Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole septembre 2009

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 — 4 points

Ceci est un QCM. Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B, C, ou D est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
On ne demande *aucune justification.*
NOTATION : *Chaque réponse juste rapporte un point, une réponse fausse coûte* 0,25 *point. Une absence de réponse ne rapporte ni ne coûte de point.*
Si la note globale de l'exercice est négative, elle est ramenée à zéro.

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$

1. $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

Réponse A : $f(x) = \cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x$ — Réponse B : $f(x) = \sqrt{3}\cos\frac{1}{3}x + \sin\frac{1}{3}x$

Réponse C : $f(x) = \cos\frac{1}{9}x + \sqrt{3}\sin\frac{1}{9}x$ — Réponse D : $f(x) = \cos\frac{1}{3}x + \sqrt{3}\sin\frac{1}{3}x$.

2. f est solution de l'équation différentielle :

Réponse A : $y'' - 9y = 0$ — Réponse B : $9y'' + y = 0$

Réponse C : $y'' + 3y = 0$ — Réponse D : $y'' + \frac{1}{3}y = 0$.

3. La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ est :

Réponse A : $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ — Réponse B : $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ — Réponse C : $\frac{3}{\pi}$ — Réponse D : $-\frac{\pi}{2}$.

4. La solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ est :

Réponse A : $\frac{5\pi}{6}$ — Réponse B : $\frac{5\pi}{2}$ — Réponse C : $\frac{\pi}{6}$ — Réponse D : $-\frac{\pi}{2}$

EXERCICE 2 — 4 points

Dans une usine, le tableau de production de deux chaînes de montage est le suivant :

Mois	Productions mensuelles chaîne A	Productions mensuelles chaîne B	N° de rang des productions
Janvier 2009	2 056	1 770	1
Février 2009	2 069	1 805	2
Mars 2009	2 082	1 840	3
Avril 2009	2 095	1 875	4

Les productions forment des suites arithmétiques.

1. **a.** Quelle est la raison de la suite pour la chaîne A ? Justifier.
   b. Quelle est la raison de la suite pour la chaîne B ? Justifier.
2. En supposant que l'une des productions mensuelles de la chaîne B soit 2 050, quel serait alors son numéro de rang ?
3. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par A_n et B_n les productions mensuelles respectives de rang n des chaînes A et B.
   a. Exprimer A_n en fonction de n et de A_1.
   b. Exprimer B_n en fonction de n et de B_1. Retrouver ainsi le résultat de la question 2.
   c. À partir de quelle date (mois et année), la production de la chaîne B sera-t-elle supérieure ou égale à celle de la chaîne A ?

PROBLÈME **12 points**

Les objectifs de ce problème sont :
- l'étude de quelques propriétés d'une fonction f et de sa courbe représentative,
- un calcul d'aire entre deux courbes.

Partie A

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = x^2 + x + \mathrm{e}^{-x}$,
où y est une fonction de la variable réelle x et y' sa dérivée.
Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = (x+k)\mathrm{e}^{-x} + x^2 - x + 1,$$

où k désigne une constante réelle.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que la fonction f est solution de l'équation (E).
3. Déterminer le réel k pour que $f(0) = 1$.

Partie B

On considère les fonctions f et g définies, pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + x^2 - x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - x + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et $\mathscr{P}$ la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

