Baccalauréat STI 2009

L'intégrale de septembre 2008 à juin 2009

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

☙ Baccalauréat STI Arts appliqués – France ❧
19 juin 2009

EXERCICE **8 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Parmi les réponses proposées, une seule est correcte. Recopier pour chaque question le numéro de question suivi de la proposition qui vous semble exacte. Aucune justification n'est demandée. Toutes les questions sont indépendantes.
Chaque bonne réponse rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte aucun point.

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x+1}$ alors :

a. $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$ **b.** $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$ **c.** $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$

2. Une autre écriture de $\text{e}^{-\ln(2)}$ est :

a. 2 **b.** -2 **c.** $\dfrac{1}{2}$

3. Sur l'ensemble $]1\,;\,+\infty[$, l'équation $\ln(x-1) = 1$ admet comme solution :

a. 1 **b.** $1+\text{e}$ **c.** $\text{e}-1$

4. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère la conique C d'équation
$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$; alors :

a. C n'a pas de foyer ;
b. C a pour foyers les points $\text{F}_1\left(\sqrt{5}\,;\,0\right)$ et $\text{F}_2\left(-\sqrt{5}\,;\,0\right)$;
c. C a pour foyers les points $\text{F}_1\left(\sqrt{3}\,;\,0\right)$ et $\text{F}_2\left(-\sqrt{3}\,;\,0\right)$.

5. Soient A et B deux évènement associés à une expérience aléatoire. Pour tout évènement X, on note $p(X)$ sa probabilité.
On suppose que : $p(A) = 0,25$, $p(B) = 0,6$ et $p(A \cup B) = 0,7$, alors $p(A \cap B)$ est égal à :

a. $0,35$ **b.** $0,85$ **c.** $0,15$

6. Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On considère les points $\text{E}(0\,;\,-1)$ et $\text{F}\left(3\sqrt{5}\,;\,1\right)$.
La distance EF est égale à :

a. $3\sqrt{5}$ **b.** 7 **c.** $\sqrt{7}$

7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{e}^{2x}+1$. Une primitive F de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $F(x) = \text{e}^{2x} + x$ **b.** $F(x) = 2\text{e}^{2x}$ **c.** $F(x) = \dfrac{1}{2}\text{e}^{2x} + x - 3$

8. Le plan est rapporté à un repère orthonormal ; on considère la conique C_1 d'équation
$5x^2 - y^2 - 25 = 0$ et la droite D_1 d'équation $y = x$.
La conique C_1 et la droite D_1 :

a. n'ont pas de point d'intersection

b. ont deux points d'intersection de coordonnées $\left(\frac{5}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\right)$ et $\left(-\frac{5}{2}\ ;\ -\frac{5}{2}\right)$.

c. ont deux points d'intersection de coordonnées $\left(\sqrt{5}\ ;\ 0\right)$ et $\left(-\sqrt{5}\ ;\ 0\right)$.

PROBLÈME **12 points**

Le but de ce problème est de calculer la surface d'un pendentif en forme de tulipe.
Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On choisit pour unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I = [0 ; 3] par :

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 2x + 3.$$

La courbe représentative de f dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est notée $\mathscr{C}_f$ et donnée en annexe.
Ce graphique sera complété au fur et à mesure du problème.

1. Par lecture graphique, donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle I.
2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale K= $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I = [0 ; 3] par

$$g(x) = (3 - x)\mathrm{e}^x.$$

On appelle $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que pour tout x de l'intervalle I, on, a $g'(x) = (2 - x)\mathrm{e}^x$ où g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.
2. Étudier le signe de g' et dresser le tableau de variations de la fonction g.
   a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs de la fonction g (arrondir les valeurs au dixième).

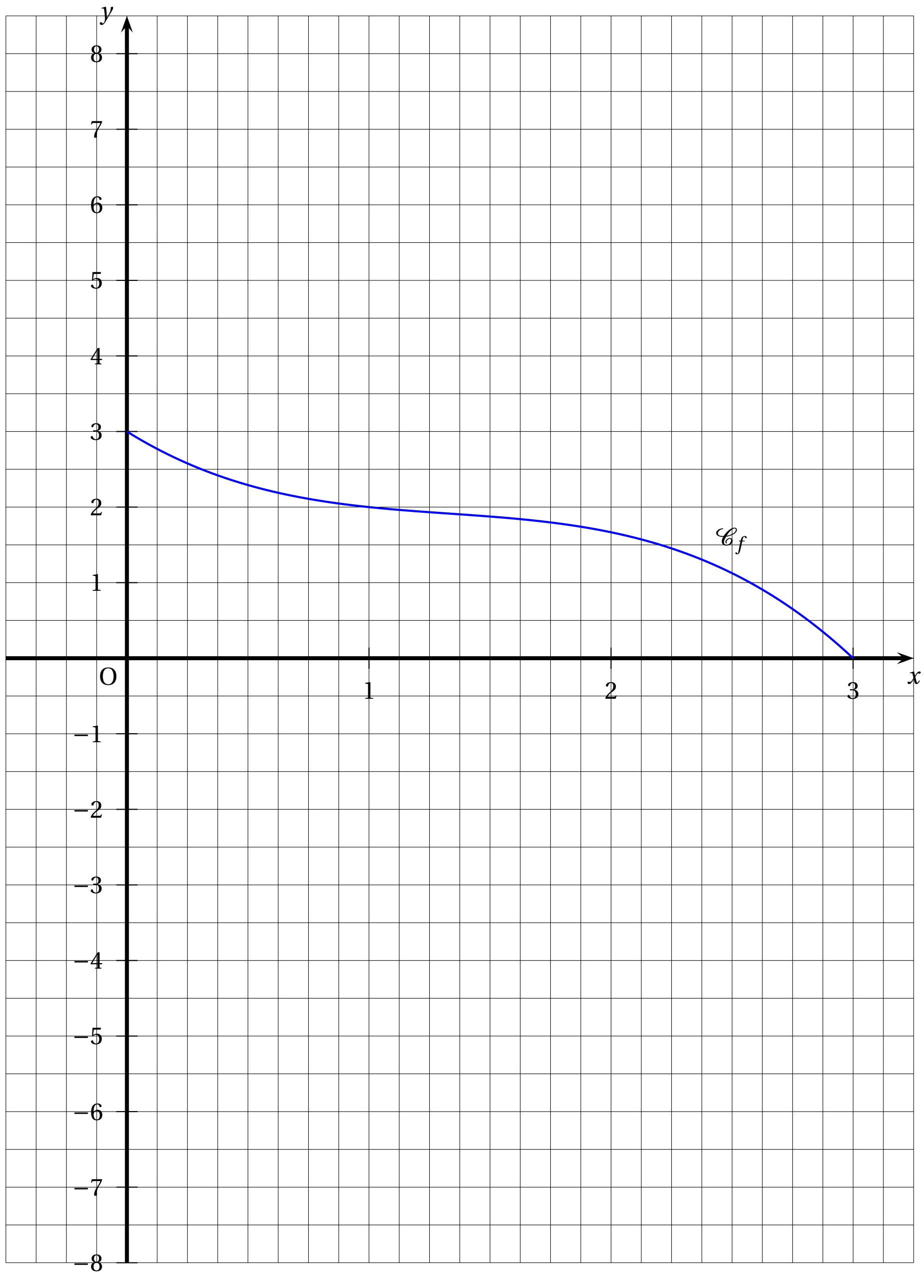
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$g(x)$			5,4	6,7			

   b. Compléter le graphique de la feuille annexe en traçant la courbe $\mathscr{C}_g$.
3. **a.** Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = (4 - x)\mathrm{e}^x$ est une primitive de la fonction g.
   b. Donner la valeur exacte de l'intégrale J= $\displaystyle\int_0^3 g(x)\mathrm{d}x$.

Partie C

1. Hachurer P_1 la portion de plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et$\mathscr{C}_g$.
2. Construire les courbes Γ_f et Γ_g symétriques de $\mathscr{C}_f$ et$\mathscr{C}_g$ par rapport à l'axe des abscisses.
3. Hachurer P_2 la portion de plan comprise entre Γ_f et Γ_g.
4. En utilisant les résultats de la question A. 2. et de la question B. 4. b., exprimer en unités d'aire l'aire du motif représenté par les portions de plan P_1 et P_2.
   En déduire une valeur exacte de l'aire en cm^2 puis la valeur arrondie au cm^2.

ANNEXE à rendre avec la copie



∽ Baccalauréat STI Arts appliqués – Antilles-Guyane ∾ juin 2009

EXERCICE 1 **8 points**

Parmi les 90 élèves de la section STI Arts appliqués d'un lycée :

- 90 % aiment dessiner
- 80 % aiment réaliser des maquettes
- Parmi ceux qui n'aiment pas dessiner les 2/3 aiment réaliser des maquettes

1. Recopier et compléter le tableau des effectifs suivant :

	Aiment dessiner	N'aiment pas dessiner	Total
Aiment réaliser des maquettes			
N'aiment pas réaliser des maquettes			
Total			90

Dans tout l'exercice, donner les probabilités sous forme de fraction irréductible puis en donnr l'arrondi à 10^{-3}.

2. Parmi les 90 élèves de la section on choisit un élève au hasard.
On note D l'évènement : « l'élève choisi aime dessiner ».
On note M l'évènement : « l'élève choisi aime réaliser des maquettes ».

a. Exprimer à l'aide d'une phrase chacun des évènements $D \cap M$, $\overline{D}$ et $\overline{D} \cap \overline{M}$.

b. Déterminer la probabilité de chacun de ces trois évènements.

3. Parmi les élèves qui aiment dessiner, on choisit un élève au hasard, quelle est la probabilité que cet élève aime réaliser des maquettes ?

4. On choisit un élève au hasard, quelle est la probabilité qu'il aime dessiner ou réaliser des maquettes ?

PROBLÈME **12 points**

1. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par

$$f(x) = 4x + 1 - \mathrm{e}^{x}.$$

a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; 2]$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ;\ 2]$.

c. Déterminer $f(0)$, $f(\ln(4))$ et $f(2)$ (valeurs exactes puis valeurs arrondies à $1O^{-3}$).

d. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par

$$g(x) = \ln(2x + 1).$$

a. On note g' la fonction dérivée de la fonction g. Déterminer l'expression de $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;2]$.

b. Démontrer que $g'(x) > 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\ 2]$.

c. Déterminer $g(0)$ et $g(2)$, on donnera les valeurs exactes puis les valeurs arrondies à 10^{-3}.

d. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l' intervalle $[0\,;\ 2]$.

3. Le plan est muni d'un repère orthononnal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 5 cm.

L'origine de ce repère sera placée dans le coin en bas à gauche de la feuille millimétrée.

Tracer sur le même dessin les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g.

4. a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\ 2]$.

En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\text{I} = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\text{d}x$.

b. Vérifier que la fonction G définie par $G(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)\ln(2x+1) - x$ est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\ 2]$.

En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\text{J} = \displaystyle\int_0^2 g(x)\,\text{d}x$.

c. On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.
Donner en unités d'aires la valeur exacte de l'aire de la portion de plan délimitée par les deux courbes tracées et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$, puis en donner la valeur en cm^2 arrondie à 10^{-2}.

Baccalauréat STI Arts appliqués – Métropolee septembre 2008

EXERCICE 1 **8 points**

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm, on considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des points $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

1. L'ensemble $\mathcal{C}$ est-il :

   Une parabole ? Une hyperbole ? Une ellipse ?

2. On appelles S et S′ les deux sommets de $\mathcal{C}$, S ayant une abscisse positive. Déterminer les coordonnées de S et S′.
3. On appelle F et F′ les deux foyers de $\mathcal{C}$, F ayant une abscisse positive. Déterminer les coordonnées de F et F′.
4. Parmi les relations suivantes, quelle est celle que vérifient les points M de $\mathcal{C}$?

   $M\text{F}+M\text{F}' = 6$ $|M\text{F} - M\text{F}'| = 8$ $|M\text{F} - M\text{F}'| = 10$

5. Déterminer les coordonnées des points C_1 et C_2 de $\mathcal{C}$ d'abscisse 7.
6. Sur une feuille de papier millimétré, placer le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les sommets S et S′ ainsi que les foyers F et F′ ; placer aussi les points trouvés à la question précédente. Tracer enfin la courbe $\mathcal{C}$ (on pourra s'aider d'une symétrie).

EXERCICE 2 **12 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^x - 2x$$

et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. On note f' la dérivée de la fonction f
   a. Calculer $f'(x)$.
   b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) > 0$, puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de f quand x tend vers $-\infty$.
3. Soit Δ la droite d'équation $y = -2x$.
   a. Exprimer $[f(x) - (-2x)]$ en fonction de x.
   b. Déterminer la limite de $[f(x) - (-2x)]$ quand x tend vers $-\infty$.
   c. En déduire l'existence d'une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$.
4. Vérifier que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x\left(\dfrac{\text{e}^x}{x} - 2\right)$. En déduire la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
5. Construire le tableau de variations de la fonction f
6. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.

7. Recopier et compléter le tableau suivant (les valeurs seront arrondies au centième) :

x	-3	-2	-1	0	0,7	1	2	2,5
$f(x)$								

8. Dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, tracer la droite Δ, la tangente T puis la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f.

9. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ (on donnera la valeur exacte).

10. **a.** Hachurer la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 1$ et la courbe $\mathscr{C}$.

b. Déduire de la question 9 la valeur exacte, en cm^2, de l'aire de cette partie puis en donner une valeur arrondie au centième.

∽ Baccalauréat STI Arts appliqués – Antilles–Guyane ∾ septembre 2008

EXERCICE 1 **8 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Parmi les réponses proposées, une seule est correcte. On indiquera seulement sur la copie, pour chaque question, la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Toutes les questions sont indépendantes.
Chaque réponse exacte rapporte un point. Les réponses fausses ne sont pas pénalisées.

