∾ Baccalauréat STI 2008 ∾

L'intégrale de septembre 2007 à juin 2008

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat STI Antilles–Guyane septembre 2007
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **6 points**

Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2 produisent le même type de pièces.

La machine M_1 fournit les $\frac{4}{5}$ de la production.

Parmi les pièces produites, certaines sont défectueuses. C'est le cas pour 5 % de celles produites par M_1 et 4 % de celles produites par M_2.

1. L'atelier produit 1 000 pièces par jour. Reproduire et compléter le tableau d'effectif suivant.

	Nombre de pièces produites par M_1	Nombre de pièces produites par M_2	Total
Nombre de pièces défectueuses	40	8	
Nombre de pièces non défectueuses			
Total			1 000

2. On choisit au hasard une pièce parmi la production totale de l'atelier d'un jour donné. Calculer la probabilité des évènements suivants
   a. A : « la pièce choisie est produite par M1 ».
   b. B : « la pièce choisie est défectueuse ».
   c. On sait que la pièce choisie a été produite par M_1. Quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas défectueuse ?
3. En sortie de chaîne de production chaque pièce coûte 38 € à l'atelier. Les pièces qui sont défectueuses doivent être réparées pour être mises sur le marché. La réparation coûte 4,30 € pour une pièce fabriquée par M_1 et 4,50 € pour une pièce fabriquée par M_2.
   Soit X la variable aléatoire qui à chaque pièce associe son coût de revient.
   a. Quelles sont les trois valeurs prises par X ?
   b. Donner la loi de probabilité de X.
   c. Calculer E(X), espérance mathématique de X.
   d. Quel doit être, au centime près, le prix minimal de vente d'une pièce pour que l'atelier ne vende pas à perte ?

EXERCICE 2 **4 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} - e^{x} - 6.$$

On note f' sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on a pour tout nombre réel x,
   $f'(x) = e^{x}(2e^{x} - 1)$.
   b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. **a.** Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   b. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$ (on pourra mettre en facteur le nombre e^{x} dans l'expression de $f(x)$).

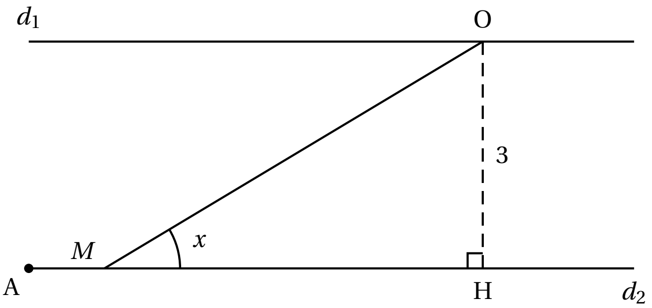
3. **a.** Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant les limites de f.
   b. Écrire le calcul qui montre que le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est égal à $\dfrac{-25}{4}$.
   c. D'après le tableau de variation de la fonction f, quel est le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_1) suivante :

$$(E_1) \quad : \quad f(x) = 0.$$

PROBLÈME **10 points**

On considère deux droites parallèles d_1 et d_2. Le point O appartient à la droite d_1 et le point A appartient la droite d_2 comme indiqué sur la figure ci-dessous. On note H le point d'intersection de la droite d_2 et de la perpendiculaire à la droite d_2 passant par le point O (on dit que le point H est le projeté orthogonal du point O sur la droite d_2). La distance OH vaut 3 (OH = 3).

On considère un point M, distinct du point H, sur la demi-droite [HA) d'origine H et on note x l'angle variable $\widehat{\text{H}M\text{O}}$.
Le nombre x appartient donc à l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.



Partie I : conjecture puis vérification

1. Selon vous, comment varie la longueur OM en fonction de l'angle x ? (aucune justification mathématique n'est demandée)
2. Calculer OM lorsque $x = \dfrac{\pi}{3}$.
3. Exprimer OM en fonction de x pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.
4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \dfrac{3}{\sin x}$.
   Vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \dfrac{-3\cos x}{\sin^2 x}$.
   Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations.
   (*On ne demande pas de préciser la limite en* 0.)
5. Recopier puis compléter le tableau de valeurs de la fonction f arrondies au dixième près.

x	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	1	$\dfrac{\pi}{2}$
$f(x)$				

6. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Prendre 2 cm pour unité graphique.

Partie II : Calcul d'un volume

On veut calculer la valeur exacte du volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses.

On rappelle que le volume V de ce solide, en unités de volume, est donné par la formule :

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer la dérivée de la fonction g définie sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin x}$.

   En déduire une primitive H sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ de la fonction h définie par

$$h(x) = [f(x)]^2.$$

2. Calculer la valeur exacte du volume V en cm^3, puis une valeur arrondie au mm^3.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Novembre 2007 Génie électronique, électrotechnique, optique Nouvelle-Calédonie

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthononnal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité 4 cm).

On considère les trois nombres complexes suivants :

$$z_1 = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{12}} \qquad ; \qquad z_2 = 1 - \text{i} \qquad ; \qquad z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Écrire z_2 sous forme exponentielle.
2. **a.** Écrire z_3 sous forme exponentielle

   b. En déduire que $z_3 = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. **a.** En remarquant que $z_1 = z_2 \times z_3$, donner l'écriture de z_1 sous forme algébrique,

   b. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
4. **a.** Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

   b. On désigne par I le point d'affixe 1.
   Placer le point I et préciser la nature du triangle OIB.
5. On désigne par R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   a. Quelles sont les images respectives des points I et B par R ?

   b. En déduire la nature du triangle OAC.

EXERCICE 2 **4 points**

Lors d'une fête, le comité d'organisation a prévu une animation qui consiste à lancer un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

La partie est organisée selon les règles suivantes :

On mise 3 euros puis on lance le dé ;

- pour la sortie du 6, on reçoit 10 euros ;
- pour la sortie du 5, on reçoit 4 euros ;
- pour la sortie du 4, on reçoit 1 euro ;
- dans les autres cas on ne reçoit rien.

On appelle gain algébrique d'une partie la différence entre la somme reçue et la mise initiale.

Partie A

1. On note X la variable aléatoire qui à l'issue d'une partie associe le gain algébrique.

   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

   b. Etablir la loi de probabilité de X.

   c. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$.

   d. Le comité d'organisation prévoit la réalisation de 150 parties réalisées lors de cette fête.
   Quelle bénéfice peut-il espérer tirer de ce jeu ?