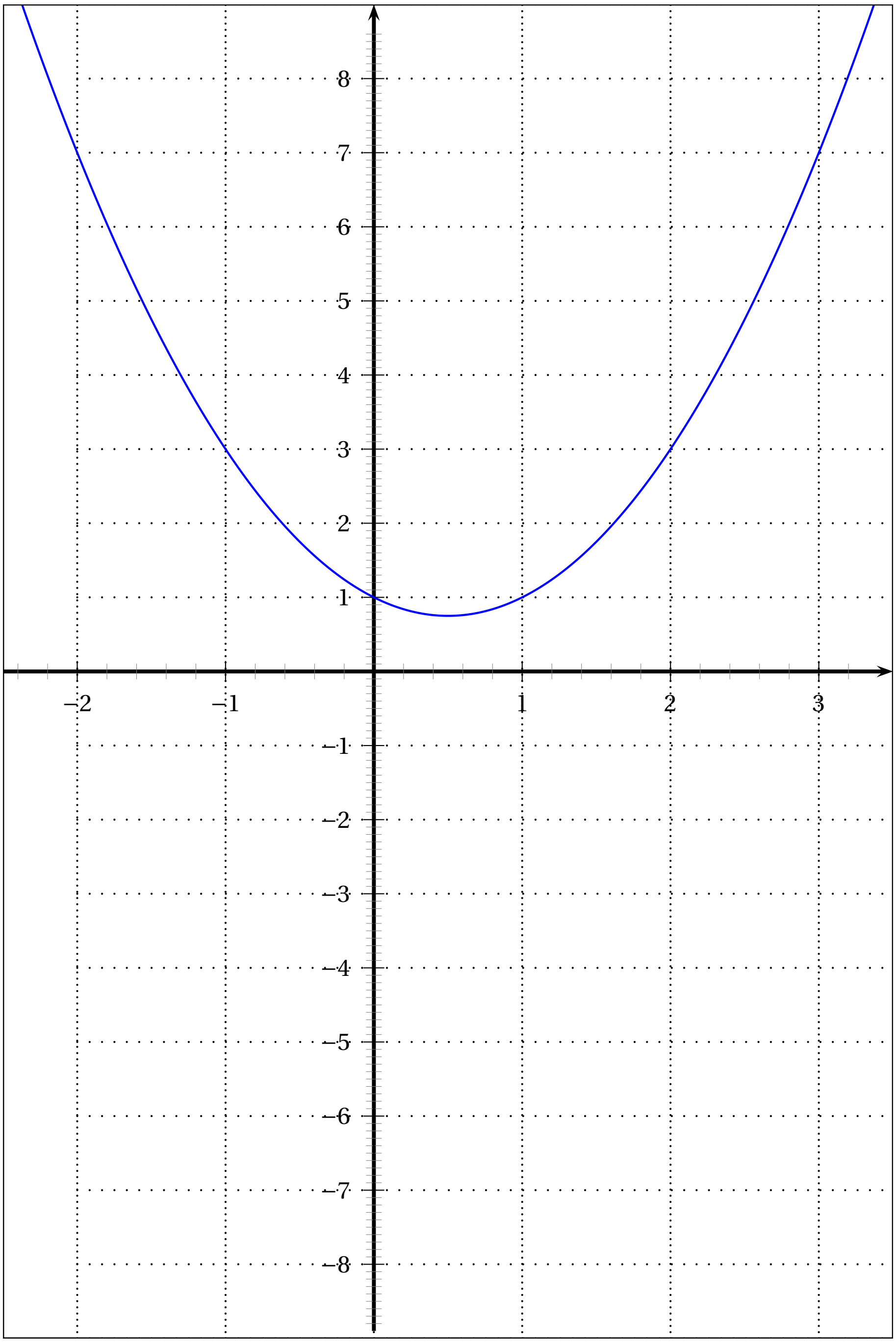
1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)]$. Interpréter graphiquement ce dernier résultat.
   c. Étudier sur $\mathbb{R}$ la position relative des deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.
2. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(1-x) + 2x - 1$.
   b. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.
3. Sur la feuille annexe :
   a. Compléter le tableau de valeurs arrondies au centième.
   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le cadre où a déjà été tracée la courbe $\mathscr{P}$.

Partie C

1. Démontrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (-x-1)\text{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\text{e}^{-x}$.
2. Soit A la partie du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$ où α est un nombre réel supérieur ou égal à 2.
   a. Colorier la partie A sur la feuille annexe dans le cas particulier où $\alpha = 2$.
   b. Pour $\alpha \geqslant 2$ quelconque, déterminer l'aire de la partie A en fonction de α, en unités d'aire puis en cm^2.
   c. Calculer $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} \left(-\alpha\text{e}^{-\alpha} - \text{e}^{-\alpha} + 1\right)$.
   d. Quelle est la limite de l'aire de A en cm^2 lorsque α tend vers $+\infty$?

FEUILLE ANNEXE À RENDRE OBLIGATOIREMENT AVEC LA COPIE

x	-2	$-1,5$	$-1,1$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$												



Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie septembre 2009
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Soit (E) l'équation d'inconnue complexe z : $z^2 - 8z + 41 = 0$.
   a. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
   b. On note z_1 la solution de l'équation (E) dont la partie imaginaire est positive et on note z_3 le nombre complexe défini par $z_3 = \dfrac{1}{8}\left(-z_1^2 - 25 + 16\text{i}\right)$.
   Démontrer que $z_3 = -2 - 3\text{i}$·
2. On note A, B, C et K les points du plan d'affixes respectives : $a = 4 + 5\text{i}$, $b = -3 + 4\text{i}$, $c = -2 - 3\text{i}$ et $k = 1 + \text{i}$.
   a. Placer les points A, B, C et K dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
   b. Démontrer que K est le milieu du segment [AC].
   c. Calculer $|a - k|$ et $|b - k|$ puis en déduire que les points A, B et C appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Soit D le symétrique de B par rapport à K ; on note d l'affixe du point D.
   a. Déterminer d et placer le point D dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
   b. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

EXERCICE 2 **4 points**

On note (E) l'équation différentielle

$$y'' + 4y = 0,$$

où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. On note f la solution particulière de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions :
   $$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2.$$
   Déterminer l'expression de la fonction f.
3. Démontrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.
4. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right]$.

PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 4\mathrm{e}^{-x} + 6x + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A : Étude des limites et recherche d'une asymptote

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Démontrer que $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{-x} + 4 + 6x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x}\right)$. En déduire la limite de f en $-\infty$.
3. On note h la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par
   $h(x) = f(x) - (6x + 1)$.
   Déterminer la limite de h en $+\infty$. Que peut-on en déduire ?
4. Déterminer le signe de $h(x)$ pour tout nombre réel x et en déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 6x + 1$.

Partie B : Étude des variations de la fonction f

1. Démontrer que la fonction dérivée f' de f est définie pour tout nombre réel x par :
   $$f'(x) = -2\left(\mathrm{e}^{-x} + 3\right)\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right).$$
2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'inéquation $\mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0$; en déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Construire la droite $\mathscr{D}$ puis la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie C : Calcul d'aire

m étant un nombre réel strictement positif, on note $\mathscr{A}(m)$ l'aire, en unités d'aire, comprise entre la droite $\mathscr{D}$, la courbe $\mathscr{C}$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = m$.

1. Exprimer $\mathscr{A}(m)$ en fonction de m.
2. Calculer $\mathscr{A}(1)$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée arrondie au centième.
3. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'équation
   $-4\mathrm{e}^{-2x} - 32\mathrm{e}^{-x} + 17 = 0$ $\left(\text{on pourra poser } X = \mathrm{e}^{-x}\right)$.
4. Déterminer le réel $m > 0$, tel que $\mathscr{A}(m) = \dfrac{19}{8}$.

Baccalauréat STI Métropole & La Réunion septembre 2009
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **6 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2. Soit z_0 le nombre complexe de module 2 et dont un argument est $\frac{\pi}{6}$.
   Calculer le module et un argument du nombre complexe z_0^3.
   En déduire la forme algébrique de z_0^3.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 8\text{i},\ z_{\text{B}} = 4\sqrt{3} + 4\text{i} \text{ et } z_{\text{C}} = \overline{z_{\text{B}}}$$

où $\overline{z_{\text{B}}}$ désigne le nombre complexe conjugué de z_{B}.

1. Calculer le module et déterminer un argument de z_{B} puis de z_{C}
2. Vérifier que $z_{\text{A}} = 8\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$.
3. On appelle z_{D} l'affixe du point D, image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   a. Déterminer z_{D} et l'écrire sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$, où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.
   b. En déduire que $z_{\text{D}} = -4\sqrt{3} + 4\text{i}$.
4. **a.** Placer les points A, B, C et D dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ en prenant comme unité graphique 1 cm.
   b. Démontrer que le triangle OAD est équilatéral.
   c. Démontrer que le point O est le milieu du segment [CD].
   d. Déterminer la nature du triangle ACD.

EXERCICE 2 **4 points**

Pour un jeu de hasard, on place dans un sac opaque cinq jetons numérotés de 1 à 5, indiscernables au toucher.

1. Lors d'une partie, un joueur pioche au hasard dans le sac un jeton qu'il place devant lui. Il pioche ensuite au hasard un second jeton qu'il place à droite du premier, formant ainsi un nombre de deux chiffres. Le premier jeton tiré indique donc le chiffre des dizaines et le second celui des unités.
   a. À l'aide d'un arbre, écrire les 20 nombres qu'il est possible d'obtenir.
   b. Soit M_2 l'évènement « le nombre obtenu est un multiple de 2 » et M_3 l'évènement « le nombre obtenu est un multiple de 3 ».
   Démontrer que $P(\text{M}_2) = P(\text{M}_3)$.

c. Déterminer la probabilité de l'évènement A : « le nombre ohtenu est un multiple de 3 qui n'est ni un multiple de 2 ni un multiple de 5 ».

2. Un joueur doit miser 3 euros pour faire une partie.
Si le nombre obtenu est un multiple de 2, le joueur perçoit 2 euros.
Si le nombre obtenu est un multiple de 3,le joueur perçoit 3 euros.
Si le nombre obtenu est un multiple de 5, le joueur perçoit 5 euros.
Les sommes perçues sont cumulatives. (*Par exemple, si le joueur obtient le nombre* 45 *qui est à la fois un multiple de* 3 *et de* 5, *il perçoit* 8 *euros*).
On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain (positif ou négatif) finalement réalisé par le joueur en tenant compte de la mise initiale. (*Par exemple, si le joueur obtient le nombre* 45, *la variable aléatoire X prend la valeur* $8-3=5$).

a. Démontrer que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont -3 ; -1 ; 0 ; 2 et 5.

b. Démontrer que $P(X=0)=\dfrac{1}{10}$.

c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

3. a. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

b. Le jeu est-il équitable ?

PROBLÈME **10 points**

Partie A : Détermination d'une fonction *g*

On désigne par (E) l'équation différentielle

$$2y'+y=0,$$

dans laquelle y désigne une fonction de la variable x définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. y' désigne la fonction dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Soit f la solution particulière de l'équation différentielle (E) vérifiant $f(2)=\mathrm{e}$.
Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x)=\mathrm{e}^{2-\frac{1}{2}x}$.