1. La solution de l'équation : $2\ln x = 3$ est :

   a. $2\text{e}^{\frac{3}{2}}$ **b.** $\text{e}^{\frac{3}{2}}$ **c.** $\ln\dfrac{3}{2}$ **d.** $2\ln 3$

2. On lance deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6. On fait la somme des numéros sortis. La probabilité d'obtenir une somme égale à 5 est :

   a. $\dfrac{5}{36}$ **b.** $\dfrac{1}{9}$ **c.** $\dfrac{1}{6}$ **d.** $\dfrac{1}{11}$

3. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 6x + 1$. L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 2 est :

   a. $y = 6x - 7$ **b.** $y = 6x + 5$ **c.** $y = 18x - 31$ **d.** $y = 18x + 31$

4. L'ensemble des solutions de l'inéquation : $\text{e}^x \geqslant 2$ est :

   a. $]0~;~+\infty[$ **b.** $]0~;~\ln 2[$ **c.** $[\ln 2~;~+\infty[$ **d.** $]-\infty~;~\text{e}^2[$

5. Dans une classe de 24 élèves, 12 font de l'escalade, 9 font de la natation et 5 pratiquent les deux activités. On rencontre au hasard un élève de cette classe, la probabilité qu'il pratique au moins l'une de ces deux activités est :

   a. $\dfrac{11}{24}$ **b.** $0,6$ **c.** $0,875$ **d.** $\dfrac{2}{3}$

6. Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan, on considère les points F(3 ; 0) et F$'(-3~;~0)$. On considère l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M du plan tels que $M\text{F} + M\text{F}' = 10$.

   Affirmation 1 : la courbe $\mathscr{C}$ est

   a. une parabole **b.** une ellipse **c.** une hyperbole **d.** un cercle

   Affirmation 2 : le point M est un sommet de la courbe $\mathscr{C}$

   a. le point $M(4~;~0)$ **b.** le point $M(2~;~0)$ **c.** le point $M(5~;~0)$ **d.** le point $M(0~;~5)$

   Affirmation 3 : une équation cartésienne de la courbe $\mathscr{C}$ est

   a. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ **b.** $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1$ **c.** $16x^2 + 25y^2 = 400$ **d.** $25x^2 - 16y^2 = 400$

EXERCICE 2 **12 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle : $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln x + \ln(x+1)$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.

Partie A :

1. **a.** Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Quelle interprétation graphique peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

   b. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   Montrer que $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x(x+1)}$.

3. **a.** Étudier, pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, le signe de $f'(x)$.

   b. En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

4. Recopier et compléter le tableau suivant (les valeurs de $f(x)$ seront arrondies à 10^{-1} près.)

x	0,1	0,3	0,5	1	2	4	6	8	10	12
$f(x)$				0,7						

Partie B

1. **a.** Résoudre dans $]0~;~+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. (On vérifiera que $f(x)$ s'écrit sous la forme $f(x) = \ln[x(x+1)]$ et on donnera la valeur exacte de la solution puis la valeur arrondie à 10^{-1} près).

   b. Interpréter graphiquement cette réponse.

   c. Montrer que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.

2. **a.** Montrer que la fonction F définie sur $]0~;~+\infty[$ par $F(x) = x\ln x + (x+1)\ln(x+1) - 2x$ est une primitive de f sur l'intervalle.

   b. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ exprimée en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 12$.

   On donnera d'abord la valeur exacte, puis la valeur arrondie au cm^2.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Polynésie juin 2009 ∾
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
Le nombre i désigne le nombre complexe de module 1 d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation, d'inconnue z :

$$z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0.$$

2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = \sqrt{2} + \text{i}\sqrt{2}$ et $z_{\text{B}} = \overline{z_{\text{A}}}$.
   a. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_{A} et z_{B}.
   b. Construire le cercle de centre O et de rayon 4 cm, puis placer les points A et B dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ précisé ci-dessus.
3. On désigne par R la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que $z' = \text{i}z$.
   a. Indiquer la nature de la transformation R et préciser ses éléments caractéristiques.
   b. Le point C est l'image du point A par la transformation R.
   Déterminer la forme algébrique de l'affixe z_{C} du point C. Placer ce point C dans le repère précédent.
   c. Montrer que le point C est le symétrique du point B par rapport au point O.

   Dans cette question, toute rédaction, même partielle, sera prise en compte dans l'évaluation.
4. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **4 points**

Un sac contient 4 boules indiscernables au toucher : une jaune, une rouge, une verte et une noire notées respectivement : J, R, V et N.

Dans une fête foraine, un jeu est organisé de la manière suivante :
On tire au hasard une première boule du sac ; on note sa couleur et on la remet dans le sac. On effectue ensuite un deuxième tirage au hasard, indépendant du premier, dont on note également la couleur.
Ces tirages sont équiprobables.

On appelle résultat un couple dont le premier élément est la couleur de la boule obtenue au premier tirage et le second élément est celle de la boule obtenue au second tirage.
Exemple : Le résultat du tirage de la boule rouge suivie de la boule verte se note (R ; V).

1. Déterminer l'ensemble des résultats possibles.

2. Calculer la probabilité du résultat (N ; N).

3. Pour jouer, on doit miser 20 euros.

Une boule jaune rapporte 20 euros, une boule rouge 12 euros, une boule verte 5 euros et une boule noire ne rapporte rien.

On appelle X la variable aléatoire qui à chaque résultat associe le bénéfice ou la perte réalisé par le joueur, un bénéfice étant compté positivement et une perte négativement.

Exemple

Le résultat (R ; V) rapporte au joueur 17 euros. Il perd dans ce cas 20 - 17 = 3 euros. La valeur de X correspondant à ce cas est donc -3.

a. Montrer que pour le résultat (J ; R), la variable aléatoire X prend la valeur 12.

b. Indiquer dans un tableau les résultats obtenus dans la question 1 en y mentionnant les valeurs prises par la variable aléatoire X.

c. Montrer que la probabilité que X prenne la valeur 12 est égale à $\dfrac{1}{8}$.

d. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

e. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 4.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 4 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées).

PARTIE A : Étude de la fonction f

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote D dont on précisera une équation.

b. Montrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 5\right) + 4$. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. a. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Pour tout nombre réel x, calculer $f'(x)$.

Montrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 5\right)$.

b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels l'équation $2\mathrm{e}^{x} - 5 = 0$.

Résoudre ensuite dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2\mathrm{e}^{x} - 5 > 0$.

c. En déduire les variations de la fonction f. Indiquer la valeur exacte de $f\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)$.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur l'intervalle $[1 ; 2]$. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

4. a. Montrer que le point O appartient à la courbe $\mathscr{C}$.

b. Déterminer le coefficient directeur de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point O.

5. Tracer dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ l'asymptote D la droite Δ et, sur l'intervalle $[-2,5 ; 2]$, la courbe $\mathscr{C}$.

PARTIE B : Calcul d'aire

1. Quel est le signe de la fonction f sur l'intervalle $\left[\ln \dfrac{1}{2}~;~0\right]$?
2. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $\mathcal{D}$ le domaine du plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite d'équation $x = \ln \dfrac{1}{2}$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
   a. Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique précédent.
   b. Calculer l'aire exacte du domaine $\mathcal{D}$ en cm^2, puis donner une valeur approchée au centième de cette aire.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Métropole 23 juin 2009 ∾
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Soit A le point d'affixe $z_A = 1 + i\sqrt{3}$.

a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_A.

b. Écrire le nombre complexe z_A sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

c. Placer le point A dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ en prenant comme unité graphique 2 cm.

2. Soit B l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On appelle z_B l'affixe du point B.

a. Déterminer l'écriture du nombre complexe z_B sous la forme $re^{i\theta}$ (où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π).

b. Écrire le nombre complexe z_B sous forme algébrique.

c. Placer le point B dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

3. Montrer que le triangle AOB est équilatéral.

4. Soit C le point d'affixe $z_C = z_A e^{i\frac{\pi}{4}}$.

a. Par quelle transformation géométrique le point C est-il l'image du point A ? Préciser les éléments caractéristiques de cette transformation.

b. Placer le point C dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

c. Écrire le nombre complexe z_C sous forme trigonométrique.

d. Établir que $z_C = z_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

En déduire l'écriture du nombre complexe z_C sous forme algébrique.

e. Déduiree des resultats précédents les valeurs exactes cos $\frac{7\pi}{12}$ et de sin $\frac{7\pi}{12}$.

EXERCICE 2 **5 points**

On propose à un candidat au baccalauréat un exercice qui comporte trois questions auxquelles il doit répondre par vrai ou faux.

Une bonne réponse rapporte 2 points, une mauvaise réponse enlève 1 point, l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

On appelle :

- A l'évènement : « le candidat n'a pas répondu à la question » ;
- B l'évènement : « le candidat a donné la bonne réponse à la question » ;

- C l'évènement : « le candidat a donné la mauvaise réponse à la question ».

Si, par exemple, le candidat a donné les bonnes réponses aux questions 1 et 2, et la mauvaise réponse à la question 3, le résultat obtenu se note (B, B, C).

Un candidat qui ne sait répondre à aucune question hésite entre deux stratégies :
- soit il répond au hasard aux trois questions ;
- soit il décide de ne pas répondre à une question, par exemple la première, et répond au hasard aux deux autres questions.

I. Première stratégie : le candidat choisit de ne pas laisser de questions sans réponse.
Il répond donc au hasard et de façon équiprobable aux trois questions.

1. Combien de triplets différents peut-on obtenir ? (On pourra utiliser un arbre.)
2. Calculer la probabilité que le candidat n'ait fait aucune faute. .
3. Montrer que la probabilité que le candidat ait fait une faute et une seule, est égale à $0,375$.
4. On note X la variable aléatoire qui à chaque triplet associe la note obtenue à l'exercice.
   a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

II. Deuxième stratégie : le candidat choisit de ne pas répondre à la première question, et répond au hasard et de façon équiprobable aux deux autres questions.

1. Combien de triplets différents peut-on obtenir ?
2. On note Y la variable aléatoire qui à chaque triplet associe la note obtenue à l'exercice.
   a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y.
   b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.
   c. Calculer l'espérance mathématique E(Y) de la variable aléatoire Y.

III. Comparaison des stratégies : parmi les deux stratégies, quelle est la plus favorable au candidat ?

PROBLÈME **10 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On s'intéresse dans ce problème à une fonction f définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2\text{e}^x + 2x + 3.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   Les limites ne sont pas demandées.
2. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2 ; -1]$.
   b. Donner l'arrondi au dixième de α.
   c. En déduire, selon les valeurs du nombre réel x, le signe de $g(x)$.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2\mathrm{e}^x + x^2 + 3x.$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

3. Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2 + 3x$.

  a. Déterminer la limite de $f(x) - \left(x^2 + 3x\right)$ quand x tend vers $-\infty$.

  b. Que peut-on en déduire graphiquement ?

  c. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la parabole $\mathscr{P}$.

4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

  a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x.

  b. En utilisant la question 2. c. de la partie A, dresser le tableau de variations de la fonction f.

  c. Donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près.

5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

6. Sur la feuille annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la parabole $\mathscr{P}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, en prenant comme unité graphique 2 cm.

Tracer sur cette feuille annexe la tangente T et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : Calcul d'aire

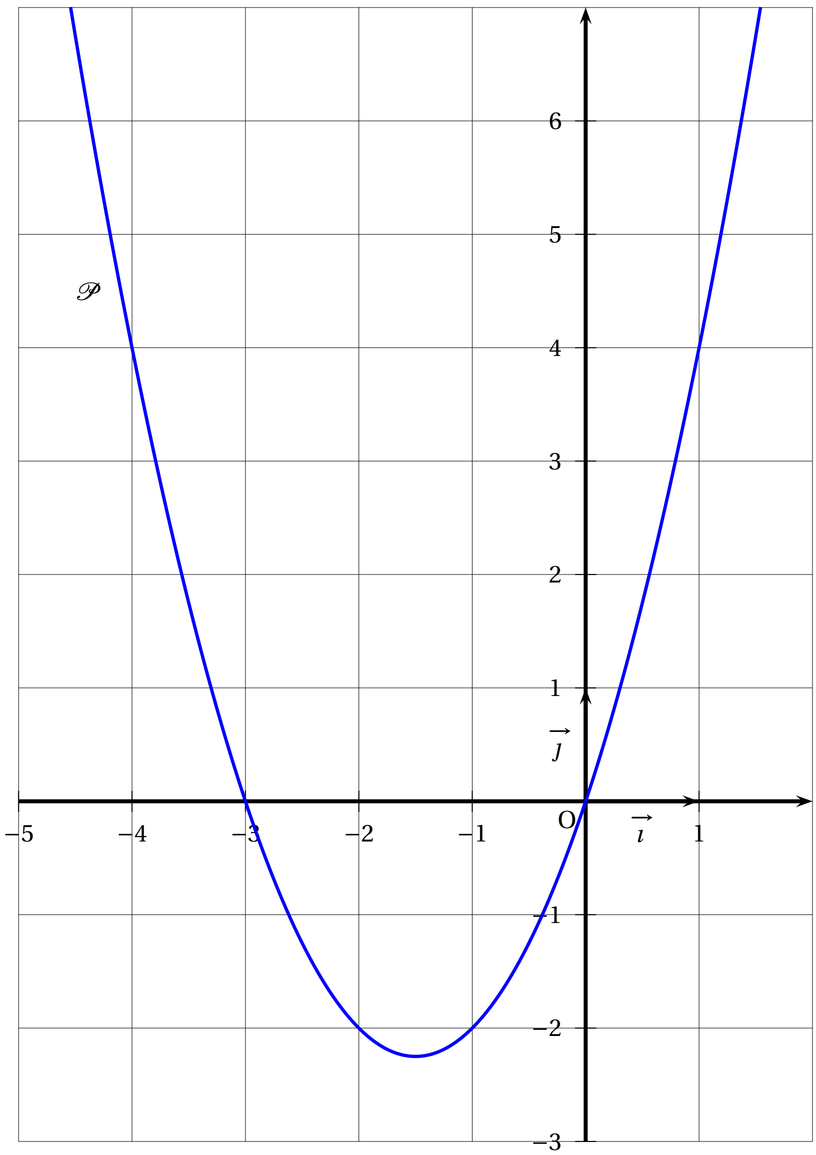
1. Hachurer sur la feuille annexe la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$.

2. **a.** Calculer la mesure exacte, en unités d'aire, de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan hachurée précédemment.

  b. En déduire, en cm^2, la mesure arrondie au centième de l'aire $\mathscr{A}$.