2. Un joueur se présente, il dispose de 4 euros.
   Déterminer la probabilité P que ce joueur puisse jouer deux parties.

Partie B

Le comité d'organisation a décidé en dernière minute de rendre ce jeu équitable.
La règle du jeu reste identique, seule la mise est changée.
Déterminer cette nouvelle mise x qui rend le jeu équitable.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x - 2.$$

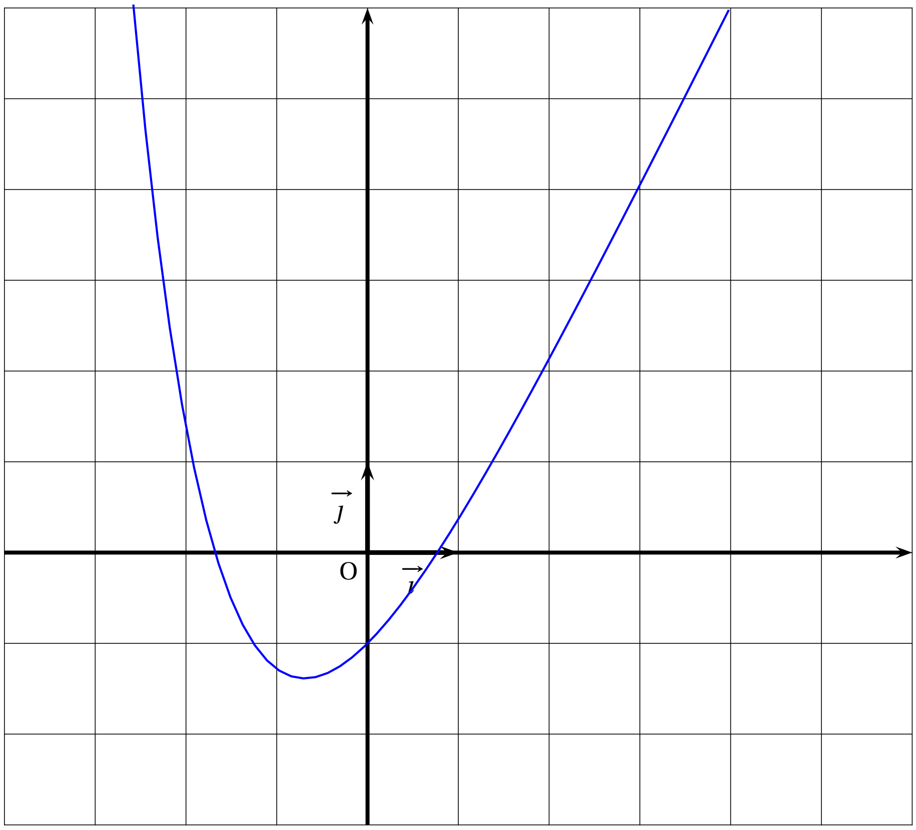
On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.
Cette courbe est donnée sur la feuille annexe.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x-2$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
2. **a.** Montrer que pour tout réel x on a l'égalité suivante :
   $$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1 + 2x\mathrm{e}^{x} - 2\mathrm{e}^{x}\right).$$
   b. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ (on utilisera le fait que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$).
3. Soit f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
   a. Détenniner $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{x} - 1}{\mathrm{e}^{x}}$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   b. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle$[0 ; 1]$.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} :
5. On considère le point A de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse $-\ln 3$.
   a. Calculer la valeur exacte de l'ordonnée du point A.
   b. On note (T)la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.
   Montrer que le coefficient directeur de la droite (T) vaut -1.
6. Sur le graphique donné (feuille annexe), tracer les droites (D) et(T).

Partie B

1. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$F(x) = -\mathrm{e}^{x} + x^2 - 2x$$
   est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $(\mathscr{E})$ le domaine du plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
   Hachurer le domaine $(\mathscr{E})$. Soit $(\mathscr{A})$ l'aire du domaine $(\mathscr{E})$ en unités d'aire, calculer la valeur exacte de $(\mathscr{A})$.
   Donner une valeur approchée de $(\mathscr{A})$ à 10^2 près.
3. Calculer la valeur moyenne μ de f sur $[1 ; 3]$. Interpréter graphiquement cette valeur.

Annexe à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Novembre 2007
Génie Mécanique - Génie Énergétique - Génie Civil
Nouvelle-Calédonie

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet. Une feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 3 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère le point A d'affixe $a = 2$ et le point B d'affixe $b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

1. On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)z + \left(2 + \sqrt{2}\right).$$

Déterminer les solutions de l'équation : $P(z) = 0$.

Dans la suite de l'exercice, on note C le point du plan d'affixe $c = \dfrac{2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$.

2. Étude du triangle AOB.
   - **a.** Placer les points A, B et C dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   - **b.** Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe b.
   - **c.** En déduire la nature du triangle AOB, ainsi que la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.
3. Étude du triangle AOC.
   - **a.** Démontrer que C est le milieu du segment [AB].
   - **b.** En déduire la nature du triangle AOC, ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{AOC}$
   - **c.** En déduire un argument du nombre complexe c.
4. Calcul de la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
   - **a.** Démontrer que : $|c| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.
   - **b.** Déduire des questions précédentes que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Une entreprise produit en série des objets qu'elle destine à la vente. Ces objets peuvent présenter deux types de défauts :

- le défaut S de nature esthétique ;
- le défaut F de fonctionnement.

Un objet est déclaré parfait s'il ne présente aucun des deux défauts.

1. On prélève un lot de 200 objets sur la production et on constate que :
   - le défaut S est observé sur 16 objets ;
   - le défaut F est observé sur 12 objets ;
   - 180 objets sont déclarés parfaits.

Recopier et compléter le tableau suivant :

	Avec le défaut F	Sans le défaut F	Total
Avec le défaut S			16
Sans le défaut S			
Total			200

On admet que la répartition des deux types de défauts, observée dans le lot de 200 objets prélevés, reflète celle de l'ensemble de la production. On admet également que tout objet produit est vendu. On sait en outre que le coût de fabrication d'un objet est de 200 €.

2. Dans cette question, le prix de vente de l'objet est fixé à 250 €.
Si l'objet présente le seul défaut S, l'entreprise accorde au client une réduction de 15 % du prix.
Si l'objet présente le seul défaut F, l'entreprise réalise les réparations, à ses frais, pour un coût de 45 €.
Si l'objet présente les deux défauts, l'entreprise réalise les réparations, à ses frais, pour un coût de 58 €.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard dans la production, associe le bénéfice algébrique, an ente, réalisé par l'entreprise à la vente de cet objet

- **a.** Justifier le fait que X prend les valeurs (exprimées en euro) : 50 ; 12,50 ; 5 et -8.
- **b.** Démontrer que la probabilité pour qu'un objet présente le seul défaut S est $0,04$.
- **c.** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X (On pourra représenter les résultats dans un tableau.)
- **d.** Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X. Que représente E(X) pour l'entreprise ?

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté au repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
(Unités graphiques : 3 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

I. Résolution d'une équation différentielle

On note (E) l'équation différentielle :

$$y' + y = 3\mathrm{e}^{-x} + x + 1$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle : $y' + y = 0$.
2. Vérifier que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 3x\mathrm{e}^{-x} + x$, est une solution de l'équation différentielle.
3. On admet que toute solution f de l'équation (E) est de la forme $f(x) = u(x) + C\mathrm{e}^{-x}$ où C est une constante réelle et u la fonction définie à la question 2.
Déterminer la solution f de l'équation (E) telle que : $f(0) = 2$.

II. Étude d'une fonction auxiliaire g

On note g la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}(-3x + 1) + 1.$$

1. Calculer la dérivée g' de la fonction g.

2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau de variations (On ne demande pas les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.)
3. Calculer $g\left(\dfrac{4}{3}\right)$ et en déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

III. Étude de la fonction *f* déterminée en I.

On rappelle que f est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(3x+2) + x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Étude des limites.
   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Déterminer lalimite de f en $-\infty$.
2. Étude des variations de f.
   a. Calculer la dérivée f' de la fonction f, et démontrer que, pour tout réel $x : f'(x) = g(x)$.
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. Démontrer que la'droite $\mathscr{D}$ d'équition $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$, et préciser la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$. (On notera A leur point d'intersection.)
4. Déterminer l'abscisse du point B de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente $\mathscr{T}$ est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.
5. Tracer, dans le repère $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{T}$. Placer les points A et B puis tracer la courbe $\mathscr{C}$.