3. Pour tout nombre réel x, on pose $g(x)=(2x+1)[f(x)]^2-9$.
Montrer que $g(x)=(2x+1)\mathrm{e}^{4-x}-9$.

Partie B : Étude de la fonction *g*

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

2. a. Montrer, que pour tout nombre réel x, $g(x)=2\mathrm{e}^4x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^4\mathrm{e}^{-x}-9$.

b. Utiliser cette expression pour déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

c. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

3. a. On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g. Montrer que pour tout réel x, $g'(x)=(1-2x)\mathrm{e}^{4-x}$.

b. Déterminer le sens des variations de g et dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

4. a. Calculer la valeur exacte des nombres $g(-1)$ et $g(0)$.

b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-1 ; 0]$.

c. Donner l'arrondi au centième de α.

5. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4.

6. a. Compléter le tableau de valeurs de g qui se trouve sur la feuille annexe à rendre avec la copie.
On arrondira les valeurs à l'unité.

b. Tracer la droite Δ, la droite $\mathscr{D}$, puis la courbe $\mathscr{C}$, dans le repère figurant sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

Partie C : Calcul d'aire

1. Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = (-2x-3)\mathrm{e}^{4-x} - 9x$$

est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.

2. a. Hachurer la partie $\mathscr{H}$ du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.

b. Calculer en unités d'aire la mesure exacte de l'aire de la partie $\mathscr{H}$ du plan.

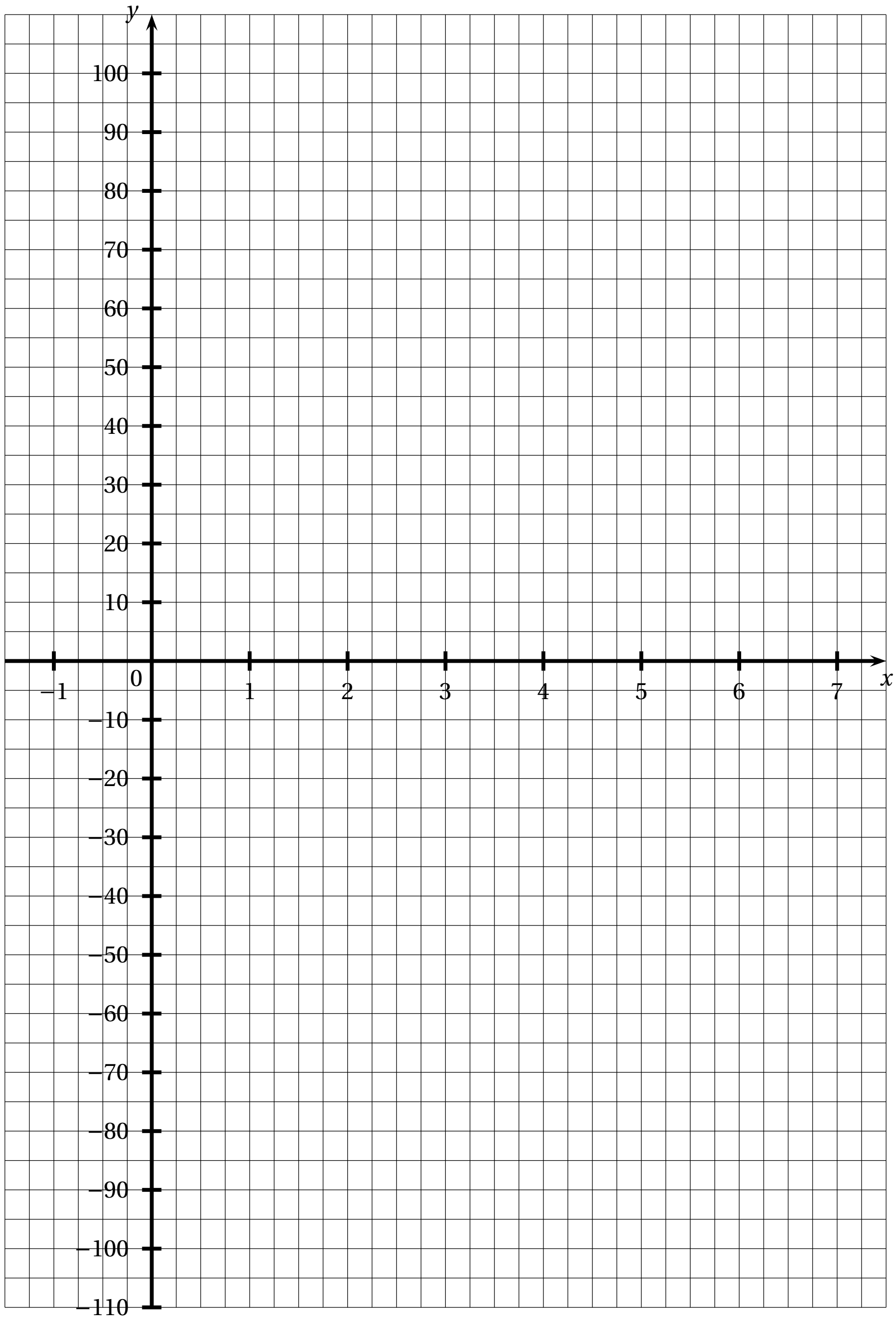
c. En déduire en cm^2 la valeur arrondie au centième de l'aire de de $\mathscr{H}$.
On rappelle que les unités graphiques sont : 2 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour 10 unités en ordonnée.