ANNEXE

Cette feuille est à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Antilles–Guyane juin 2009
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **4 points**

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère le polynôme P de la variable complexe z défini de la façon suivante :

$$P(z) = 9z^3 - 21z^2 + 17z - 5.$$

1. Calculer $P(1)$.
2. Déterminer les réels $a,\ b$ et c tels que $P(z) = (z-1)\left(az^2 + bz + c\right)$.
3. Résoudre dans l'ensemble des complexes l'équation : $P(z) = 0$.
4. On munit le plan d'un repère direct orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 6 cm.
   Soient A, B et C les points d'affixes respectives :
   $$z_{\mathrm{A}} = 1,\ z_{\mathrm{B}} = \frac{1}{3}(2+\mathrm{i}) \text{ et } z_{\mathrm{C}} = \frac{1}{3}(2-\mathrm{i}).$$
   a. Placer les points A, B et C (on utilisera une des feuilles de papier millimétré fournies).
   b. Calculer les modules suivants : $|z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}|$, $|z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}|$ et $|z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}|$; en déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.
5. Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC.
   a. Déterminer l'affixe du centre Ω de $\mathscr{C}$ et son rayon r en cm.
   b. Placer Ω et tracer le cercle $\mathscr{C}$ sur la figure.

EXERCICE 2 **5 points**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A - Effet de réponses au hasard à un exercice de type vrai/faux.

On imagine un exercice vrai/faux à quatre questions dont la règle de notation serait la suivante : chaque réponse correcte rapporte un point. Chaque réponse incorrecte fait perdre un demi-point. Un total négatif pour ce vrai/faux est ramené à zéro.

On suppose qu'un élève répond au hasard à chacune des quatre questions par « vrai » ou « faux » et qu'il ne laisse aucune question sans réponse.

1. Indiquer dans un tableau tous les totaux de points possibles en fonction du nombre de réponses correctes fournies.
2. Compléter l'arbre des choix de la feuille annexe avec les mots « correct » et « incorrect », puis indiquer, dans la dernière colonne, le nombre de points obtenus pour chacune des 16 éventualités.

3. On suppose que chacune des 16 éventualités a la même probabilité d'être obtenue. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque éventualité, associe le nombre de points correspondant.

 a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

 b. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de X.

 c. Calculer $\mathrm{E}(X)$, l'espérance mathématique de X.

Partie B - Un exercice de type vrai-faux.

Cette partie B est un exercice de type vrai/faux qui doit être traité effectivement par le candidat.

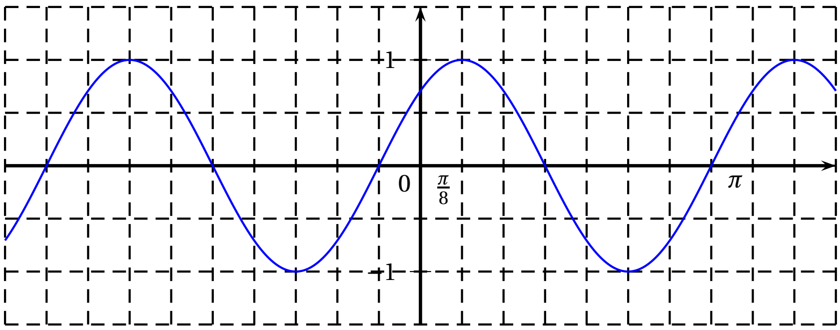
La règle de notation est la suivante : à chaque bonne réponse est attribué 0,5 point. Toute réponse incorrecte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'enlève aucun point. En cas de total négatif, la note attribuée à cette partie sera 0.

Le texte ci-dessous comporte quatre affirmations, numérotées de 1 à 4.
Pour chacune d'elles, indiquer sur la copie si elle est vraie ou fausse. On ne demande aucune justification.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels par

$$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Une partie de la courbe représentative de la fonction f est tracée ci-dessous :



Affirmation 1 : L'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution dans $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$.

Affirmation 2 : $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{8}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1-\sqrt{2}}{4}$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 3\sin(2x)$.

Affirmation 3 : g est une solution de l'équation différentielle : $y" + 4y = 0$.

Affirmation 4 : La valeur moyenne de g sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ vaut $\frac{12}{\pi}$.

PROBLÈME **11 points**

Partie I

On considère la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$g(x) = x - 1 + \mathrm{e}^{2x}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan. On prend comme unité graphique 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 1$.
   a. Démontrer que $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$.
   b. Étudier les positions relatives de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}_g$.
3. Soit g' la fonction dérivée de g.
   a. Calculer, pour tout x réel, $g'(x)$ et montrer que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   b. Dresser le tableau de variations de g.
4. Calculer $g(0)$ puis justifier l'affirmation suivante : « si $x < 0$, alors $g(x) < 0$; si $x > 0$, alors $g(x) > 0$ ».
5. Construire dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}_g$. (On utilisera une feuille de papier millimétré.)

Partie II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^2 + \text{e}^{2x}.$$

1. Soit f' la fonction dérivée de f. Démontrer que, pour tout x réel, $f'(x) = 2g(x)$.
2. En utilisant la question I. 4., dresser le tableau de variation de la fonction f (les limites ne sont pas demandées).
3. En déduire la valeur de x pour laquelle la fonction f admet un minimum et déterminer ce minimum.

Partie III - *Application à un problème de distance minimale*

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \text{e}^x.$$

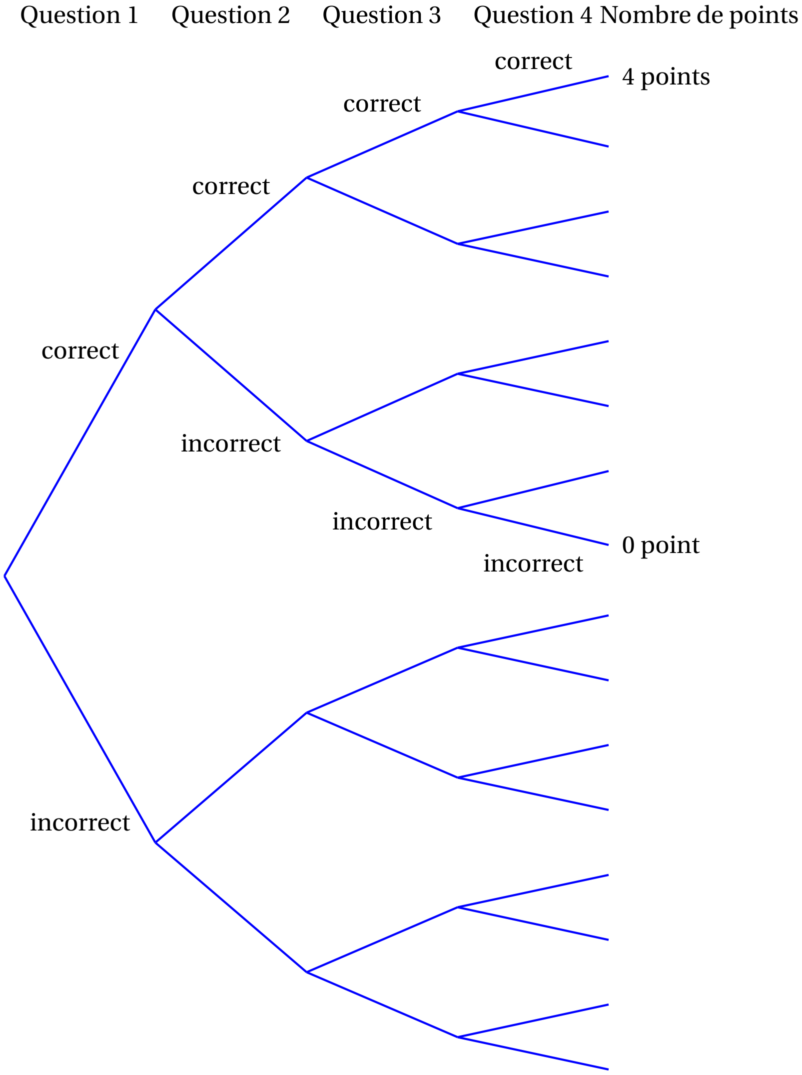
On donne en annexe la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ de la fonction h dans un repère orthonormal d'origine Ω. On a également représenté le point P de coordonnées $(1\,;0)$.

On rappelle que, dans un repère orthonormal, le carré de la distance entre les points $\text{A}\left(x_\text{A}, y_\text{A}\right)$ et $\text{B}\left(x_\text{B}, y_\text{B}\right)$ est donné par : $\text{AB}^2 = \left(x_\text{B} - x_\text{A}\right)^2 + \left(y_\text{B} - y_\text{A}\right)^2$.

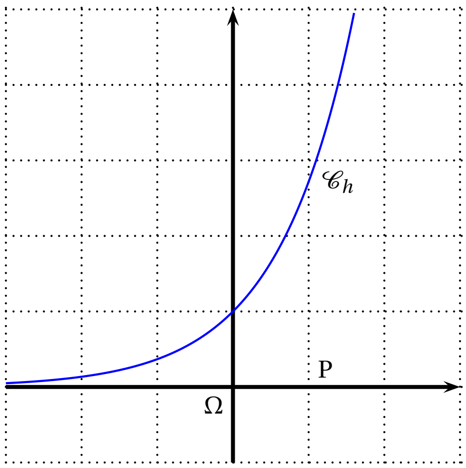
1. a. Placer, dans le repère donné en annexe, les points $\text{A}\left(-1\,;\,\text{e}^{-1}\right)$ et $\text{B}(1\,;\,\text{e})$
   b. Calculer PA^2 et PB^2.
2. On considère, pour un réel x, le point M de $\mathscr{C}_h$ d'abscisse x, c'est-à-dire le point $M(x\,;\,\text{e}^x)$.
   a. Montrer que $\text{P}M^2 = f(x)$, où f est la fonction étudiée dans la partie II.
   b. En déduire les coordonnées du point de la courbe $\mathscr{C}_h$ le plus proche du point P.

      Dans cette question particulièrement, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Feuille annexe à rendre agrafée à la copie



Problème : partie II



Durée : 4 heures

Baccalauréat STI novembre 2008 Génie électronique, électrotechnique, optique Nouvelle-Calédonie

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

On désigne par i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z

$$z^2 - 10z + 41 = 0.$$

2. Pour tout nombre complexe z on pose

$$P(z) = z^3 - 7z^2 + 11z + 123.$$

a. Calculer $P(-3)$.

b. Vérifier que

$$P(z) = (z+3)\left(z^2 - 10z + 41\right).$$

c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z

$$P(z) = 0.$$

3. Soit I, A, B et C les points d'affixes respectives :

$$z_{\text{I}} = 2 \qquad z_{\text{A}} = -3 \qquad z_{\text{B}} = 5 + 4\text{i} \qquad z_{\text{C}} = 5 - 4\text{i}$$

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-2| = 5$.

a. Montrer que les points A, B et C sont dans l'ensemble $\mathscr{C}$.

b. Placer les quatre points A, B, C et I dans le plan.

c. Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

d. Représenter l'ensemble $\mathscr{C}$.

4. Soit $\mathscr{R}$ la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = z \times \text{e}^{-\frac{\pi}{4}\text{i}}.$$

a. Donner les éléments caractéristiques de la transformation $\mathscr{R}$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{C}'$, image du cercle $\mathscr{C}$ par la transformation $\mathscr{R}$.

Justifier la réponse et représenter l'ensemble $\mathscr{C}'$ sur la figure.

EXERCICE 2 **4 points**

Un jeu consiste à miser d'abord q euros, puis à appuyer sur un bouton. Une case de couleur s'allume alors au hasard sur le tableau ci-dessous ; à chaque jeu, chaque case a la même probabilité de s'allumer.

R	R	R	R	R	R
R	J	B	B	J	R
R	B	V	V	B	R
R	J	B	B	J	R
R	R	R	R	R	R

On convient que :
R désigne la couleur rouge
J la couleur jaune
B la couleur blanche
V la couleur verte.

- Si une case rouge s'allume, l'organisateur du jeu ne rend rien au joueur.
- Si une case blanche s'allume, l'organisateur du jeu rend la mise de q euros au joueur.
- Si une case jaune s'allume, l'organisateur du jeu donne 5 euros au joueur.
- Si une case verte s'allume, l'organisateur du jeu donne 8 euros au joueur.

1. On considère dans cette question que $q = 1$. Soit X la variable aléatoire représentant le gain relatif du joueur, obtenu en tenant compte de la mise initiale.

a. Justifier que les valeurs prises par X sont $\{-1\ ;\ 0\ ;\ 4\ ;\ 7\}$.

b. Montrer que la probabilité pour que le gain relatif du joueur soit égal à 4 est :

$$P(X = 4) = \frac{2}{15}$$

c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X à l'aide d'un tableau.

2. On considère dans cette question que q est un nombre positif quelconque.
Quelle devrait être la mise q pour que le jeu soit équitable ?
Toute justification ou toute explication, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.

PROBLÈME **11 points**

Partie I : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \ln x + 2x^2.$$

1. Montrer que

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(2x-1)}{x}.$$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$.
Dresser le tableau de variation de la fonction g (sans les limites).

3. En déduire que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $g(x)$ est strictement positif.

Partie II : étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2x - 3.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Étudier la limite de f en 0. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier la limite de f en $+\infty$ et démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x-3$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse e et B le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\sqrt{\text{e}}$.
   a. Donner les valeurs arrondies au centième des coordonnées des points A et B.
   b. En déduire que la fonction f est positive sur l'intervalle $[\sqrt{\text{e}}~;~\text{e}]$.
6. Tracer la droite Δ et la courbe $\mathcal{C}$. Placer les points A et B.
7. a. Démontrer qu'au point A, la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à la droite Δ.
   b. Le point A est-il le seul point de la courbe $\mathcal{C}$ admettant une tangente parallèle à la droite Δ ?

Partie III calcul d'aire

1. Soit K la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$K(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

   On note K' la fonction dérivée de la fonction K. Calculer $K'(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \sqrt{\text{e}}$ et $x = \text{e}$.
   a. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en unité d'aire.
   b. Donner une valeur approchée au mm^2 près de l'aire $\mathcal{A}$.
   c. Retrouver une valeur approximative de ce résultat en calculant l'aire en mm^2 d'un trapèze à préciser.