IV. Calcul d'une aire

1. Démontrer que la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = -f(x) - 3\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{2} + x,$$

   est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, et l'axe des abscisses. (On donnera un résultat arrondi au mm^2.)

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI mars 2008 ∾
Génie électronique, électrotechnique, optique
Nouvelle-Calédonie

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique 2 cm).

Le nombre i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère la fonction f de $\mathbb{C}$dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \text{i}z + 2.$$

1. **a.** Calculer $f(2\text{i})$.

   b. Vérifier que $1 + \text{i}$ est solution de l'équation $f(z) = z$.
2. Placer dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives 2i et $1 + \text{i}$.
3. **a.** Calculer les distances OA, OB et AB.

   b. En déduire la nature du triangle OAB.
4. Dans cette question on pose $z = x + \text{i}y$, x et y désignant deux nombres réels.

   a. Justifier que $f(z) = 2 - y + \text{i}x$.

   b. Déterminer la valeur dey pour laquelle $f(z)$ est imaginaire pur.

   c. Que peut-on dire de $f(z)$ si $x = 0$?

   d. Existe-t-il un nombre complexe z dont la partie réelle est nulle et tel que $f(z)$ est imaginaire pur ?

EXERCICE 2 **5 points**

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$ où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle vérifiant :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3} \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3.$$

3. Montrer que pour tout x réel on a $f(x) = 2\cos\left(3x - \dfrac{2\pi}{3}\right)$.
4. **a.** Déterminer une primitive de f sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

   b. Calculer la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{9}\right]$.

PROBLÈME **11 points**

Partie A Étude de la fonction g.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

1. a. Calculer $g(0)$.

   b. Vérifier que $g(x) = \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{x+1}$, lorsque $x > 0$.
   En déduire la limite de g en $+\infty$.

2. Soit g' la fonction dérivée de g.

   a. Montrer que $g'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$ et étudier son signe sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

   b. En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

Partie B Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1} + \ln x.$$

1. En remarquant que $f(x) = g(x) + \ln x$, déterminer à l'aide de la partie A :

   a. la limite de f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

   b. la limite de f en $+\infty$.

   c. Déterminer, en le justifiant, le sens de variation de f et en déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

2. On admet qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie C Tracé.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et Γ celle de g dans le repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1. a. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$, en déduire les coordonnées du point d'intersection Ω des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.

   b. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de Γ.

2. Tracer les courbes $\mathscr{C}$ et Γ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et placer le point Ω.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie mécanique, civil France ∽ 17 juin 2008

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **5 points**

On considère les nombres. complexes

$$z_A = 4e^{i\frac{\pi}{6}},\ z_B = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z_C = -2+2i.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal.
Les parties I et II sont indépendantes

Partie I : Q. C. M.

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B, C ou D est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
On ne demande aucune justification
NOTATION : *chaque réponse juste rapporte* 0,5 *point ; une réponse fausse enlève* 0,25 *point.*
Une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Si le total des points est négatif, il est ramené à 0.

1. Le nombre complexe $Z_1 = z_A z_B$ est :

   Réponse A : un nombre réel positif
   Réponse B : un nombre réel négatif
   Réponse C : un nombre imaginaire pur
   Réponse D : l'affixe d'un point du plan complexe pris hors des axes

2. Le nombre complexe $Z_2 = z_A^6$ est :

   Réponse A : un nombre réel positif
   Réponse B : un nombre réel négatif
   Réponse C : un nombre imaginaire pur
   Réponse D : l'affixe d'un point du plan complexe pris hors des axes

3. Le nombre complexe conjugué de z_A est :

   Réponse A : $-4e^{i\frac{\pi}{6}}$
   Réponse B : $4e^{i\frac{7\pi}{6}}$
   Réponse C : $4e^{-i\frac{\pi}{6}}$
   Réponse D : $\frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

4. Le nombre complexe z_C peut se mettre sous la forme :

   Réponse A : $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
   Réponse B : $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
   Réponse C : $2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$
   Réponse D : $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Partie II

On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

1. Soit M un point du plan d'affixe z.
   a. Interpréter géométriquement $|z - z_A|$.
   b. Quel est l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie l'égalité : $|z - z_A| = |z - z_B|$.

   c. Vérifier que le point C appartient à l'ensemble $\mathscr{D}$.

2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.

3. Déduire des questions 1. et 2. la nature du triangle ABC.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ par

$$f(x) = \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + 1.$$

1. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

   b. En utilisant la relation $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$, montrer que, pour tout nombre réel x del'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$, $f'(x) = -\sin(x)[1+2\cos(x)]$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$, l'équation produit : $\sin(x)[1+2\cos(x)] = 0$.

3. **a.** En s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction dérivée f' donnée en annexe, dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

   b. Déduire des questions 2. et 3. a. le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$. Préciser les ordonnées des points dont l'abscisse x vérifie $f'(x) = 0$.

4. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ dans le repère de l'annexe (où f' est déjà représentée).

PROBLÈME **10 points**

On considère la fonction f, définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 4.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités : 2 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée).

Partie A : limites aux bornes de l'ensemble de définition

1. Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 4$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.

2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = (\mathrm{e}^{x} - 1)(\mathrm{e}^{x} - 4)$.

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Partie B : intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses

En utilisant la forme factorisée de $f(x)$ donnée dans la partie A. 2. a., déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.

Partie C : étude des variations de la fonction *f*

1. **a.** Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

2. Montrer en **détaillant vos calculs** que $f\left(\ln\frac{5}{2}\right) = -\frac{9}{4}$.

3. Déduire des questions précédentes le tableau de variations complet de la fonction f.

4. À l'aide du tableau de variations et du résultat acquis à la partie B, donner le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Tracer la droite $(\mathscr{D})$ puis la courbe $(\mathscr{C})$, pour x appartenant à l'intervalle $[-4\ ;\ 2]$, dans le repère défini en début de problème.

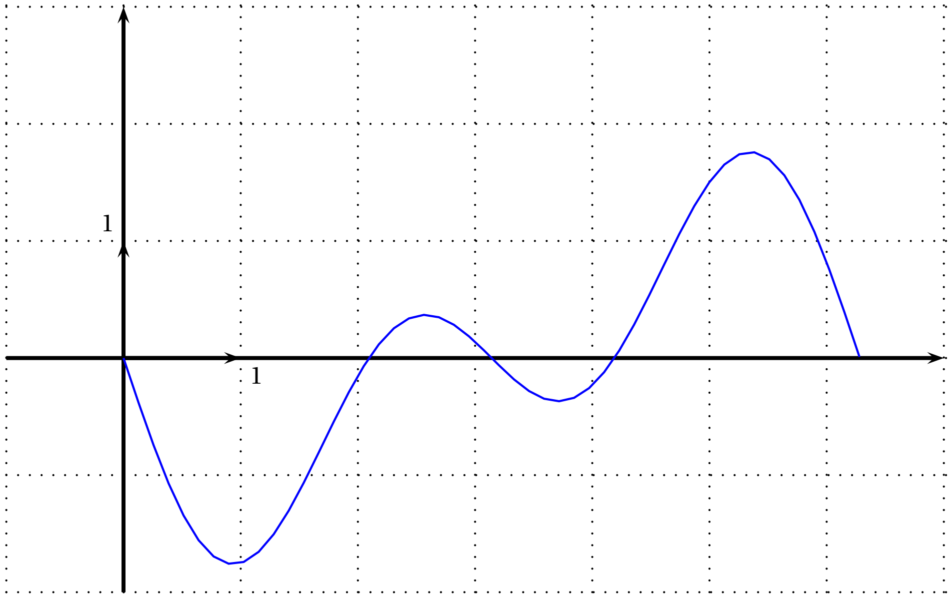
Partie D : calcul d'une aire

1. Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
2. a. Déterminer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 4$.
   b. Donner une valeur approchée au mm^2 près de cette aire.