Annexe du problème à rendre avec la copie

Tableau des valeurs de la fonction g (valeurs arrondies à l'unité)

x	$-0,75$	$-0,5$	$-0,25$	0	0,5	1	2	3	4	5	6
$g(x)$											

Repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour 1 unité en abscisse et 1 cm pour 10 unités en ordonnée



∽ Baccalauréat STI Antilles–Guyane septembre 2009 ∾
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **4 points**

Dans cet exercice, les quatre questions sont **indépendantes**.
Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On considère le nombre complexe $z = -1 + \text{i}\sqrt{3}$.
   Écrire z sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.
2. Soit A le point du plan d'affixe $_{\text{A}} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$ et A′ l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe de A′ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
3. On considère les points B, C et D du plan d'affixes respectives :

   $$z_{\text{B}} = 1 + 2\text{i},\ z_{\text{C}} = 4 - \text{i},\ z_{\text{D}} = -1 - 3\text{i}.$$

   Calculer les distances DB et DC. Donner une interprétation géométrique du résultat.
4. Déterminer le réel c pour que le nombre complexe $-4 + 2\text{i}$ soit solution de l'équation :

   $$z^2 + 8z + c = 0.$$

   Résoudre ensuite cette équation dans l'ensemble $\mathbb{C}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Une personne possède un téléphone portable dont le code comporte quatre chiffres.
Elle ne se souvient plus de ce code et dispose seulement des informations suivantes :
- les quatre chiffres sont pris parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6 et sont tous différents ;
- le deuxième chiffre est un 2 et le quatrième est un 5.

La situation peut être schématisée de la façon suivante :

?	2	?	5

En tenant compte de toutes ces informations, cette personne saisit un code en choisissant au hasard les deux chiffres manquants.

1. Écrire la liste des douze codes de quatre chiffres qui sont alors possibles.
2. Sachant que ces douze codes sont équiprobables et que le bon code est :

3	2	6	5

   déterminer les probabilités respectives p_1, p_2 et p_3 des évènements suivants :

   a. « Le code saisi est correct ».

   b. « Le code saisi ne comporte aucun chiffre exact bien placé à part les deux déjà connus ».

   c. « Le code saisi comporte au moins un chiffre exact bien placé en plus des deux chiffres déjà connus ».

3. On définit la variable aléatoire X qui, à chaque code saisi, associe le nombre total de chiffres exacts bien placés (y compris ceux déjà connus au départ).
   a. Déterminer la probabilité de l'évènement « X = 3 ».
   b. Donner les trois valeurs prises par la variable aléatoire X.
   c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

PROBLÈME **12 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A : Étude d'une fonction f

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par :

$$f(x) = 1 + \ln(2x+1)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
La courbe $\mathscr{C}$ est donnée en annexe pour aider le candidat et lui permettre de vérifier ses réponses.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\frac{1}{2}$ et en donner une interprétation graphique.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.
   c. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a $f(x) \geqslant 1$.
3. **a.** Résoudre dans l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ l'équation : $1 + \ln(2x+1) = 0$.
   b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec chacun des axes du repère.

Partie B : Étude d'une fonction g

Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note Γ la courbe représentative de g dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de g en $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de g en $+\infty$. Donner une interprétation graphique de cette limite.
2. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
   a. Démontrer que, pour tout réel x, $g'(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$.
   b. Étudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs du réel x et dresser le tableau de variation de la fonction g.
3. Vérifier que, pour tout réel x, on a $g(x) \leqslant 1$.
4. Tracer la courbe Γ dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}$ sur la feuille donnée en annexe.

Partie C : Calcul d'aire

1. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln(2x+1).$$

   a. Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.

   b. Calculer l'intégrale $I_1=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