Baccalauréat STI France septembre 2008
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4z + 8 = 0.$$

2. On considère les points A, B et C du plan d'affixes respectives :

$$z_A = 2 - 2i \quad ; \quad z_B = 2 + 2i \text{ et } z_C = 4.$$

Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

3. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_A et z_B.
4. **a.** Écrire z_A et z_B sous la forme $re^{i\theta}$, où r est un réel strictement positif et θ un réel compris entre $-\pi$ et π.

   b. Montrer que le point B est l'image du point A par une rotation de centre O et d'angle que l'on précisera.
5. Démontrer que le triangle OAB est isocèle rectangle.
6. Déterminer la nature du quadrilatère OACB.

EXERCICE 2 **5 points**

Une entreprise fabriquant des ordinateurs les vend en ligne sur internet. Ces appareils sont tous garantis un an gratuitement.
Le fabricant propose en option une extension de garantie payante de deux ans, au delà de cette première année gratuite.

1. Une étude est faite sur un échantillon de 1 000 ordinateurs vendus par ce fabricant. Elle montre que :
   - 10 ordinateurs ont nécessité une ou plusieurs réparations au cours de la deuxième année (on note ce cas R_2) ;
   - au cours de la troisième année, 20 ordinateurs ont nécessité une ou plusieurs réparation (on note ce cas R_3) dont un qui avait déjà été réparé l'année précédente.

   Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre d'ordinateurs	R_3 se produit	R_3 ne se produit pas	Total
R_2 se produit			
R_2 ne se produit pas			
Total			

   On admet que la répartition précédente modélise ce qui se produit pour l'ensemble des ordinateurs vendus par ce fabricant.
2. Selon les chiffres du fabricant :
   - pour chaque ordinateur vendu sans extension de garantie et tombé en panne une ou plusieurs fois la deuxième année, le coût moyen de réparation pour l'acheteur au cours de cette deuxième année est 150 €.

- pour chaque ordinateur vendu sans extension de garantie et tombé en panne une ou plusieurs fois la troisième année, le coût moyen de réparation pour l'acheteur au cours de cette troisième année est 200 €.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque ordinateur vendu sans extension de garantie par ce fabricant, associe le coût total moyen des réparations, pour l'acheteur, au terme des trois premières années. Ce coût est exprimé en euros.

Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont donc 0, 150, 200, 350.

a. Justifier que la probabilité de l'évènement $(X = 0)$ est égale à $0,971$.

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

3. Le fabricant propose l'extension de garantie payante de deux ans à un prix de 50 €.

Que peut-on en dire ?

PROBLÈME **10 points**

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' + 5y = 5x^3 + 3x^2 + 5,$$

où y représente une fonction de la variable x, définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) \quad : \quad y' + 5y = 0$.

2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction u, définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = ax^3 + b$, soit solution de l'équation différentielle (E).

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = k\text{e}^{-5x} + x^3 + 1$ où k est un nombre réel.

a. Vérifier que h est solution de l'équation (E).

b. Déterminer le réel k tel $h(0) = -2$.

Partie B : Étude de la fonction *f*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -3\text{e}^{-5x} + x^3 + 1.$$

1. a. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

b. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. a. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

3. a. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

b. Établir que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

c. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du nombre réel α.

d. Déterminer selon les valeurs du réel x, le signe de $f(x)$.

Partie C : Courbe représentative de la fonction f

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 8 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^3 + 1$.
   La représentation graphique Γ de la fonction u, dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est tracée sur la feuille jointe en annexe.
   a. On pose, pour tout réel x, $d(x) = f(x) - u(x)$.
   Étudier le signe de $d(x)$.
   b. En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la courbe Γ.
2. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous. On donnera dans chaque cas la valeur décimale arrondie au centième de $f(x)$.

x	$-0,2$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
$f(x)$								

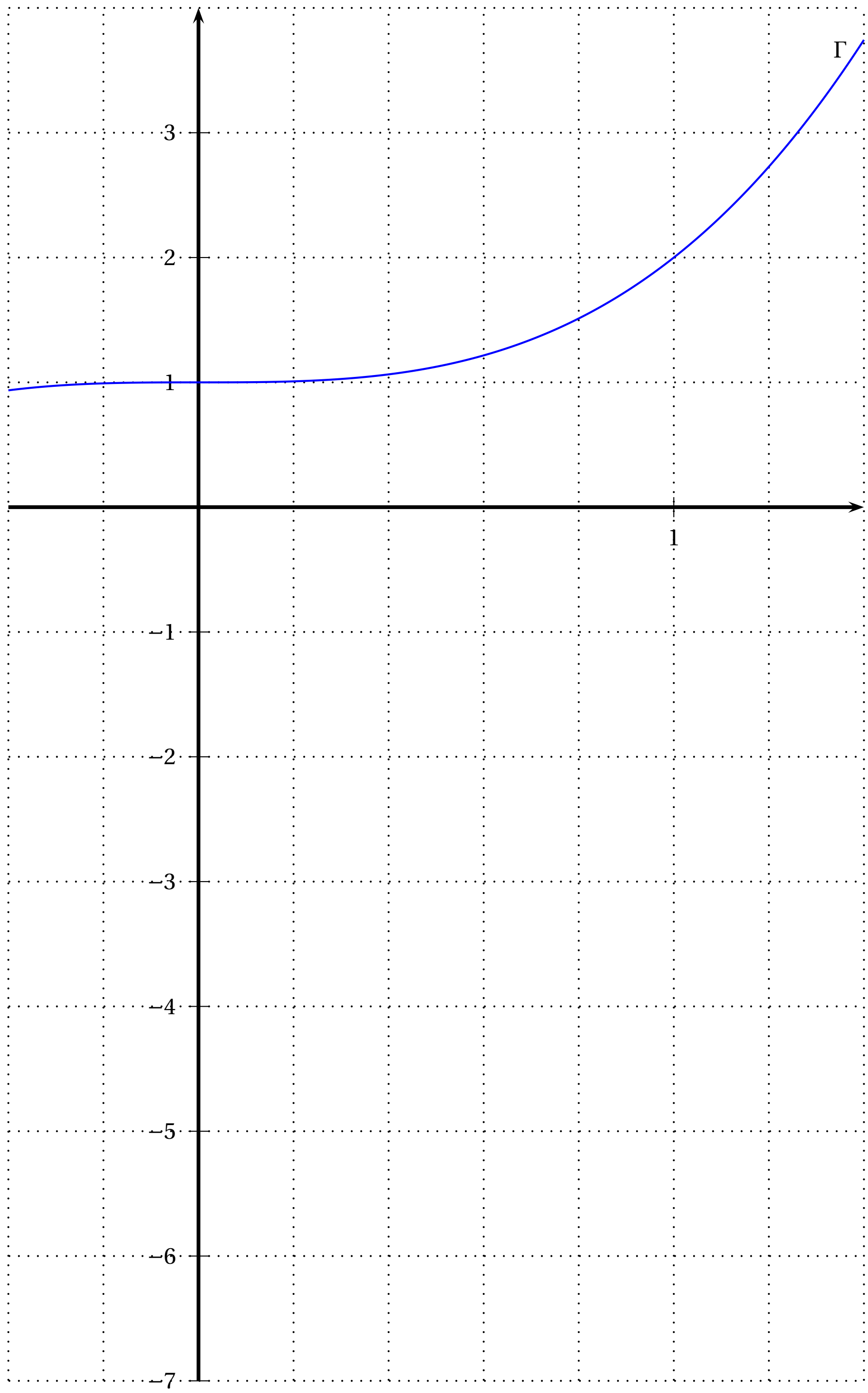
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère figurant sur la feuille annexe à remettre avec la copie.

Partie D : Calcul d'une aire

On appelle $\mathscr{P}$ la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 1$.

1. Hachurer sur la feuille annexe la partie $\mathscr{P}$ du plan.
2. Calculer la mesure, en unités d'aire, de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie $\mathscr{P}$ du plan.
   Dans cette question particulièrement, toute trace de recherche, même incomplète, figurant sur la copie sera prise en compte dans l'évaluation.

FEUILLE ANNEXE DU PROBLÈME
À REMETTRE AVEC LA COPIE



Baccalauréat STI Antilles–Guyane septembre 2008
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un vrai/faux : il s'agit donc de préciser si chacune des affirmations proposées est vraie ou fausse.

À chaque bonne réponse est attribuée 0,5 point. Toute réponse incorrecte e,lève 0,25 point.
L'absence de réponse n'enlève aucun point. En cas de total négatif, la note attribuée à l'exercice sera 0.

Pour chaque affirmation, le candidat donnera la réponse sur sa copie en écrivant en toutes lettres « vrai » ou « faux ». On ne demande aucune justification.
Les questions 1., 2., 3. sont indépendantes.

1. On considère le polynôme P défini pour tout réel x par
$P(x) = (x-1)(x-3)(2x+3)$.

a. L'équation $P(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ trois solutions qui sont 1, 3 et $-\dfrac{3}{2}$.
b. Pour tout réel x, $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x$.
c. L'équation $(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - 3)(2\mathrm{e}^x + 3) = 0$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$.

2. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les nombres $z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$.

a. Les nombres z_1 et z_2 sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0$.
b. Un argument de z_2 est $-\dfrac{3\pi}{4}$.
c. Le module de z_1 est $\sqrt{2}$.

3. Soit l'équation différentielle (E) : $4y'' + 49y = 0$ dans laquelle l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et y'' sa dérivée seconde.

a. La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = A\cos\dfrac{7x}{2} + B\sin\dfrac{7x}{2}$, où A et B sont deux constantes réelles, est solution de (E).
b. La fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = 3\cos\left(\dfrac{7x}{2} - \dfrac{3\pi}{4}\right)$ est solution de (E).
c. La fonction k définie pour tout réel x par $k(x) = -\sqrt{2}\cos\dfrac{7x}{2} - \sqrt{2}\sin\dfrac{7x}{2}$ est la solution de (E) qui vérifie $k(0) = \sqrt{2}$ et $k'(0) = 0$.

EXERCICE 2 **5 points**

Une boîte contient 140 tiges métalliques de forme cylindrique, de dimensions variées, issues de la production d'un atelier. Le tableau suivant donne leur répartition suivant leur longueur ℓ et leur diamètre d, exprimée en millimètres.

ℓ \ d	15,8	16	16,1	16,3
84	5	9	6	0
85	15	19	21	4
86	12	6	12	7
87	6	7	6	5

Par exemple il y a 12 tiges métalliques de longueur 86 mm et de diamètre 16,1 mm.
On tire au hasard une tige de la boîte, les tirages étant équiprobables.
Dans tout l'exercice, les probabilités seront données sous forme de fraction.

1. Calculer les probabilités respectives p_1, p_2 et p_3 des évènements suivants :

  a. « obtenir une tige de longueur 86 mm et de diamètre 16 mm » ;

  b. « obtenir une tige de longueur 85 mm » ;

  c. « obtenir une tige de longueur inférieure ou égale à 86 mm ».

2. Selon les normes imposées par la production, une tige métallique est conforme lorsque sa longueur ℓ et son diamètre d exprimés en millimètres, vérifient :

$$84,5 \leqslant \ell \leqslant 85,5 \quad \text{et} \quad 15,9 \leqslant d \leqslant 16,2$$

Calculer la probabilité de l'évènement : « obtenir une tige conforme ».

3. Soit X la variable aléatoire qui à chacun des tirages possibles, associe la longueur en millimètres de la tige obtenue.

  a. Quelle est la probabilité de l'évènement « X = 84 ».

  b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

  c. Calculer la probabilité de l' évènement « X $\geqslant$ 85 ».

  d. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. En donner un arrondi au centième.

PROBLÈME **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative dans le repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de la fonction f définie pour tout réel x par

$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^x$, où a, b et c désignent trois nombres réels tels que :

- le point A de coordonnées (0 ; −1) appartient à la courbe $\mathscr{C}$;
- la courbe $\mathscr{C}$ admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;
- $f(1) = 2\mathrm{e}$.

Partie A

1. Démontrer que $c = -1$.

2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

  a. En remplaçant c par sa valeur, donner pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$ en fonction de a et de b.

  b. Calculer a et b.

Partie B

On admet que pour tout réel x, $f(x) = \left(2x^2 + x - 1\right)\mathrm{e}^x$.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on rappelle que, pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n\text{e}^x = 0$).

   Interpréter graphiquement ce résultat

2. a. Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = x(2x+5)\text{e}^x$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du réel x.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie juin 2009
Génie mécanique, énergétique, civil

Exercice 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^3 - 7z^2 + 20z - 24.$$

   a. Vérifier que $P(3) = 0$.

   b. Déterminer deux nombres réels α et β tels que $P(z) = (z-3)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right)$.

   c. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2. On note A, B et C les points du plan, d'affixes respectives $a = 3$, $b = 2 + 2\text{i}$ et $c = 2 - 2\text{i}$.

   a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   b. Déterminer le module et un argument du nombre complexe b.

   c. Déterminer le module et un argument du nombre complexe c.

   d. Démontrer que le triangle OBC est rectangle et isocèle.

3. On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z tels que : $|z - 3| = \sqrt{5}$.

   a. Montrer que les points B et C appartiennent à l'ensemble $\mathscr{E}$.

   b. Déterminer la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$ et représenter cet ensemble sur le dessin.

Exercice 2 **4 points**

On s'intéresse au jeu suivant :
Une urne (urne 1) contient trois boules portant les numéros 0, 5 et 10.
Une deuxième urne (urne 2) contient trois boules : une blanche (B), une jaune (J) et une rouge (R).
Le joueur tire successivement et au hasard une boule dans l'urne 1 puis une boule dans l'ume 2.
Un résultat possible est par exemple :
« la boule 1 porte le n° 5 et la boule 2 est jaune » que l'on codera (5 ; J).

1. Dresser la liste de tous les résultats possibles.

   Les gains ou les pertes associés à un résultat sont définis par les règles suivantes :

   - le joueur, pour pouvoir jouer, mise 5 € ;
   - suite au résultat obtenu à l'issue des deux tirages il gagne :
     - le montant inscrit sur la première boule multiplié par 0 si la deuxième boule est blanche ;
     - le montant inscrit sur la première boule multiplié par 1 si la deuxième boule est jaune ;

– le montant inscrit sur la première boule multiplié par 3 si la deuxième boule est rouge.

Le « gain réel » du joueur est donc la somme gagnée lors du jeu diminuée de la mise initiale. Par exemple le gain réel associé au résultat (5 ; R) est
$5 \times 3 - 5 = 10$ euros.

On note X la variable aléatoire qui à tout résultat associe le gain réel du joueur.