ANNEXE à l'exercice 2

(à compléter et à rendre avec la copie)

La courbe préconstruite ci-dessous est la représentation graphique de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[0~;~2\pi]$.



Baccalauréat STI France 18 juin 2008
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2-2z+4=0$.
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 1-\text{i}\sqrt{3},\ \ z_{\text{B}} = 2 \ \text{ et } \ z_{\text{C}} = \overline{z_{\text{A}}}.$$

   a. Déterminer le module et un argument de z_{A}, de z_{B} et de z_{C}.

   b. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (on laissera apparents les traits de construction).

   c. Montrer que A, B et C sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3. Soit z_{D} le nombre complexe : $z_{\text{D}} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$.

   a. Placer le point D d'affixe z_{D} sur le graphique précédent.

   b. Calculer $z_{\text{D}} - z_{\text{A}}$ et $z_{\text{C}} - z_{\text{B}}$ sous forme algébrique. En déduire que ABCD est un trapèze.

   c. Calculer les distances AB et CD. Que peut-on en conclure pour le trapèze ABCD ?

EXERCICE 2 **5 points**

Onze chansons différentes sont enregistrées sur un CD. La durée de chacune d'elles étant inscrite sur la pochette du CD, on a le tableau suivant :

Numéro de la chanson	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Durée en secondes	200	185	150	200	185	215	230	215	200	230	300

Un lecteur de CD sélectionne *au hasard* une des onze chansons et une seule ; toutes les chansons ont la même probabilité d'être sélectionnées.
Les résultats seront donnés sous forme de fractions.

1. Quelle est la probabilité que la chanson n$^{\text{o}}$ 7 soit sélectionnée ?
2. **a.** Déterminer la probabilité de l'évènement A : « la chanson sélectionnée a une durée de 200 secondes ».

   b. Déterminer la probabilité de l'évènement B : « la chanson sélectionnée a une durée supérieure à 210 secondes ».

c. Soit $\overline{B}$ l'évènement contraire de B. Décrire $\overline{B}$ par une phrase, puis déterminer sa probabilité.

3. On note X la variable aléatoire qui à chaque chanson sélectionnée associe sa durée exprimée en secondes

a. Déterminer les différentes valeurs prises par X.

b. Établir sous forme d'un tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat.

PROBLÈME **10 points**

Partie A - Exploitation d'un graphique

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ est donnée sur la figure en annexe. On précise que la courbe $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses au seul point d'abscisse 0 et admet en ce point comme tangente la droite d tracée sur la figure en annexe.

Soit g' la fonction dérivée de g sur $\mathbb{R}$.

1. En prenant appui sur la représentation graphique donnée en annexe :

a. Indiquer à quel entier est égal $g(0)$.

b. Expliquer pourquoi $g'(0) = 2$.

c. Préciser sur quel intervalle la fonction g semble être positive.

2. On admet maintenant que $g(x) = ax + b + \mathrm{e}^x$ où a et b sont des réels que l'on va déterminer.

a. Déterminer b en utilisant la question **1. a.**.

b. Calculer $g'(x)$ en fonction de a puis déterminer a en utilisant la question **1. b.**.

c. En déduire que pour tout réel x,on a : $g(x) = x - 1 + \mathrm{e}^x$.

Partie B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'expression :

$$f(x) = x - 4 - x\mathrm{e}^{-x}.$$

Soit $\mathscr{C}_1$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Vérifier que, pour tout réel x non nul, on a $f(x) = x\left(1 - \dfrac{4}{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)$. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

2. a. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - 4$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_1$.

c. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_1$- par rapport à la droite L.

3. On note f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$, puis vérifier que : $f'(x) = g(x)\mathrm{e}^{-x}$, où g est la fonction obtenue dans la partie A (question 2. c.).

b. En utilisant la question 1. c. de la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. En prenant pour unité graphique 1 cm sur chaque axe, tracer sur une feuille de papier millimétré la courbe $\mathscr{C}_1$ et l'asymptote Δ dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie C - Calcul d'une aire

1. Soit h la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'expression :

$$h(x) = x\text{e}^{-x}$$

a. Soit H la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'expression :

$$H(x) = (x+1)\text{e}^{-x}.$$

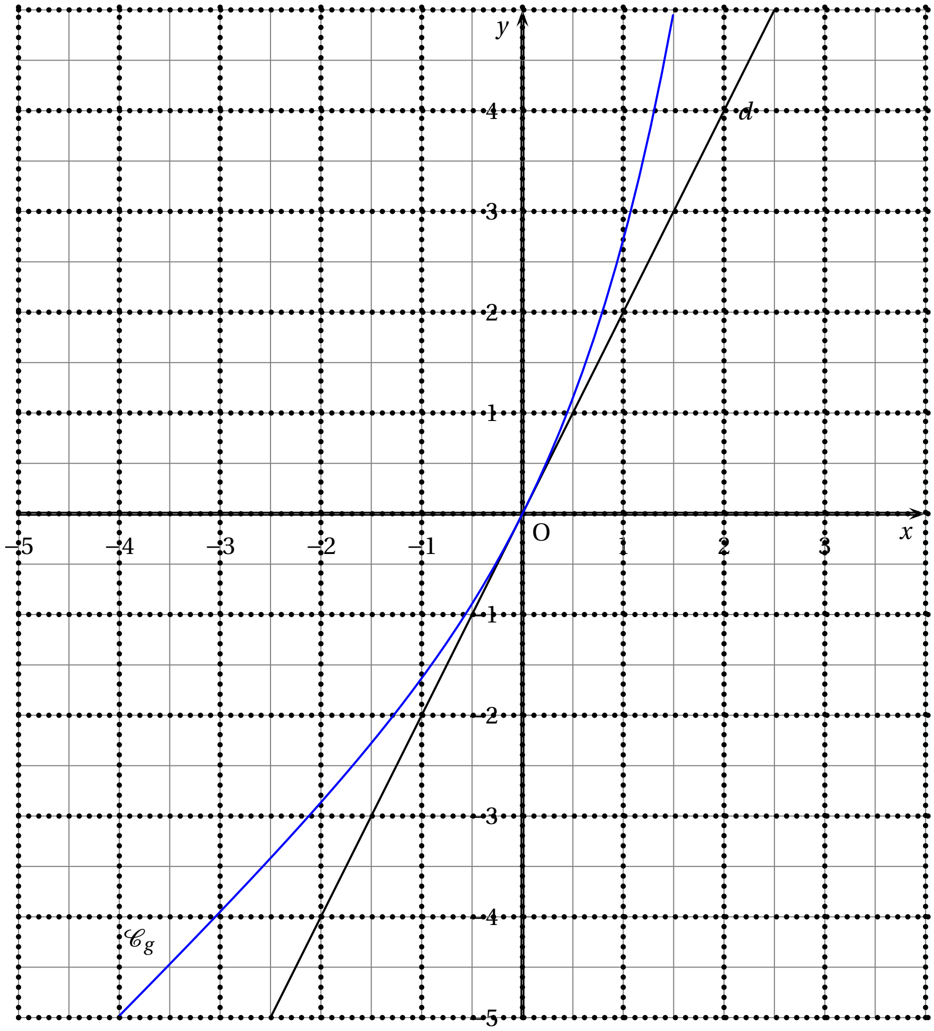
Montrer que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.

b. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie B.