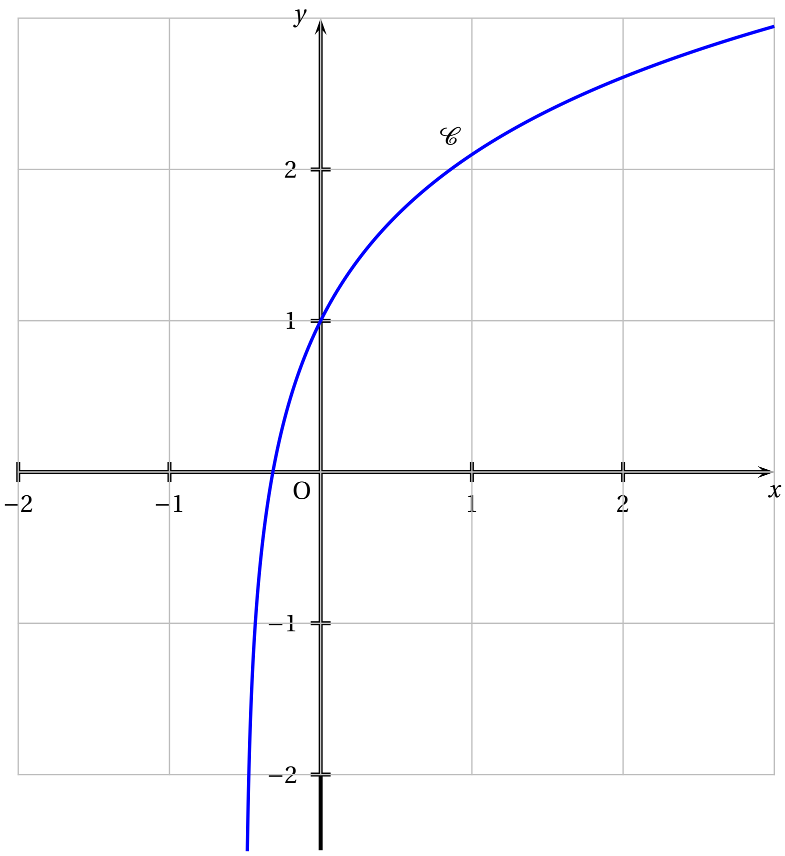
2. On considère la fonction G définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :
$G(x)=(-x-2)\mathrm{e}^{-x}$.
On admet que la fonction G est une primitive de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Calculer l'intégrale $I_2=\displaystyle\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$.

3. **a.** Démontrer, en utilisant des résultats établis dans les parties A et B, que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la courbe Γ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   b. Hachurer sur le graphique la partie $\mathscr{P}$ du plan délimitée par la courbe Γ, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$.

   c. Déduire de ce qui précède la valeur exacte de l'aire de la partie $\mathscr{P}$ exprimée en unités d'aire.

Annexe : À rendre avec la copie



Baccalauréat STI Antilles–Guyane septembre 2009 Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. Toutes les constructions demandées seront à faire sur le même graphique.
Soit A le point d'affixe $z_\text{A} = -5\text{i}$.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 25 = 0$.

   On note z_B la solution de cette équation dont la partie imaginaire est positive.

   b. Placer dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B.

2. **a.** Montrer que les points A et B appartiennent à un même cercle $(\mathcal{C})$ de centre O.

   b. Construire le cercle $(\mathcal{C})$.

Dans la suite de l'exercice, on note I, J et K les points d'affixes respectives z_I, z_J et z_K telles que :

- $z_\text{I} = 1 + \text{i}\sqrt{3}$,
- z_J est le nombre complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{5\pi}{6}$,
- $z_\text{K} = -z_\text{J}$.

3. **a.** Déterminer la forme algébrique de z_J.

   b. Comparer les modules des nombres z_I, z_J et z_K.

4. **Pour la question 4., toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.**

   a. Placer avec soin les points I, J et K et tracer le cercle $\left(\mathcal{C}'\right)$ circonscrit au triangle IJK dans le plan complexe en laissant apparents les traits de construction.

   Quelle est la nature du triangle IJK ? Justifier cette réponse.

   b. Soit (E) l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation : $2 < |z| < 5$.

   Représenter l'ensemble (E) sur le graphique précédent à l'aide de hachures, en expliquant la démarche mise en œuvre.

EXERCICE 2 **4 points**

Un bâtiment industriel est équipé d'une alarme qui se déclenche, en principe, lorsqu'il y a un dégât des eaux.
Il arrive cependant que ce système d'alarme soit mis en défaut.
On suppose qu'il ne peut pas y avoir plus d'un dégât des eaux par jour et qu'il ne peut pas y avoir plus d'un déclenchement d'alarme par jour.
Une étude portant sur 500 journées montre qu'il y a eu :

- 5 jours où il y a eu un dégât des eaux.
- 1 jour où il y a eu un dégât des eaux sans que l'alarme se déclenche.
- 10 jours où l'alarme s'est déclenchée sans qu'il y ait un dégât des eaux.

1. À l'aide des données de l'énoncé, recopier et compléter le tableau suivant.

	Nombre de jours où il y a un dégât des eaux	Nombre de jours où il n'y a pas de dégât des eaux	TOTAL
Nombre de jours où l'alarme se déclenche			
Nombre de jours où l'alarme ne se déclenche pas			
TOTAL			500

2. On choisit un jour au hasard parmi les 500 journées étudiées.
On considère les évènements suivants :
E : « Ce jour-là il y a un dégât des eaux »
A : « Ce jour-là l'alarme se déclenche »
Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

a. Calculer la probabilité $p(\text{A})$ de l'évènement A.

b. Soit B l'évènement : « le système d'alarme est mis en défaut ».
Calculer la probabilité $p(\text{B})$ de l'évènement B.

c. Sachant que ce jour-là, l'alarme s'est déclenchée, quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un dégât des eaux ?

