaires v_1 en 1991.
2. Soit v_n le chiffre d'affaires de l'année $1990 + n$.
   Justifier que (v_n) est une suite géométrique de raison $1,074$.
3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de Fentreprise 13.

Partie C

1. Que constate-t-on en 2006 pour les entreprises A et B ?
2. En 2006, le chef de l'entreprise B affirme qu'à ce rythme son entreprise aura dans 15 ans, un chiffre d'affaires pratiquement double de celui de l'entreprise A. A-t-il raison ? Justifier.

Problème **11 points**

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 3x - 4 + 4\ln x.$$

1. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.
2. Soit g' la dérivée de g. Montrer que $g'(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 4}{x}$.
3. Dresser le tableau de variations de g sur $]0~;~+\infty[$.
4. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0~;~+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x + 3\ln(x) - \frac{4\ln(x)}{x}.$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité 3 cm).

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Déterminer la limite de f en 0 ; on remarquera que $f(x) = x + \left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x$.
   Que peut-on en déduire ?
2. **a.** Montrer que pour tout x strictement positif $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   b. En utilisant les résultats de la partie A, étudier les variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   c. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. On rappelle que pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f(x) = x + \left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x$.
   Donner les solutions dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$ de l'équation $f(x) = x$.
4. Tracer $(\mathcal{C})$ et la droite d'équation $y = x$.
5. Interpréter graphiquement le résultat de la question 3.

Partie C

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3x\ln x - 2(\ln x)^2$$

   est une primitive de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. On considère dans le plan le domaine $(\mathcal{D})$ délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

   a. Hachurer le domaine $(\mathcal{D})$.

   b. Calculer l'aire du domaine $(\mathcal{D})$ en unités d'aires puis en cm^2. On donnera la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au mm^2 près.