2. **a.** Hachurer sur le graphique le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

b. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée. Donner la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en cm^2 puis sa valeur arrondie au centième.

ANNEXE



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie électronique ∾ génie électrotechnique, optique France 23 juin 2008

Le candidat est invité à faire figurer toute trace de recherche, même incomplète on non fructueuse, qu'il aura développée.
Deux feuilles de papier millimétré seront distribuées en même temps que le sujet.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + 6z\sqrt{3} + 36 = 0.$$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A = -3\sqrt{3} + 3i$ $\quad$ $z_B = -3\sqrt{3} - 3i$ $\quad$ et $z_C = -6\sqrt{3}$.
   a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A et z_B.
   b. Écrire le nombre complexe z_A sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.
   c. Placer les points A, B, C dans le plan muni du repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
3. a. Déterminer la nature du triangle ABC.
   b. En déduire que le quadrilatère OACB est un losange.
4. On appelle K le point du plan complexe d'ordonnée négative tel que le triangle OAK soit rectangle et isocèle en O.
On note z_K l'affixe du point K.
   a. Construire le point K sur la figure.
   b. Par quelle rotation de centre O, le point K est-il l'image du point A ?
   c. Écrire alors z_K, sous la forme $re^{i\theta}$ (où r est un nombre réel strictement positif et θ un réel compris entre $-\pi$ et π) puis sous forme algébrique.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y'' + 25y = 0$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation (E).
2. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont on note f' la fonction dérivée, vérifiant les trois conditions suivantes :

- f est solution de l'équation différentielle (E) ;
- la courbe représentative de f dans un repère du plan passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{6}\ ;\ -2\right)$;
- $f'(0) = -5$.

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x$.

3. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$.
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{6}\right]$.

PROBLÈME **11 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.

On s'intéresse dans ce problème à la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(X) = \frac{3}{\text{e}^{3x} + 1}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude de la fonction *f*

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   b. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

   c. Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout nombre réel x ; qu'en déduit-on sur la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote ?
2. On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 3$.

   a. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

   b. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite $\mathcal{D}$ comme asymptote.

   c. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = 3 - \frac{3\text{e}^{3x}}{\text{e}^{3x} + 1}$.

   d. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et dc la droite $\mathcal{D}$.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{-9\text{e}^{3x}}{\left(\text{e}^{3x} + 1\right)^2}$.

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations.
4. Déterminer une équation de la tangente Δ au point d'abscisse 0.
5. Dans le plan muni du repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ tracer les droites $\mathcal{D}$ et Δ ainsi que la courbe $\mathcal{C}$.

Partie B : Calcul de l'aire d'une partie du plan

1. **a.** On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$g(x) = \frac{3\text{e}^{3x}}{\text{e}^{3x} + 1}.$$

   Déterminer une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$. (On pourra remarquer que la fonction g est de la forme $\frac{u'}{u}$ où u est une fonction que l'on précisera).

b. En utilisant la question 2. c. de la partie A, déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit a un réel strictement positif.
On note $\mathscr{A}(a)$ la mesure, exprimée en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.

a. Exprimer $\mathscr{A}(a)$ à l'aide d'une intégrale.

b. Établir que $\mathscr{A}(a) = 3a - \ln\left(\text{e}^{3a} + 1\right) + \ln 2$.

c. En remarquant que $3a = \ln\left(\text{e}^{3a}\right)$, écrire $\mathscr{A}(a)$ sous la forme du logarithme népérien d'un quotient ; déterminer alors la limite de $\mathscr{A}(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.
Dans cette question particulièrement, toute trace de recherche, même incomplète, figurant sur la copie sera prise en compte dans l'évaluation.

Baccalauréat STI Arts appliqués – France
23 juin 2008

EXERCICE 1 **8 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Parmi les réponses proposées, une seule est correcte. On indiquera sur la copie, pour chaque question, la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Toutes les questions sont indépendantes. Chaque réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. A et B sont deux évènements. La probabilité de l'évènement A est 0,4. La probabilité de l'évènement B est 0,6. La probabilité de l'évènement A ∩ B est 0,2. La probabilité de l'évènement A ∪ B est :
   a. 0,8 **b.** 1 **c.** 1,2 **d.** 0,2
2. Une urne contient six boules : deux blanches notées B1, B2, trois jaunes notées J1, J2, J3, une verte notée V. On tire deux boules de l'urne simultanément. On pourra s'aider d'un tableau. La probabilité de l'évènement « les deux boules tirées ont la même couleur » est :
   a. $\dfrac{2}{30}$ **b.** $\dfrac{14}{36}$ **c.** $\dfrac{8}{30}$ **d.** $\dfrac{22}{30}$
3. Dans un repère orthonormé, on considère la courbe (C) d'équation : $25x^2 - 36y^2 - 900 = 0$.
   Cette courbe est :
   a. une ellipse **b.** un cercle **c.** une hyperbole **d.** une parabole
4. Dans un repère orthonormé, l'ellipse (E) a pour équation : $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.
   Un de ses foyers a pour coordonnées :
   a. $\left(2\sqrt{5}\,;\,0\right)$ **b.** $\left(0\,;\,2\sqrt{5}\right)$ **c.** $\left(0\,;\,2\sqrt{3}\right)$ **d.** $\left(2\sqrt{3}\,;\,0\right)$
5. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
   L'aire du domaine compris entre C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ est, en unités d'aire :
   a. 6 **b.** 10 **c.** 13 **d.** -6
6. La dérivée de la fonction f définie sur $\left]\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$ par : $f(x) = \ln(3x-1)$ est :
   a. $f'(x) = \dfrac{1}{3x-1}$ **b.** $f'(x) = 3$ **c.** $f'(x) = \dfrac{3}{3x-1}$ **d.** $f'(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}$
7. Une primitive de la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x}$ est :
   a. $F(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2}$ **b.** $F(x) = x^2 + \text{x} + \ln x$ **c.** $F(x) = 2 + \ln x$ **d.** $F(x) = 2$
8. La solution de l'équation : $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x = 5$ est :
   a. $2\ln 5$ **b.** $\ln 10$ **c.** 10 **d.** e^{10}

EXERCICE 2 **12 points**

Pour une entreprise de production d'énergies renouvelables, un graphiste conçoit un logo dont la construction apparaît dans le problème suivant.

Partie A
Soit la fonction f définie sur $[0 ; 2]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x + 1.$$

$\mathscr{C}$ désigne sa courbe représentative dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 1 cm.