2. Quels sont les différents « gain réels » possibles du joueur ?

3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

4. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

5. S'il effectue un très grand nombre de parties, un joueur va plutôt :
- réponse A : être ruiné ?
- réponse B : devenir riche ?
- réponse C : ni l'un ni l''autre ?

Quelle est ta bonne réponse ? Justifier.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : Étude sommaire d'une fonction g

On considère la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$g(x) = \mathrm{e}^{x^3 - x - 5}.$$

La courbe représentative de la fonction g est notée $\mathscr{C}$ et est représentée sur la feuille annexe.
Le dessin suggère que g est croissante sur $\mathbb{R}$. On se propose dans cette partie de confirmer ou d'infirmer cette impression.

1. Déterminer $g'(x)$ pour tout nombre réel x.

2. Étudier selon les valeurs du nombre réel x le signe de $P(x) = 3x^2 - 1$.

3. Justifier que $g'(x)$ et $P(x)$ sont de même signe pour tout nombre réel x.

4. En déduire le tableau de variations de g. (L'étude des limites n'est pas demandée.)

5. Que penser des variations de g suggérées par le dessin ?

Partie B : Étude de quelques propriétés d'une fonction f

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = -x\ln x + \frac{1}{3}x + 1.$$

La courbe représentative de f est notée Γ, cette courbe est représentée sur la feuille annexe.

1. Étude des variations de f

a. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = -\ln x - \dfrac{2}{3}$.

b. Résoudre dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$, l'inéquation $f'(x) > 0$.

c. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$. (On ne demande pas de calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.)

2. Calcul d'une aire

a. Hachurer sur la feuille annexe la partie du plan comprise entre la droite d'équation $x = 1$, la droite d'équation $x = 2$, l'axe des abscisses, et la courbe Γ.

b. On note H la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$H(x) = x^2 \ln x - \dfrac{x^2}{2}$.

Déterminer $H'(x)$ et en déduire une primitive de h sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

c. Calculer l'aire de la partie du plan hachurée exprimée en unité d'aire.

Partie C ; Résolution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur l'intervalle $[1\ ;\ 2]$

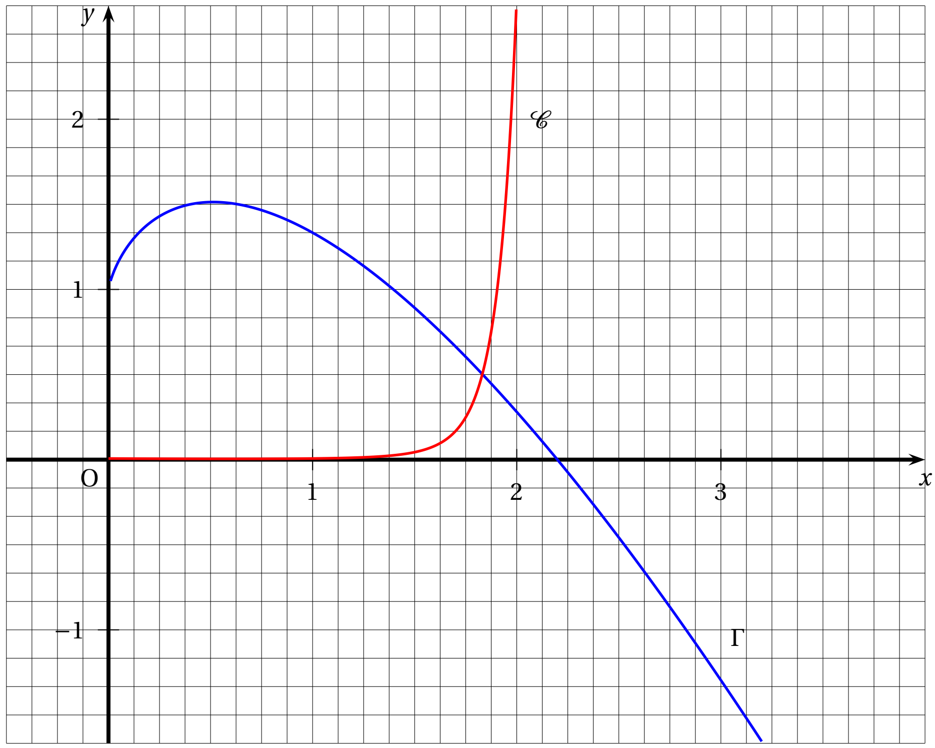
On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[1\ ;\ 2]$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.

1. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ 2]$, $h'(x) > 0$.

2. En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ 2]$.

3. Donner la valeur approchée arrondie au centième de cette solution.

Feuille annexe à compléter et à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole 23 juin 2009

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **6 points**

Pour la construction d'une piscine privée, un architecte a imaginé la forme de la figure 1 (vue de dessus de la piscine), où $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm. Le périmètre de cette piscine est constitué de deux demi-cercles : $\overset{\frown}{\text{AB}}$ de centre O et de rayon 3, et $\overset{\frown}{\text{CD}}$ de centre O′ et de rayon 4, reliés par deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. L'axe des abscisses est un axe de symétrie de la figure.

La courbe $\mathscr{C}$ reliant les points A et D est la courbe représentative d'une fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 8]$.

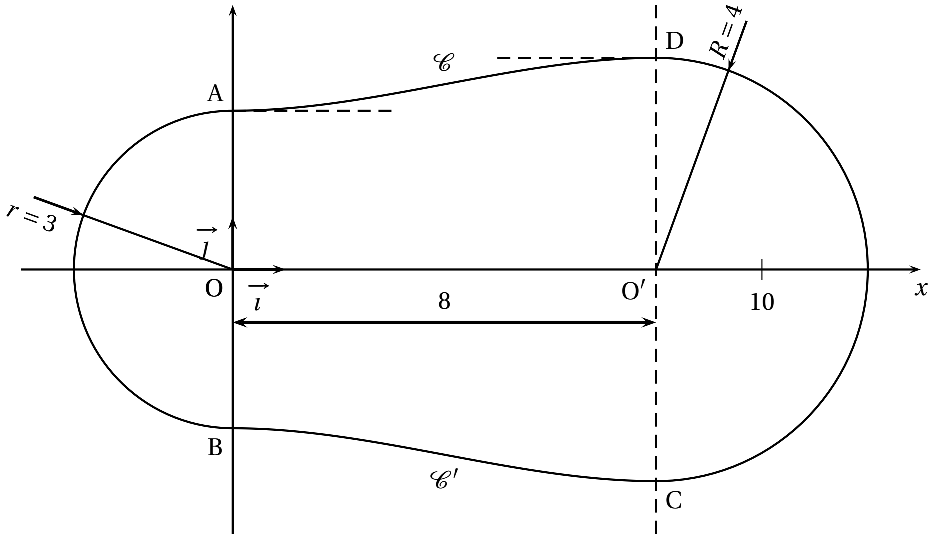


figure 1

1. **a.** En remarquant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A d'abscisse 0, le point D d'abscisse 8, et qu'en ces points elle admet une tangente horizontale, déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(8)$, $f'(0)$ et $f'(8)$.

   b. On suppose qu'il existe quatre nombres réels a, b, c et d tels que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 8]$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
   Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a, b, c, d et x.

   c. Déduire des questions précédentes que $c = 0$ et $d = 3$ et que les réels a et b vérifient le système : $\left\{\begin{array}{rcl} 512a + 64b &=& 1 \\ 192a + 16b &=& 0 \end{array}\right.$.

   d. Résoudre le système précédent.

2. Par la suite, on admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 8]$,
   $f(x) = -\dfrac{1}{256}x^3 + \dfrac{3}{64}x^2 + 3$, et que f est strictement positive sur $[0 ; 8]$.

Le but de cette question est de déterminer l'aire de la piscine, en m^2, sachant que la figure 1 est une représentation à l'échelle 1/100 de la réalité.

a. Expliquer une démarche qui permet d'obtenir l'aire demandée. On rappelle que toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, pourra être prise en compte.

b. Calculer, en m^2, la valeur exacte de l'aire de la piscine réelle. Donner également la valeur arrondie à 0,1 m^2 de cette aire.

3. La profondeur d'eau de cette piscine est constante, égale à 1,60 m. Calculer, en m^3, la valeur exacte du volume d'eau contenue dans cette piscine. Donner également la valeur arrondie au m^3 de ce volume.

EXERCICE 2 — 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 5 cm.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 1$ et $z_{\text{B}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\text{i})$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Le but de cet exercice est de déterminer la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{8}$

1. **a.** Montrer que les points A et B appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

b. Déterminer un argument de z_{B}.

c. Tracer le cercle $\mathscr{C}$, et placer les points A et B.

d. Soit I le milieu du segment [AB] et z_{I} son affixe. Placer I sur la figure et prouver que $z_{\text{I}} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\text{i}$.

2. **a.** Calculer la distance OI, et prouver que $\text{OI} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

b. Démontrer que la droite (OI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{AOB}}$. En déduire un argument de z_{I}.

c. Donner la forme trigonométrique de z_{I}.

3. Montrer à l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes que la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ est $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

PROBLÈME — 9 points

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées. On s'intéresse, dans ce problème, à la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 2.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \ln x - x^2.$$

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$. En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B : étude de la fonction *f*

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement cette limite.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   c. Justifier que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x+2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
   d. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.
2. **a.** Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$,
   $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b. Établir le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. **a.** Déterminer les coordonnées du point A de la courbe $\mathcal{C}$ tel que la tangente en ce point soit parallèle à l'asymptote $\mathcal{D}$.
   b. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}$, tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse e.
   On rappelle que e est le nombre réel tel que $\ln \mathrm{e} = 1$.
4. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0~;~1[$.
   On appelle B le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse α.
   b. Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de α.
5. Dans le repère $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, placer les points A et B puis tracer les droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}$ et la courbe $\mathcal{C}$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Antilles-Guyane juin 2009
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Une agence de voyage propose trois durées de séjours - un week-end, une semaine, ou deux semaines - et deux types de destination - France ou Étranger.
Parmi les dossiers de l'agence, on constate que :

- 60 % de séjours ont lieu en France;
- 20 % des séjours en France durent deux semaines;
- pour les séjours en France, il y a deux fois plus de séjours d'un week-end que de séjours d'une semaine;
- 75 % des séjours à l'étranger durent deux semaines;
- il ya autant de séjours d'un week-end que de deux semaines.

1. L'agence a traité 250 dossiers. Reproduire puis compléter le tableau d'effectifs suivant :

	France	Étranger	Total
Le week-end			
La semaine			
Deux semaines			
Total			

2. On choisit un dossier au hasard parmi les 250 dossiers traités. Calculer la probabilité des évènements suivants (on exprimera les résultats sous forme de fractions) :

   a. F : « le dossier choisi est, celui d'un séjour en France »;

   b. S : « le dossier choisi est celui d'un séjour de deux semaines »;

   c. Sachant que le dossier choisi est celui d'un séjour de deux semaines, quelle est la probabilité qu'il soit celui d'un séjour en France?

   Dans la suite, on considère que la probabilité pour un client de choisir un séjour d'un week-end ou de choisir un séjour de deux semaines est la même, égale à 0,42.

3. Le traitement d'un dossier par l'agence a un coût : appels téléphoniques, recherches, temps passé, ...
   Les frais de dossier s'élèvent pour l'agence à :
   - 2 euros pour un séjour d'un week-end;
   - 5 euros pour un séjour d'une semaine;
   - 15 euros pour un séjour de deux semaines;

   Soit X la variable aléatoire qui à chaque type de dossier associe son coût.

   a. Donner la loi de probabilité de X.

   b. Calculer $\mathrm{E}(X)$, espérance mathématique de X. On fera apparaître de façon détaillée l'application de la formule donnant $\mathrm{E}(X)$.

   c. Par souci de commodité, l'agence demande une somme forfaitaire à chaque client quelque soit le type de séjour qu'il a choisi.
   Quelle somme doit-elle demander à chaque client pour espérer rentrer au moins dans ses frais? Expliquer cette réponse.

EXERCICE 2 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (Q.C.M.).
Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Pour chacune des questions, donner, sans justification, la bonne réponse sur la copie.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte ou l'absence de réponse est comptée 0 point.

1. Le nombre complexe $z = 1 + \text{i}\sqrt{3}$ a pour module et argument respectivement :
   Réponse A : 1 et $\dfrac{\pi}{6}$;
   Réponse B : 2 et $\dfrac{\pi}{3}$;
   Réponse C : 4 et $-\dfrac{\pi}{3}$
2. Le plan complexe est rapporté au repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
   Le point d'affixe $1 + \text{i}$ appartient :
   Réponse A : au cercle de centre O et de rayon 1 ;
   Réponse B : à la droite d'équation $y = -x$;
   Réponse C : au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
3. Une solution de l'équation $\dfrac{z - \text{i}}{z + \text{i}} = -\text{i}$ est :
   Réponse A : 1 ; **Réponse B :** i ; **Réponse C :** 0.
4. L'ensemble des points d'affixe z tels que : $|z + \text{i}| = |z - 1|$ est :
   Réponse A : la droite d'équation $y = x - 1$;
   Réponse B : la droite d'équation $y = -x$;
   Réponse C : la droite d'équation $y = x$.

PROBLÈME **11 points**

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = a\frac{\ln x}{x} + b,$$

où a et b sont deux nombres réels à déterminer.
f' désigne la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de cette fonction f, dans un repère orthononné $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ du plan d'unité graphique 2 cm.
On a représenté la courbe $\mathscr{C}$, sur la feuille annexe.
La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point de coordonnées (1 ; 2) ; elle coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ; 1).

Partie A : recherche de l'expression de $f(x)$

En utilisant le graphique de la feuille annexe,

1. Préciser (sans justifier) les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. Déterminer $f'(x)$, en fonction de la variable x, du nombre réel a et du nombre réel b si besoin.
3. Utiliser les deux questions précédentes pour déterminer les valeurs de a et b.

Partie B : étude de la fonction f

Dans la suite du problème, la fonction f est définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2.$$

1. Déterminer, par le calcul, la limite de $f(x)$ en O.
   En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ dont on donnera une équation.
2. a. Démontrer, par le calcul, que la droite D, d'équation, $y = 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   b. Étudier par le calcul, la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   c. Tracer la droite D sur la feuille annexe.
3. Déterminer $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f en justifiant avec soin le signe de $f'(x)$.