3. On admet que les probabilités calculées au 2. restent valables si on choisit n'importe quel jour au hasard, quelle que soit sa date.
Pour une journée donnée, on peut se trouver dans l'une des quatre situations suivantes :

- il y a un dégât des eaux et l'alarme se déclenche,
- il y a un dégât des eaux et l'alarme ne se déclenche pas,
- l'alarme se déclenche sans qu'il y ait un dégât des eaux,
- rien ne se passe.

Les assureurs estiment les coûts suivants pour le bâtiment :

- 1 000 euros pour un dégât des eaux lorSQue l'alarme fonctionne.
- 3 000 euros pour un dégât des eaux lorSQue l'alarme ne fonctionne pas.
- 150 euros lorsque l'alarme se déclenche par erreur.

On note X la variable aléatoire représentant le coût journalier pour le bâtiment industriel.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Quel est le coût moyen journalier de cette assurance ?

PROBLÈME **11 points**

PARTIE A : étude graphique d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2\text{e}^{2x} - 4\text{e}^{x}}{\text{e}^{2x} - 4\text{e}^{x} + 5}.$$

On a représenté en annexe la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\text{OI}}, \overrightarrow{\text{OJ}}\right)$ (avec OI = OJ = 2 cm).
La tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point B$(0\ ;\ -1)$ passe par le point M$(-1\ ;\ 0)$.

1. **a.** Montrer que pour tout réel x : $f(x) = \dfrac{2 - 4\text{e}^{-x}}{1 - 4\text{e}^{-x} + 5\text{e}^{-2x}}$.
En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe $(\mathscr{C})$, et compléter le graphique en annexe.

b. Montrer que le point A($\ln 2$; 0) est un point de la courbe ($\mathscr{C}$).

2. Par lecture graphique, en justifiant :
   a. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
   b. Déterminer la valeur de $f'(0)$.

PARTIE B : étude d'une primitive de f sur $\mathbb{R}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 5\right).$$

Soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\mathrm{OI}},~\overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$.

1. Étudier la limite de la fonction F en $-\infty$.
   Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe (Γ).
2. **a.** Montrer que pour tout réel x : $F(x) = 2x + \ln\left(1 - 4\mathrm{e}^{-x} + 5\mathrm{e}^{-2x}\right)$.
   b. Calculer la limite de la fonction F en $+\infty$ et la limite de $F(x) - 2x$ en $+\infty$.
   c. Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe (Γ).
3. **a.** Démontrer que la fonction f est la fonction dérivée de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
   b. Vérifier que $F(\ln 2) = 0$.
   c. Déduire de la partie A le tableau de variations de la fonction F.
4. Reproduire et compléter le tableau suivant avec des valeurs approchées à 10^{-2} près :

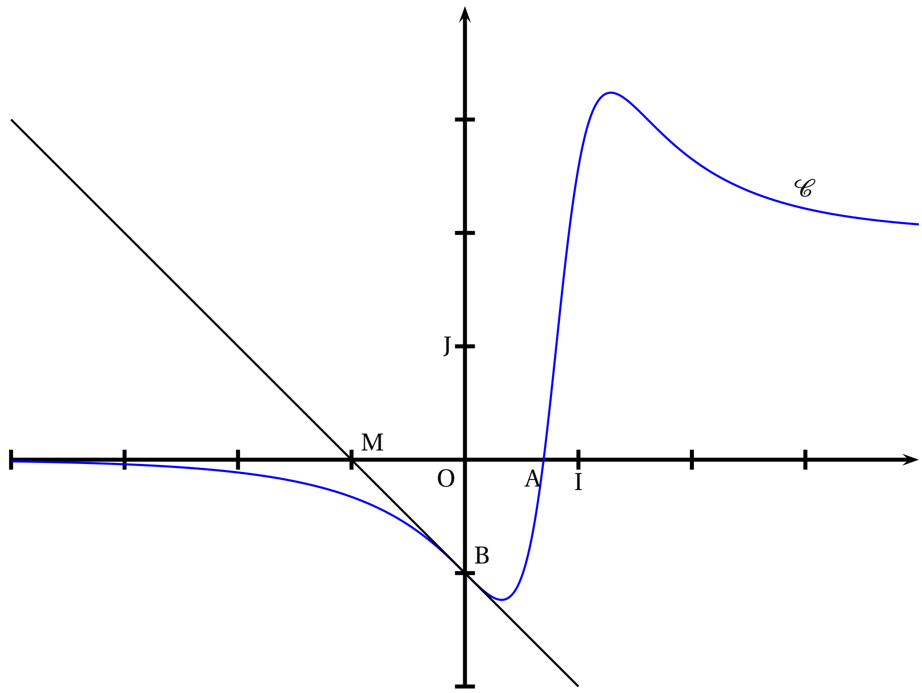
x	-2	-1	0	0,5	1	2
$F(x)$						

5. Tracer la courbe (Γ) dans un repère orthononné $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\mathrm{OI}},~\overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$ en faisant apparaitre les interprétations graphiques des questions 1. et 2. c.