1. **a.** Calculer la dérivée de la fonction f et étudier son signe sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

   b. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

2. Recopier et compléter le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à 10^{-1} près.

x	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$					

3. Construire la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f. Le point O sera placé au centre de la feuille de papier millimétré.

Partie B
Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par :

$$g(x) = -x^2 + 2x$$

et $\mathscr{C}'$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Calculer la dérivée de la fonction g et dresser le tableau de variations de g sur $[0 ; 2]$.
2. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}'$ en son point d'abscisse 2.
3. Construire T et $\mathscr{C}'$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie C
On appelle D le domaine compris entre $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
On admet que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout x de l'intervalle $[0 ; 2]$ et que l'aire du domaine D, en unités d'aire, est donnée par la formule : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^2 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.
Calculer la valeur exacte de cette aire en cm^2, puis la valeur arrondie à 10^{-1} près.

Partie D

1. Dessiner le domaine D_1, symétrique de D par rapport à O.
   Colorier le domaine réunion de D_1 et D.
2. Dessiner le domaine D_2, obtenu par rotation de centre O et d'angle 90° du domaine colorié précédemment.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI La Réunion juin 2008
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **6 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4z\sqrt{3} + 16 = 0.$$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 2\sqrt{3} + 2\text{i} \quad z_{\text{B}} = 2\sqrt{3} - 2\text{i} \;\text{ et }\; z_{\text{C}} = 4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}.$$

   a. Donner la forme algébrique du nombre complexe z_{C}.

   b. Determiner le module et un argument de chacun des nombres complexes z_{A}, z_{B} et z_{C}.

   c. En déduire que les points A, B et C appartiennent à un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

   d. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

   e. Démontrer que le triangle ABC est un triangle isocèle.

3. On considère la rotation r de centre C) qui transforme A en B.

   a. Vérifier que $\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}} = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$. En déduire l'angle θ de la rotation r.

   b. Préciser alors la nature du triangle OAB.

   c. Établir que le point C est l'image du point B par la rotation r.

   d. Préciser la nature du quadrilatère OABC.

EXERCICE 2 **4 points**

Un hôtel de vacances propose deux types de bungalow (bungalow avec kitchenette ou bungalow sans kitchenette) à louer à la semaine.
Pour les clients qui le souhaitent, l'hôtel propose deux formules de restauration au choix :

- Formule A : petit déjeuner seul,
- Formule B : petit déjeuner et diner.

Pour chaque semaine de location, chaque client décide s'il prend une formule de restauration et si oui, choisit entre les formules A et B.
Le gestionnaire de l'hôtel a constaté que sur 100 clients

- 44 clients ne prennent aucune formule de restauration.
- 60 clients optent pour un bungalow avec kitchenette et parmi ceux-ci, 10 % choisissent la formule B et 20 % la formule A.
- 35 % des clients ayant choisi un bungalow sans kitchenette prennent la formule A.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre de clients ayant choisi :	Bungalow avec kitchenette	Bungalow sans kitchenette	Total
Formule A			
Formule B	6		
Aucune formule de restauration		2	
Total			100

2. On interroge un client au hasard, au sujet de ses choix,
   a. Déterminer la probabilité de l'évènement E : « Le client a choisi la formule B ».
   b. Déterminer la probabilité de l'évènement F : « Le client a loué un bungalow sans kitchenette ».
   c. Déterminer la probabilité de l'évènement G : « Le client a loué un bungalow sans kitchenette ou a choisi la formule B ».
   d. Déterminer la probabilité de l'évènement H : « Le client a choisi une formule de restauration ».
3. La location d'un bungalow sans kitchenette à la semaine coûte 415 ? et celle d'un bungalow avec kitchenette 520 €. La formule A coûte 49 € à la semaine. La formule B coûte 154 € à la semaine.
   On appelle X la variable aléatoire qui à chacun des 6 choix possibles, associe le coût correspondant pour une semaine.
   a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
   b. Démontrer que la probabilité de l'évènement « X prend la valeur 520 » est égale à $0,42$.
   c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   d. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.
   e. Pour la prochaine saison, le gérant de l'hôtel pense qu'il louera dans les mêmes conditions 16 bungalows pendant 20 semaines. Quelle recette peut-il alors espérer ?

PROBLÈME **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
La représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ainsi qu'une droite $\mathcal{T}$ sont tracées dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan sur la feuille figurant en annexe.

- La courbe 't passe par les points de coordonnées (-1 ; 2) et (0 ; 4).
- La droite parallèle à l'axe des abscisses, est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Partie A : étude graphique et détermination d'une fonction

1. Donner, les valeurs des nombres réels $f(0)$ et $f(-1)$.
2. Sachant que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en exactement deux points A_0 et A_1 d'abscisses respectives x_0 et x_1 avec $x_0 < x_1$, préciser à l'aide du graphique le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.
3. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Déterminer graphiquement $f'(0)$.

b. Déterminer par lecture graphique le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x appartenant à l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$.

4. On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x, on ait :

$$f(x) = (x+a)\mathrm{e}^{-x} + bx^2 + 3.$$

En utilisant les résultats trouvés à la question 1, déterminer les nombres réels a et b.

Partie B : étude de la fonction f sans utilisation du graphique

On admet maintenant que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x} - x^2 + 3.$$

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

2. En remarquant que $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} - x^2 + 3$, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

3. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = -x\left(\mathrm{e}^{-x} + 2\right)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du réel x et dresser le tableau de variation de f.

4. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\ ;\ 2]$.
Cette solution est l'abscisse x_1 du point A_1 définie dans la partie A question 2.

b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du nombre réel x_1.