Partie C : Calcul d'une aire

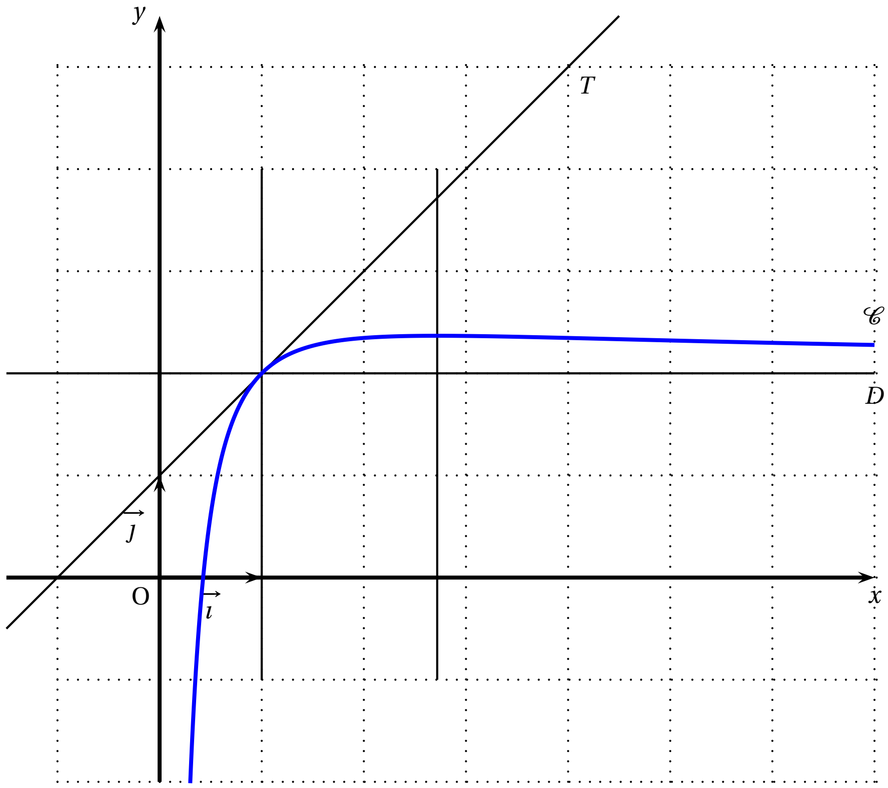
Soit g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = (\ln x)^2$$

1. Calculer $g'(x)$, où g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.
   En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. On considère le domaine du plan S délimité par la droite d'équation $x = 1$, la droite d'équation $x = \mathrm{e}$, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite D.
   Calculer, en unités d'aire puis en cm^2, la mesure de l'aire du domaine S.

Feuille annexe

(à rendre avec la copie)



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI novembre 2008 ∾
Génie Mécanique - Génie Énergétique - Génie Civil
Nouvelle-Calédonie

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet. Des feuilles de papier millimétré seront mises à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté un repère orthonormat direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
L'unité graphique est 2 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = 4z^4 - 7z^3 + 11z^2 + 10z - 12.$$

1. Résolution de l'équation $P(z) = 0$.

a. Déterminer les deux nombres réels α et β tels que pour tout nombre complexe z :

$$P(z) = \left(z^2 - 2z + 4\right)\left(4z^2 + \alpha z + \beta\right).$$

b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère les points A, B, C, D d'affixes respectives :

$$a = -1, \qquad b = 1 + \text{i}\sqrt{3}, \qquad c = 1 - \text{i}\sqrt{3}, \qquad d = \frac{3}{4}.$$

a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes b et c.

b. Placer les points A, B, C et D dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

c. Démontrer que les points A, B et C sont situés sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre D dont on précisera le rayon r. Construire ce cercle.

d. Déterminer les affixes e et f des deux points E et F situés sur $\mathscr{C}$ et tels que les triangles ABE et ABF soient rectangles, respectivement en B et en A. Placer les points E et F sur le cercle $\mathscr{C}$.

EXERCICE 2 **4 points**

À l'instant $t = 0$, une bille est lâchée à la surface d'une colonne de liquide.
On note $v(t)$ la vitesse instantanée de cette bille, exprimée en $m.s^{-1}$, à un instant t donné.
On admet que la fonction v est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle

$$(\text{E}) \quad : \quad y' + 140y = 5,88.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (H) : $z' + 140z = 0$, où z désigne une fonction inconnue de la variable t, dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. On pose, pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,
$y(t) = z(t) + 0,042$, où la fonction z est une solution de l'équation différentielle (H).

a. Démontrer que la fonction y est une solution de l'équation différentielle (E).

b. Parmi les fonctions y précédentes, démontrer que celle, notée v, qui s'annule pour $t = 0$, est définie par : $v(t) = 0,042\left(1 - \mathrm{e}^{-140t}\right)$.

3. Deux utilisations de l'expression trouvée de $v(t)$.

a. Démontrer, en étudiant la limite de $v(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$, que la vitesse de la bille admet une valeur limite notée ℓ dont on donnera la valeur numérique.

b. À quel instant t la bille atteint-elle 95 % de sa vitesse limite ?

PROBLÈME **11 points**

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (L'unité graphique est 4 cm.)
Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x + x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan $\mathcal{P}$.

I - Étude d'une fonction auxiliaire

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^x(x-2) - 1.$$

1. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

2. Étude des variations de g

a. Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g et étudier son signe sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

3. Résolution de l'équation $g(x) = 0$

a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution, notée α, appartenant à l'intervalle $[1 ; 3]$.

b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

4. Déterminer le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

II - Étude de la fonction *f*

1. Étude de la limite en $+\infty$.

a. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$,

$$f(x) = \frac{1 + \mathrm{e}^{-x}}{1 + x\mathrm{e}^{-x}}.$$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.

2. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 1$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

3. Étude des variations de f

a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(\mathrm{e}^x + x)^2}$ où g est la fonction définie en 1.

b. Déduire de la question I. 4., le sens de variations de f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

4. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

III - Calcul d'aire

On note $\mathscr{B}$ l'aire, exprimée en cm^2 du domaine limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

1. Hachurer sur le graphique le domaine $\mathscr{B}$.

2. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

3. En déduire la valeur exacte de $\mathscr{B}$, puis une valeur approchée arrondie au mm^2.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique, civil France septembre 2008

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **6 points**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$Z^2 + 2Z + 4 = 0.$$

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
La figure sera complétée au fur et à mesure que l'énoncé le demandera.
Soit les points A, B et C d'affixes respectives :

$$Z_{\text{A}} = -1 + \text{i}\sqrt{3}, \quad Z_{\text{B}} = \overline{Z_{\text{A}}} \text{ et } Z_{\text{C}} = 2.$$

On rappelle que $\overline{Z_{\text{A}}}$ représente le nombre complexe conjugué de Z_{A}.

2. **a.** Calculer le module et un argument du nombre complexe Z_{A}.
   b. En déduire le module et un argument du nombre complexe Z_{B}.
   c. Placer les points A, B et C sur la figure.
   d. Démontrer que le triangle ABC est un triangle équilatéral.
3. Soit D le point d'affixe Z_{D} définie par : $Z_{\text{D}} = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}} Z_{\text{B}}$.
   a. Déterminer l'écriture algébrique de Z_{D}.
   b. Placer le point D sur la figure.
   c. Quelle est la nature du quadrilatère BDAO ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans une usine, deux chaînes de montage A et B fabriquent les mêmes types d'objets. La chaîne A en fabrique trois fois plus que la chaîne B. 7 % de la production de la chaîne A est défectueuse contre 2 % pour la chaîne B.

Partie I

1. On considère une production de 1 200 objets.
   Reproduire et compléter le tableau suivant :

	chaîne	chaîne B	total
nombre d'objets défectueux	63		
nombre d'objets non défectueux			
total			1 200

2. On prélève au hasard un objet dans la production de l'usine et on admet que les tirages sont équiprobables.

a. Déterminer la probabilité que l'objet prélevé soit à la fois défectueux et produit par la chaîne A.

b. Déterminer la probabilité que l'objet prélevé ne soit pas défectueux.

Partie II

Un objet défectueux peut présenter 1, 2 ou 3 défauts.

Soit X la variable aléatoire qui, à un objet prélevé au hasard dans la production, associe le nombre de défauts.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0,942 5	0,031 8	$\cdots$	0,006

1. Reproduire sur la copie puis compléter le tableau précédent.

2. Le prix de vente d'un objet dépend du nombre de défauts qu'il présente :

nombre de défauts	0	1	2	3
prix de vente en €	56	15	10	1

Soit Y la variable aléatoire qui, à un objet prélevé au hasard dans la production, fait correspondre son prix de vente.

a. Déterminer la loi de probabilité de Y.

b. Calculer l'espérance mathématique de Y. Interpréter le résultat obtenu.

PROBLÈME **9 points**

Étude de l'énergie fournie par le rayonnement solaire

Le but de ce problème est d'étudier le rayonnement solaire en un point de la surface de la Terre dont la latitude est 45° N et l'altitude 900 m.

Dans les questions **1., 2.** et **3.**, on étudie le rayonnement solaire un 21 mars ensoleillé sur un plan perpendiculaire au rayonnement solaire d'une surface de 1 m^2.

1. On suppose d'abord que le rayonnement solaire exprimé en W/m^2 est donné en fonction de l'inclinaison θ du soleil (θ étant exprimé en degrés) par

$$p(\theta) = 1\,230\mathrm{e}^{\frac{-1}{3,8\sin(\theta+1,6)}}.$$

On attire l'attention du candidat quant à l'utilisation de la calculatrice pour ces calculs : dans la formule ci-dessus le sinus porte sur un angle exprimé en degrés.

Compléter le duplicata du tableau 1 ci-dessous, fourni en annexe (à joindre à la copie).

heure solaire	6 h	7 h	8 h	9 h	10 h	11 h	12 h	13 h	14 h	15 h	16 h	17 h	18 h
inclinaison θ du soleil (en °)	0	10,5	20,7	30	37,7	43	45	43	37,7	30	20,7	10,5	0
rayonnement solaire $p(\theta)$ (en W/m^2)		350		744			856						

Tableau 1

2. On veut maintenant modéliser l'évolution du rayonnement solaire en fonction de l'heure.

On définit la variable t comme étant le temps écoulé depuis le lever du soleil, qui se produit à 6 heures. Pour des raisons de symétrie entre le matin et l'après-midi, on se limitera à faire varier t dans l'intervalle $[0 ; 6]$, ce qui correspond à des heures solaires variant entre 6 h et 12 h.

On admet que le rayonnement solaire (en W/m^2) peut être exprimé en fonction de t par :

$$f(t) = 856\left(1 - \mathrm{e}^{-0,6t}\right).$$

a. Compléter le duplicata du tableau 2 ci-dessous, fourni en annexe (à joindre à la copie).

heure solaire	6 h	7 h	8 h	9 h	10 h	11 h	12 h
temps t (en heures)	0	1	2	3	4	5	6
rayonnement solaire $f(t)$ (en W/m^2)				715			833

Tableau 2

b. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.
Calculer $f'(t)$ et étudier son signe sur l'intervalle $[0 ; 6]$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

d. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal (2 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour 100 unités en ordonnée).

e. Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Tracer $\mathscr{T}$ dans le même repère que $\mathscr{C}$.

f. Les dernières lignes des tableaux 1 et 2 vous paraissent-elles cohérentes ?

3. La quantité d'énergie solaire E, exprimée en Wh, reçue au cours de la journée, est donnée par :

$$\mathrm{E} = 2\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = 1712\int_0^6 \left(1 - \mathrm{e}^{-0,6t}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Calculer la valeur exacte de E puis fournir la valeur arrondie à l'unité.

4. On s'intéresse maintenant à l'énergie solaire reçue sur une année.
Un logiciel de météorologie fournit une énergie solaire annuelle égale à 1 206 kWh, toujours pour une surface de 1 m^2.

a. Vérifier que cette valeur correspond environ à 161 journées telles que celle étudiée aux questions **1.**, **2.** et **3.**.

b. On suppose qu'un dispositif de production d'énergie électrique reçoit l'énergie solaire sur une surface de 1 km^2 et qu'il convertit 20 % de cette énergie en électricité.
Combien d'habitants auraient leur consommation électrique domestique fournie par ce dispositif, sachant qu'un habitant consomme en moyenne 700 kWh/an d'énergie électrique domestique (hors chauffage) ?

ANNEXE RELATIVE AU PROBLÈME

(à rendre avec la copie)

heure solaire	6 h	7 h	8 h	9 h	10 h	11 h	12 h	13 h	14 h	15 h	16 h	17 h	18 h
inclinaison θ du soleil (en °)	0	10,5	20,7	30	37,7	43	45	43	37,7	30	20,7	10,5	0
rayonnement solaire $p(\theta)$ (en W/m^2)		350		744			856						

Tableau 1

heure solaire	6 h	7 h	8 h	9 h	10 h	11 h	12 h
temps t (en heures)	0	1	2	3	4	5	6
rayonnement solaire $f(t)$ (en W/m^2)				715			833

Tableau 2

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Antilles–Guyane septembre 2008

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **4 points**

Questionnaire à choix multiples

Pour chacune des quatre questions, une seule des réponses **a, b** ou **c** est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Notation : *une bonne réponse rapporte* 1 *point. Une mauvaise réponse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.*

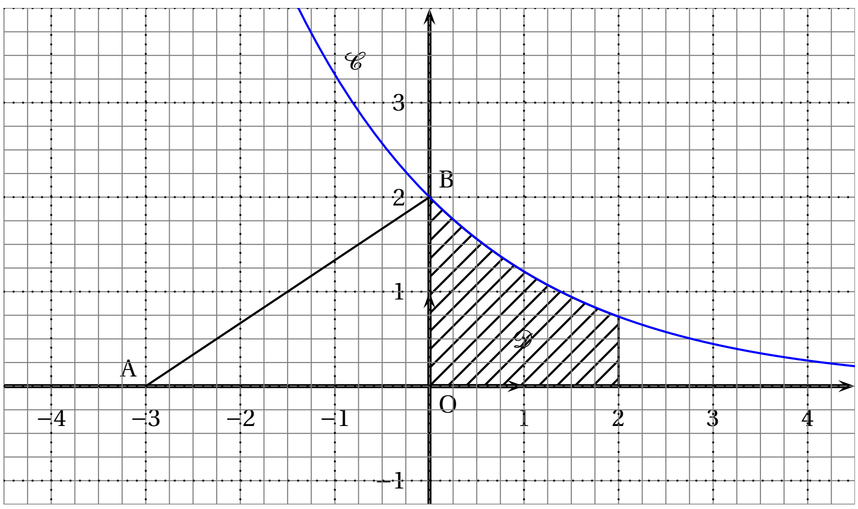
On définit la fonction f sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}.$$

Le plan est rapporté au repère orthononnal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On a tracé, ci-dessous, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On note A et B les points de coordonnées respectives $(-3\ ;\ 0)$ et $(0\,;\,2)$.
On note $\mathscr{D}$ le domaine (hachuré ci-dessous) délimité par :

- la courbe $\mathscr{C}$,
- l'axe des abscisses,
- l'axe des ordonnées,
- la droite d'équation : $x = 2$.