Partie C : calcul d'une aire

1. **a.** On considère les fonctions g et G définies sur $\mathbb{R}$ par

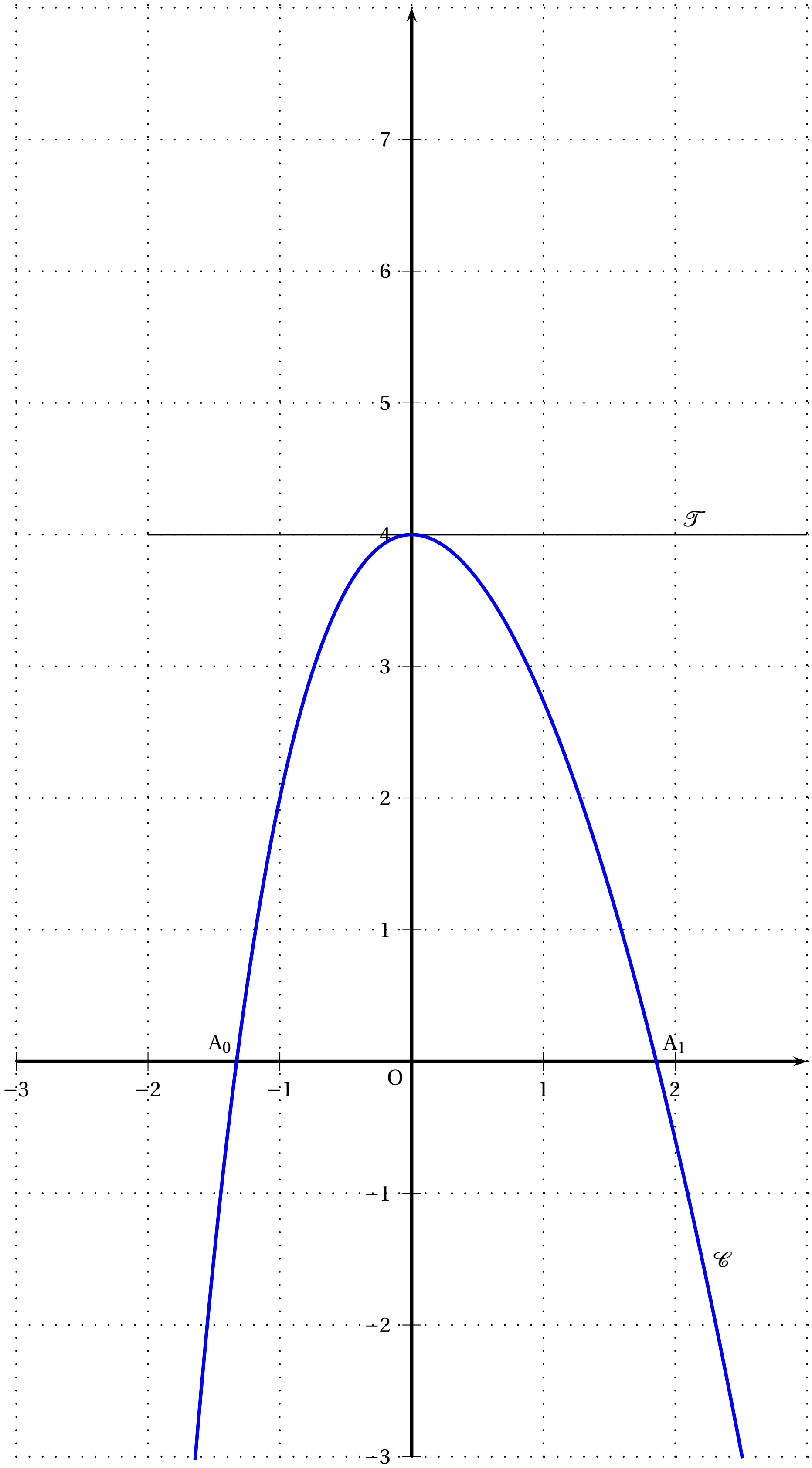
$$g(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad G(x) = (-x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

Démontrer que la fonction G est une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On désigne par $\mathcal{P}$ la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.
On appelle $\mathcal{A}$ la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire de la partie $\mathcal{P}$. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis en donner la valeur décimale arrondie au centième.

Feuille annexe



Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie juin 2008
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **4 points**

Un jeu est organisé de la manière suivante : le joueur mise 3 €, puis fait tourner une roue partagée en 6 secteurs circulaires. Lorsque la roue s'immobilise, un repère situé devant la roue indique le secteur circulaire désigné. On suppose que la roue est lancée suffisamment vite pour que la position du repère corresponde à un tirage aléatoire ; la probabilité que le repère indique un secteur donné est donc proportionnelle à l'angle au centre de ce secteur.

Sur chacun des secteurs circulaires est affichée une somme que le joueur reçoit :

- le secteur 1 mesure 150° et indique la somme 0 € : le joueur ne reçoit rien ;
- lesecteur 2 mesure 100°et affiche 3 € ;
- lesecteur 3 mesure 50° et affiche 4 € ;
- le sécteur 4 mesure 35° et affiche 6 € ;
- lesecteur 5 mesure 15°et affiche 10 € ? ;
- le secteur 6, qui et le dernier, mesure 10° et affiche 15 €.

On appelle « gain » du joueur la somme, positive ou négative, que le joueur obtient après le lancer de la roue : cette somme prend en compte la mise de 3 €. Ainsi, par exemple le gain correspondant au secteur 5 est égal à 7 €.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain du joueur. Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Déterminer la loi dc probabilité de la variable X.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un gain d'au moins 3 € ?
3. **a.** Calculer l'espérance mathématique de la variable X.

   b. Le jeu est-il équitable ?
4. Dans cette question, les cinq premiers secteurs sont inchangés, mais le sixième affiche une somme de a € où a est un nombre réel positif. On note encore X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain du joueur.

   a. Calculer l'espérance mathématique de la variable X en fonction du réel a.

   b. Déterminer la valeur de a pour que cette espérance soit nulle.

EXERCICE 2 **4 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

L'unité graphique est 1 cm ; on construira une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.

1. On note A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}},\quad b = 5 - 3\text{i} \quad\text{et}\quad c = 11 + 4\text{i}.$$

   a. Écrire le nombre complexe a sous forme algébrique.

   b. Placer les points A, B et C sur la figure.

2. Démonter que le triangle ABC est isocèle.

3. Soit z un nombre complexe quelconque et M le point du plan d'affixe z.

   a. Donner une interprétation géométrique des nombres $|z-a|$ et $|z-b|$.

   b. Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que l'on ait
   $|z-a| = |z-b|$.
   Tracer cet ensemble Δ sur la figure,

   c. On note D le point d'affixe $d = 6+\text{i}$. Les points C et D appartiennent-ils à l'ensemble Δ ?

4. Démontrer que le triangle ABD est rectangle.

5. On considère le point H tel que ADBH soit un carré. Déterminer l'affixe h de ce point H.

PROBLÈME **12 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x} - \ln x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$; la courbe $\mathscr{C}$ est donnée en annexe.

Partie A - Étude de la fonction boldmath f

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On rappelle le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.

   a. En remarquant que $f(x) = \dfrac{2x-1-x\ln x}{x}$ déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

   b. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ et en donner une équation.

3. **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$ on a : $f'(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$.

   b. Déterminer le tableau des variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$. Indiquer la valeur de l'extremum.

4. **a.** Démontrer que, sur l'intervalle $[0{,}1~;~10]$, la fonction f s'annule pour deux valeurs exactement. On note x_1 et x_2 ces deux valeurs, avec $x_1 < x_2$.

   b. Placer x_1 et x_2 sur l'axe $\left(\text{O}~;~\vec{\imath}\right)$ représenté sur la feuille annexe, et donner les valeurs approchées arrondies au centième de ces deux nombres.

Partie B - Étude d'une tangente

On désigne par $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 2.

1. Démontrer qu'une équation de la droite $\mathscr{T}$ est : $y - 3x + 2 - \ln 2$.

2. On considère la fonction h définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$h(x) = f(x) - \left(-\frac{1}{4}x + 2 - \ln 2\right).$$

   a. Calculer $h'(x)$ et vérifier que pour tout x de $]0~;~+\infty[$, on a : $h'(x) = \dfrac{(x-2)^2}{4x^2}$.

   b. En déduire le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

c. Calculer $h(2)$ et en déduire le signe de la fonction h sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente $\mathscr{T}$.
4. Tracer la droite $\mathscr{T}$ sur la feuille annexe en tenant compte du résultat obtenu dans la question précédente.

Partie C Calcul d'une aire

1. On note G la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

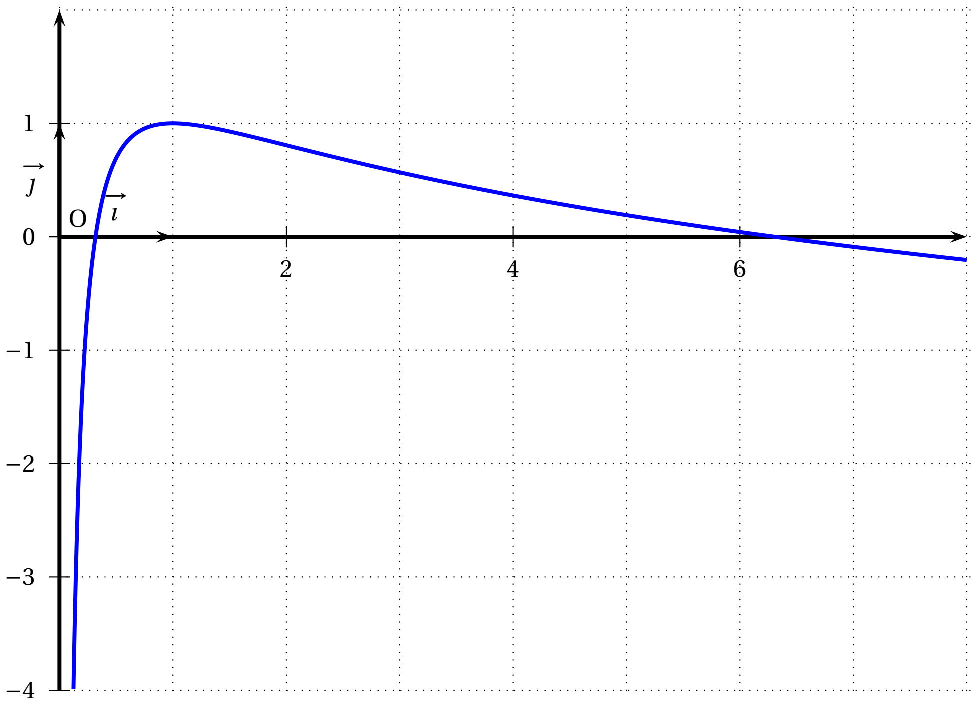
$$G(x) = x - x\ln x.$$

Calculer $G'(x)$.

2. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$
3. On considère la partie du plan comprise entre les droites d'équation $x = 1$ et $x = 6$ d'une part, entre l'axe horizontal et la courbe $\mathscr{C}$ d'autre part. On note $\mathscr{A}$ l'aire de cette partie de plan, exprimée en unités d'aire.
   - **a.** Hachurer cette partie de plan sur la feuille annexe,
   - **b.** Donner la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$, puis sa valeur arrondie au centième.

Annexe : tracé de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans le repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

Cette feuille est à compléter au fil des questions et à rendre avec la copie



∽ Baccalauréat STI Génie électronique Polynésie ∼ juin 2008

EXERCICE 1 6 points Le plan complexe est muni du repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z

$$z^2 + 2z + 2 = 0.$$

2. Soient A et C deux points du plan complexe, d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = -1 + \text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{C}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)\text{i}.$$

   a. Déterminer le module de z_{A} et le module de z_{C}.

   b. Donner un argument de z_{A}.

3. **a.** On pose $Z = \dfrac{z_{\text{C}}}{z_{\text{A}}}$. Démontrer que $Z = \dfrac{1 - \text{i}\sqrt{3}}{2}$.

   b. Démontrer que $Z = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

   c. En déduire que le point C est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ (en radian).

4. Placer le point A puis construire le point C en utilisant le résultat de la question précédente. Décrire la construction.
   Toute rédaction, même partielle, sera prise en compte dans l'évaluation.

5. Soit B l'image du point O par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{CA}}$.
   Construire le point B et démontrer que OCAB est un losange.

EXERCICE 2 **4 points**

Un professeur d'une classe de terminale S. T. I. donne à ses élèves trois questions dans une interrogation écrite et propose deux réponses par question : l'une juste et l'autre fausse.

On désigne par J une réponse juste et par F une réponse fausse.
On suppose que les élèves répondent à chaque question en indiquant soit la réponse juste, soit la réponse fausse. À chaque élève, on associe le résultat de son interrogation, sous la forme d'un triplet constitué des réponses données aux trois questions.
Par exemple, si un élève a répondu juste à la première, faux à la deuxième et à la troisième, on lui associera le résultat (J, F, F).

I Déterminer à l'aide d'un arbre l'ensemble des résultats possibles. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

II On considère un élève qui répond au hasard à chaque question et de façon indépendante pour chacune d'elles. Le professeur fait l'hypothèse d'équiprobrabilité des résultats.

1. Démontrer que la probabilité de l'évènement A « le résultat contient exactement une réponse juste » est égale à $\frac{3}{8}$.
2. Determiner la probabilité de l'évènement B « le résultat contient au moins une réponse juste. »
3. Dans cette question, le professeur note les copies de la manière suivante : il donne 1 point pour une réponse juste et 0 point pour une réponse fausse.
   On appelle X la variable aléatoire qui à chaque résultat associe la note obtenue par l'élève.
   a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
   b. Donner la loi de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$ de X.
4. Dans cette question, le professeur note les copies de la manière suivante : il donne 1 point pour une réponse juste et enlève 0,25 point pour une réponse fausse.
   Si le total des points ainsi obtenu est négatif, la note attribuée est 0.

   On appelle Y la variable aléatoire qui à chaque résultat associe la note obtenue par l'élève. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(Y)$ de Y.

PROBLÈME **10 points**

PARTIE A - Étude de la représentation graphique d'une fonction *f*

On donne sur la feuille annexe, à rendre avec la copie, la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f, définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Le plan est muni du repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 1,5 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\ln 2$.

La droite d'équation $y = 6$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente de coefficient directeur -2 au point $\text{A}(0\,;\,3)$.

Par lecture graphique et en utilisant les informations ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

1. Quelles sont les valeurs $f(\ln 2)$ et $f(0)$?
2. Déterminer, en le justifiant, $f'(\ln 2)$ et $f'(0)$.
3. Quelle est la limite de f en $-\infty$?

PARTIE B - Étude de la fonction *f*

On admettra maintenant que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^{2x} - 4\text{e}^{x} + 6$$

et on se propose dans cette partie de retrouver par le calcul les résultats obtenus graphiquement dans la partie A.

1. Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x) = \left(\text{e}^{x} - 2\right)^2 + 2$.
2. Calculer $f(\ln 2)$.
3. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Quelle propriété de la courbe $\mathscr{C}_f$, présentée dans la partie A est ainsi confirmée ?
4. Déterminer la limité de f en $+\infty$ en utilisant l'expresion de $f(x)$ donnée en **B. 1**.

5. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et vérifier que pour tout nombre réel x,
$$f'(x) = 2\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 2\right).$$
   b. Résoudre, sur $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.
   c. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) > 0$.
6. En déduire sur $\mathbb{R}$ le tableau de signes de $f'(x)$ puis les variations de la fonction f.
   Dresser le tableau de variations de la fonction f. Indiquer la valeur exacte de $f(\ln 2)$ et les limites trouvées en **B. 3. a.** et **B. 4.**
7. Montrer que l'équation $f(x) = 7$ admuet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. Donner, en le justifiant, un encadrement de α à 10^{-1} près.

PARTIE C Calcul d'une aire

1. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 6x$$
   est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Hachurer sur la feuille annexe la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
3. Soit $\mathscr{A}$ l'aire en cm^2 de la partie hachurée précédemment. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis en donner une valeur arrondie au centième.

ANNEXE RENDRE AVEC LA COPIE