Question 1 :
La fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) :
Réponse a. : (E) : $2y' + y = 0$
Réponse b. : (E) : $2y' - y = 0$
Réponse c. : (E) : $y' - y = 0$.
(y désigne une fonction inconnue définie sur l' ensemble des nombres réels de variable x ; y' désigne la fonction dérivée de la fonction y.)

Question 2 :
La courbe $\mathscr{C}$ a pour asymptote la droite d'équation :
Réponse a. : $y = -2x$;
Réponse b. : $x = 0$;
Réponse c. : $y = 0$.

Question 3 :
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation :
Réponse a. : $y = -2x + 2$;
Réponse b. : $y = -x + 2$;
Réponse c. : $y = x + 2$.

Question 4 :
On note S le solide de révolution engendré par la rotation du domaine $\mathscr{D}$ autour de l'axe des abscisses.
La valeur V du volume du solide S est donnée par :

$$\mathrm{V} = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x \quad \text{(en unités de volume).}$$

La valeur V du volume du solide S, en cm^2 est égale à :
Réponse a. : $4\pi\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right)$;
Réponse b. : $16\pi\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right)$;
Réponse c. : $32\pi\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right)$.

EXERCICE 2 **5 points**

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les nombres complexes suivants

$$Z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i},\quad Z_2 = \frac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} \text{ et } Z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe Z_1.
2. **a.** Écrire le nombre complexe Z_2 sous forme algébrique et montrer que : $Z_2 = \overline{Z_1}$.
   b. Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe Z_2.
3. Écrire le nombre complexe Z_3 sous forme algébrique.
4. On note Z le nombre complexe défini par : $Z = Z_2 Z_3$.
   a. Calculer le module et un argument du nombre complexe Z.
   b. Écrire le nombre complexe Z sous forme algébrique.
   c. En déduire les valeurs exactes des nombres réels $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

PROBLÈME **11 points**

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = a\ln x + bx + \frac{c}{x}$$

où $a,\ b$ et c sont trois nombres réels à déterminer. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

On a représenté la fonction f sur la feuille annexe dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de cette fonction f.

On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1. La tangente T passe par l'origine O du repère.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.

PARTIE A
Recherche de l'expression de $f(x)$

1. Préciser (sans justifier) les valeurs de $f(1),\ f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Déterminer $f'(x)$, en fonction de la variable x et des nombres réels $a,\ b$ et c.
3. Exprimer $f(1),\ f'(1)$ et $f'(2)$ en fonction des nombres réels $a,\ b$ et c.
4. En utilisant les réponses aux questions 1. et 3., montrer que les nombres réels $a,\ b$ et c sont solutions du système S suivant :

$$S : \left\{\begin{array}{rcl} b+c &=& 1\\ a+b-c &=& 1\\ 2a+4b-c &=& 0\end{array}\right.$$

5. Résoudre le système S. En déduire une expression de $f(x)$.

PARTIE B
Étude de la fonction f

Dans la suite du problème la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ \infty[$ par :

$$f(x) = 8\ln x - 3x + \frac{4}{x}.$$

1. Déterminer par calculs la limite de f en $+\infty$ (on peut factoriser $f(x)$ par x).
2. On rappelle que : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.

   En écrivant $f(x)$ sous la forme d'une seule fraction, déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Déterminer $f'(x)$ et vérifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ \infty[$:

$$f'(x) = \frac{(3x-2)(2-x)}{x^2}.$$

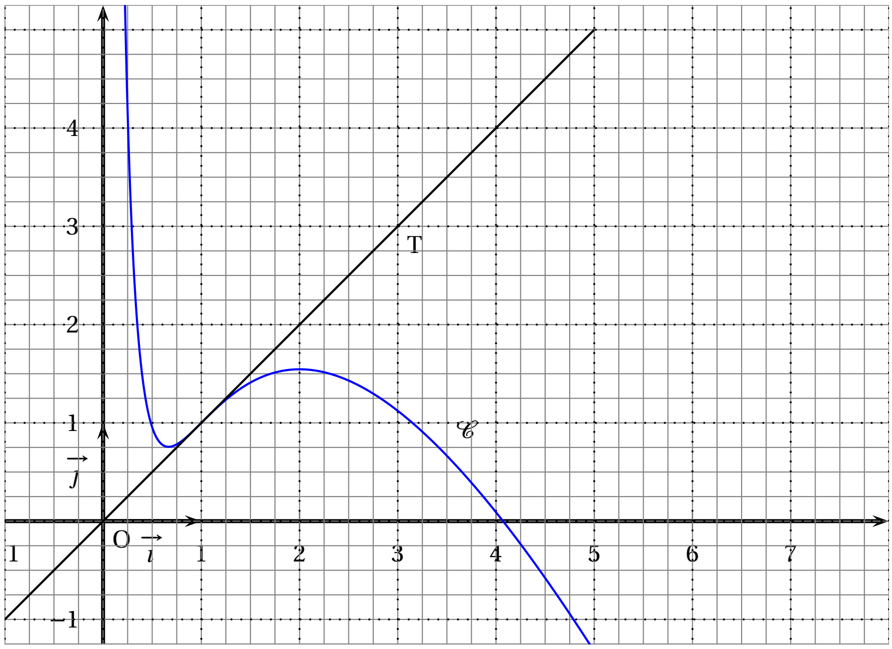
   Dresser le tableau de variations complet de la fonction f (justifier avec soin le signe de $f'(x)$.)

   Montrer que, sur l'intervalle $[4\ ;\ 5]$ l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution. notée α.

   Justifier l'encadrement de la solution α d'amplitude 10^{-1} suivant :

$$4,07 < \alpha < 4,08.$$

Feuille annexe



Baccalauréat STI France 23 juin 2009
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$4y" + y = 0, \qquad \text{(E)}$$

ou y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et ou y'' désigne sa dérivée seconde.

2. Le but de cette question est de trouver la solution particulière de (E), appelée f, dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est fournie en annexe. On note f' la fonction dérivée de f.

a. La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(0\,;\,1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$. En déduire les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

b. Montrer que la solution particulière f de l'équation (E) est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

3. Soit D le domaine du plan délimité par :
- l'axe des abscisses ;
- l'axe des ordonnées ;
- la droite d'équation $x = \pi$,
- la courbe $\mathcal{C}_f$.

Hachurer le domaine D sur la feuille annexe.

4. Montrer que $[f(x)]^2 = 1 + \sin(x)$.

5. On considère le solide de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des abscisses.
Calculer la valeur exacte, en unité de volume, du volume V de ce solide.
On rappelle que $V = \pi \displaystyle\int_0^{\pi} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par i le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$(z+4)(z^2 - 4z + 16) = 0.$$

2. On considère les nombres complexes définis par :

$$z_A = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} \qquad z_B = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} \qquad z_c = -4.$$

Calculer le module et un argument de z_A.
En prenant comme unité graphique 1 cm, placer dans le plan complexe (en utilisant une feuille de papier millimétré) le point A d'affixe z_A, le point B d'affixe z_B et le point C d'affixe z_C.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

- **a.** Démontrer que les points A, B, C appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- **b.** Placer le point D milieu du segment $[AC]$.
- **c.** Déterminer la nature du triangle BDA.

PROBLÈME **10 points**

Soit la fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \frac{5}{2} + \frac{1}{\mathrm{e}^x}.$$

On note f' sa fonction dérivée.
Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f'(x) = \frac{(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x + 1)}{\mathrm{e}^x}.$$

- **b.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- **c.** Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 5X + 2 = 0$ d'inconnue X.

- **b.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $2(\mathrm{e}^x)^2 - 5\mathrm{e}^x + 2 = 0$.
- **c.** En utilisant la question a., résoudre l'équation $2(\mathrm{e}^x)^2 - 5\mathrm{e}^x + 2 = 0$.
- **d.** Quelles sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses ?
- **e.** En utilisant les résultats des questions 2. c. et 3. d. déterminer le signe de $f(x)$sur $\mathbb{R}$.

4. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\ln(2)$.

5. En utilisant une feuille de papier millimétré, tracer dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{T}$: unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

6. Soit la fonction F, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression $F(x) = \mathrm{e}^x - \frac{5}{2}x - \frac{1}{\mathrm{e}^x}$.

- **a.** Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- **b.** En déduire la valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_{\ln(2)}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- **c.** Hachurer sur le graphique la partie du plan dont l'intégrale I donne la valeur de l'aire A en unité d'aire.
- **d.** Déduire des questions précédentes la valeur exacte de l'aire A de la partie hachurée, exprimée en cm^2. On donnera ensuite une valeur approchée de A à $0,1$ cm^2 près.

∽ Baccalauréat STI Antilles–Guyane juin 2009 ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **4 points**

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Le plan complexe est muni du repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante (E) :

$$(E) \quad : \quad (z-2)\left(\text{i}z+\text{i}+\sqrt{3}\right)=0.$$

On donnera la fonne algébrique des solutions.

2. Les points A et B ont pour affixes respectives : $z_{\text{A}} = 2$, $z_{\text{B}} = -1+\sqrt{3}\text{i}$.

a. Calculer le module et un argument de z_{A}.

b. Déterminer la forme trigonométrique de z_{B}.

c. Expliquer pourquoi les points A et B sont sur le même cercle Ω de centre O et de rayon 2,

d. On considère le point C d'affixe $z_{\text{C}} = -1+\lambda\text{i}$ où λ est un nombre réel négatif.
Déterminer le nombre λ tel que le point C soit sur le cercle Ω.
Que représente le nombre complexe z_{C} par rapport au nombre complexe z_{B}. ?

e. Sur la feuille annexe 1, placer avec soin les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
(On laissera apparents les traits de construction à la règle et au compas. Ces traits seront pris en compte dans l'évaluation de la question.)

f. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

EXERCICE 2 **5 points**

Un objet produit en série a un coût de production de 95 euros.
Un objet défectueux à l'issue de sa fabrication peut présenter seulement le défaut A, seulement le défaut B, ou les deux défauts A et B simultanément.
La garantie permet d'effectuer les réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants :

– 10 euros pour le seul défaut A,
– 15 euros pour le seul défaut B,
– 25 euros pour les deux défauts A et B.

1. Sur un lot L de 200 objets prélevés sur l'ensemble de la production, on constate que 16 objets ont au moins le défaut A, 12 objets ont au moins le défaut B et 180 objets n'ont aucun des deux défauts.

a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

Nombre d'objets du lot L	Avec le défaut A	Sans le défaut A	Total
Avec le défaut B			
Sans le défaut B			
Total			

b. On prélève au hasard un objet panni les 200 objets du lot L, décrits précédemment.

Calculer la probabilité p_1 que cet objet ne présente aucun défaut. On donnera la valeur décimale de p_1.

c. On prélève au hasard un objet parmi les 200 objets du lot L, décrits précédemment.

Calculer la probabilité p_2 que cet objet présente seulement le défaut A. On donnera la valeur décimale de p_2.

2. *Pour la suite de l'exercice. on admettra que, sur l'ensemble de la production,* 90 *% des objets n'ont aucun défaut,* 4 *% des objets ont le seul défaut A.* 2 *% des objets ont le seul défaut B et* 4 *% des objets ont les deux défauts A et B.*

On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard sur l'ensemble de la production, associe son prix de revient, c'est-à-dire le coût de production augmenté éventuellement du coût de réparation.

a. Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. (On pourra présenter cette loi sous la fonne d'un tableau,)

c. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$ de cette variable aléatoire X. Que représente-t-elle pour l'usine ?

On admet pour la suite de l'exercice que tous les objets produits sont vendus.

d. L'usine peut-elle espérer faire des bénéfices en vendant 96 euros chaque objet produit ?

e. L'usine veut faire un bénéfice moyen de 10 euros par objet.

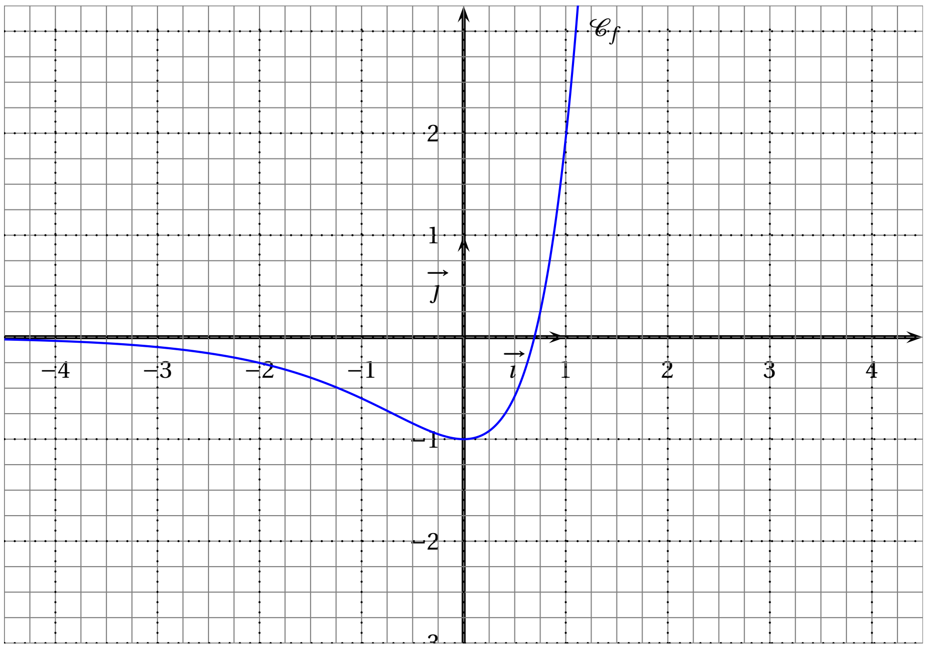
Expliquer comment on doit alors choisir le prix de vente d'un objet produit.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

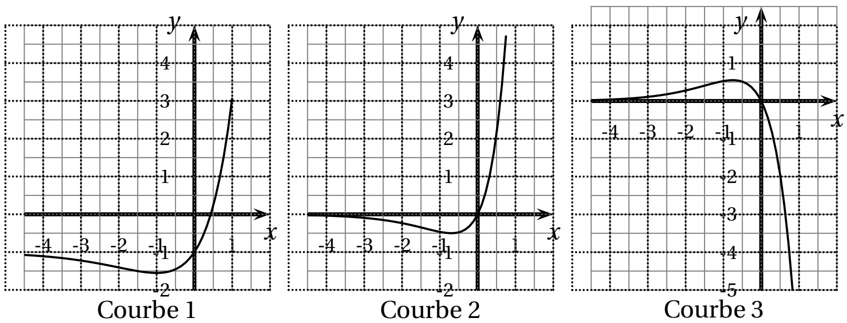
f est une fonction définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

La courbe représentative de cette fonction f, notée $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.



Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Parmi les trois courbes données ci-dessous se trouve la représentation graphique de la fonction f', où f' désigne la fonction dérivée de f. Indiquez de quelle courbe il s'agit en justifiant votre choix.



2. La fonction f est définie par

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} - 2\mathrm{e}^{x},\ \text{où } \alpha \text{ est un nombre réel.}$$

Sachant que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $(0\ ;\ -1)$ est horizontale, déterminer le nombre α. On détaillera le raisonnement et les calculs.

Partie B

La fonction f est la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x}.$$

La fonction f' est la fonction dérivée de la fonction f.

1. Déterminer, en justifiant par des calculs, la limite de $f(x)$ en $+\infty$ (on pourra factoriser par e^{x}).
2. Déterminer, en justifiant par des calculs, la limite de $f(x)$ en $-\infty$. Interpréter graphiquement.

3. Vérifier que pour tout nombre réel x : $f'(x) = 2\text{e}^x\left(\text{e}^x - 1\right)$.
Dresser le tableau de variations complet de la fonction f (on justifiera soigneusement le signe de $f'(x)$.

Partie C

Soit g la fonction définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \text{e}^x + 4.$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $X^2 - 3X - 4 = 0$.

2. En déduire les coordonnées du (ou des) points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

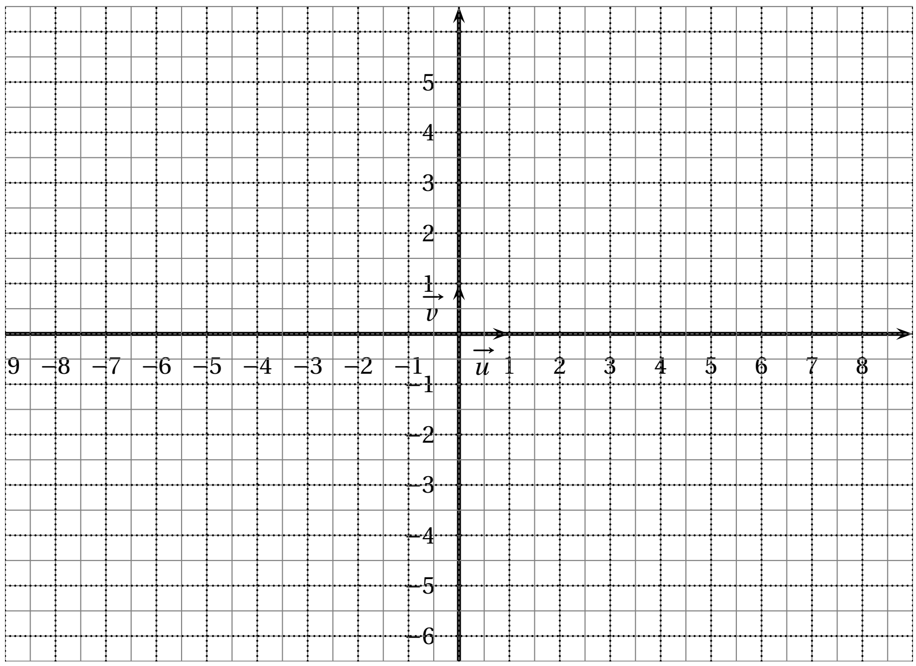
$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont données en annexe 2, dans le même repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. L'unité est 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

On note S le domaine du plan délimité par la droite d'équation $x = 0$, la droite d'équation $x = 1$, la courbe $\mathcal{C}_f$ et la courbe $\mathcal{C}_g$.

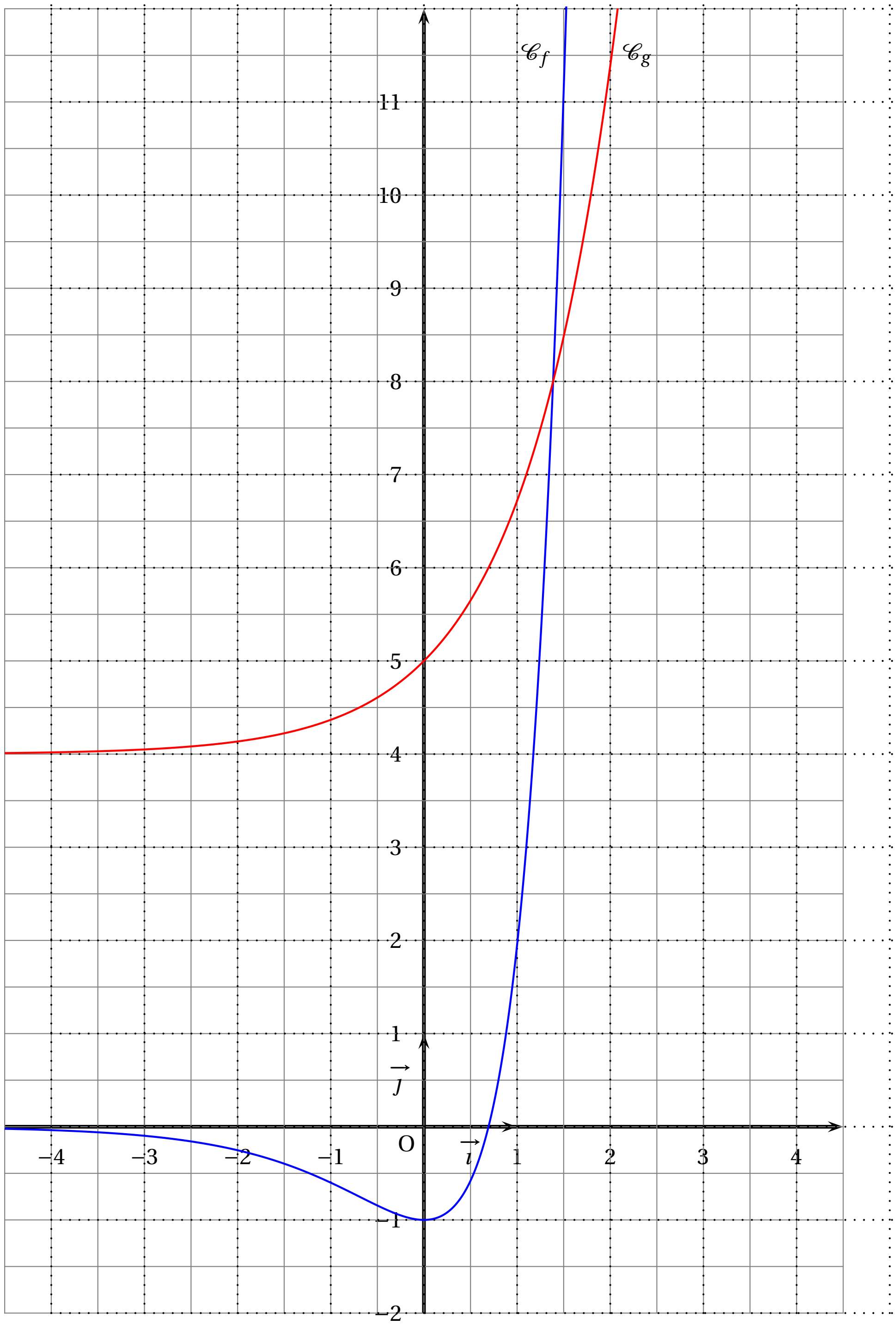
a. Hachurer sur la feuille **annexe 2** le domaine S.

b. Calculer, en unités d'aire puis en cm^2, la mesure de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine S.

Annexe 1 (à rendre avec la copie)



Annexe 2 (à rendre avec la copie)



Baccalauréat STI France septembre 2008
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **5 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Partie A

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm sur chaque axe.
Soit P le polynôme défini par :

$$P(z) = z^3 - z^2 - 2z - 12$$

1. **a.** Calculer $P(3)$. Que peut-on en déduire pour le polynôme P ?
   b. Déterminer les réels a, b et c tels que $P(z) = (z-3)\left(az^2 + bz + c\right)$.
2. **a.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + 2z + 4 = 0.$$

   b. En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Partie B

Soit A, B, C et D les points du plan complexe d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -1 + \text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad z_{\text{B}} = 2\text{e}^{-2\text{i}\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z_{\text{C}} = 3 - \left(3\sqrt{3}\right)\text{i} \quad ; \quad z_{\text{D}} = 3$$

1. **a.** Calculer le module et un argument de z_{A} puis écrire z_{A} sous forme trigonométrique.
   b. Écrire z_{B} sous forme algébrique.
2. Placer sur la feuille de papier millimétré les points A, B, C et D dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   a. Montrer que : $\overrightarrow{\text{DC}} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\text{AB}}$.
   b. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 2 **4 points**

Un industriel se fournit en pièces détachées chez deux fournisseurs différents : le producteur Lavigne et le producteur Olivier. Les pièces fournies ont trois niveaux de qualité différents, en fonction des utilisations prévues. Ces niveaux de qualité influent sur la durée de vie estimée des pièces selon le tableau 1 où les durées de vie estimées sont exprimées en années.

	Qualité supérieure	Qualité ordinaire	Qualité « premier prix »
Producteur Lavigne	5	3	2
Producteur Olivier	3	2	1

Tableau 1 : durées de vie estimées des pièces en années.

Baccalauréat STI Génie des matériaux, mécanique

Un lot est constitué de 2 000 pièces indiscernables suivant le tableau 2 ci-dessous :

	Qualité supérieure	Qualité ordinaire	Qualité « premier prix »	Total
Producteur Lavigne	100		500	800
Producteur Olivier	400	500		
Total				2 000

Tableau 2 répartition des pièces en fonction de leur origine et de leur qualité.

1. **a.** Recopier et compléter le tableau 2.

   b. Montrer que 1 000 pièces ont une durée de vie estimée de deux ans.
2. On choisit une pièce au hasard, chaque pièce ayant la même probabilité d'être choisie.

   a. Déterminer la probabilité que la durée de vie estimée de la pièce choisie soit de deux ans.

   b. On suppose que la pièce choisie provient du producteur Lavigne. Quelle est alors la probabilité que sa durée de vie estimée soit de deux ans ?
3. On note X la variable aléatoire qui, pour chaque pièce du lot considéré, associe sa durée de vie estimée.

   a. Déterminer la probabilité de l'évènement « $X = 3$ ».

   b. Établir sous forme d'un tableau la loi de probabilité de X.

   c. Calculer l'espérance de X. Interpréter ce nombre.

PROBLÈME **4 points**

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression :

$$f(x) = \ln\left(1 + e^x\right) - 1.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A Étude de la fonction *f*

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$. Donner une interprétation graphique du résultat.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

   a. Étudier le signe de $f'(x)$ et établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

   b. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point E d'abscisse 0.
3. **a.** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) - (x - 1) = \ln(1 + e^x) - \ln(e^x)$.
   En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(x) - (x - 1) = \ln(e^{-x} + 1)$.

   b. Déterminer la limite de $f(x) - (x - 1)$ en $+\infty$. Donner une interprétation graphique du résultat.

   c. Soit Δ la droite d'équation : $y = x - 1$.
   Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.
4. En prenant comme unité graphique 2 cm sur chaque axe, construire sur une feuille de papier millimétré la droite T, la droite Δ, la droite d'équation : $x = 1$, et la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie B Encadrement d'une aire

1. Hachurer sur le graphique la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = 2$.

   On va déterminer un encadrement de la valeur de l'aire $\mathscr{A}$, de cette surface en unités d'aire.
2. Tracer la droite D d'équation : $y = 0,8x - 0,2$.
3. Par lecture graphique préciser la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D sur l'intervalle $[1 ; 2]$.
4. On admet que :

$$\int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 (0,8x-0,2)\,\mathrm{d}x.$$

   a. Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^2 (0,8x-0,2)\,\mathrm{d}x$.

   b. En déduire un encadrement de $\mathscr{A}$.

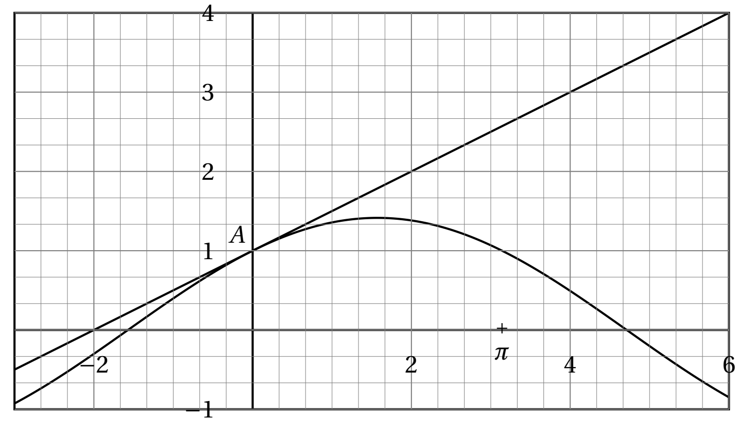


FIGURE 1 – Annexe – À rendre avec la copie