PARTIE C : calcul d'une aire

1. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\ln 2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. De quel domaine le calcul précédent permet-il de calculer l'aire ?
   Hachurer sur le graphique de la feuille annexe ce domaine, et déterminer une valeur approchée de la mesure, en cm^2, de son aire (on exprimera la réponse à 0,01 cm^2 près).

ANNEXE à rendre avec la copie



∽ Baccalauréat STI Métropole septembre 2008 ∽
Génie des matériaux, mécanique

EXERCICE 1

1. Soit (E) l'équation différentielle : $y' + y = 0$, où y est une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a. Résoudre l'équation (E).
   b. Montrer que la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ est la fonction f définie par $f(x) = \text{e}^{-x}$.
2. a. Calculer la valeur moyenne de f sur $[2\,;\,3]$.
   b. Déterminer, en fonction de n, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[n\,;\,n+1]$.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \left(1-\text{e}^{-1}\right)\text{e}^{-n}$, pour tout n entier positif ou nul.
   Quelle est la nature de cette suite ?

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ orthonormal direct.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation

$$z^3 - 12z^2 + 48z = 0.$$

2. Soient A et B les points du plan d'affixes respectives z_A et z_B telles que $z_\text{A} = 6+2\text{i}\sqrt{3}$, $z_\text{B} = 6-2\text{i}\sqrt{3}$.
   a. En prenant comme unité graphique 1 cm, placer les points A et B dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
   (On utilisera une feuille de papier millimétré fournie avec le sujet)
   b. Calculer le module et un argument de z_A.
   c. Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.
   d. Soit Ω le point d'affixe 4. Démontrer que le points O, A et B se trouvent sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω dont on précisera le rayon en cm.

PROBLÈME

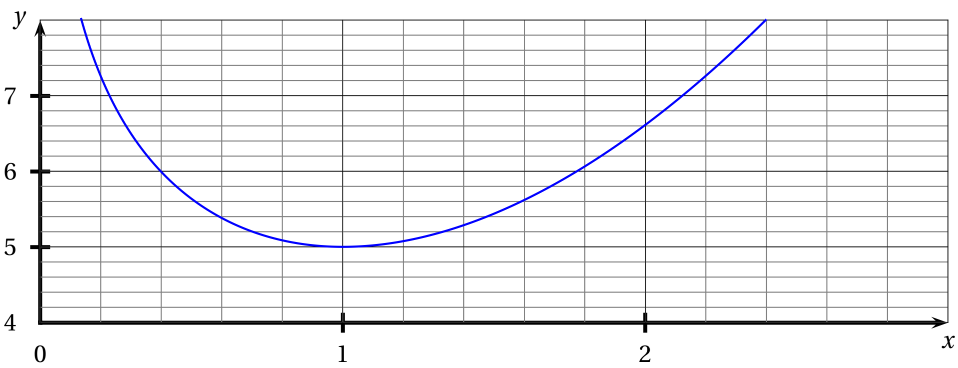
Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\text{I} =]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 - 2\ln(x) + 4$$

et dont la représentation graphique est donnée ci-après.

1. Soit g' la dérivée de g sur l'intervalle I. Montrer que $g'(x) = 2\dfrac{x^2-1}{x}$.
2. Dresser le tableau de variations de g sur I
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur I.



Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I, par

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{\ln(x) - 1}{x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Étudier la limite de f en $+\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

   b. Étudier la limite de f en 0 en remarquant que $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$.

2. On note f' la dérivée de f.

   a. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.

   b. En utilisant la partie A donner le signe de $f'(x)$. En déduire que la fonction f est croissante sur I.

   c. Calculer $f(1)$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur I.

3. Construire sur une feuille de papier millimétré, la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ en prenant comme unité graphique 2 cm.

Partie C

On considère la fonction F, définie et dérivable sur l'intervalle I, d'expression :

$$F(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}[\ln(x) - 1]^2.$$

1. Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f définie à la partie B.
2. Dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = \text{e}$.
   Hachurer la partie du plan située au dessus de l'axe des abscisses et délimitée par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
3. Que représente le nombre $A = 4[F(\text{e}) - F(1)]$.
   Calculer la valeur exacte de A, puis sa valeur arrondie au centième .

Baccalauréat STI Nouvelle–Calédonie novembre 2009
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **4 points**

Le nombre i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Partie I

Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 6z + 12 = 0.$$

Partie II

Le plan complexe est muni du repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$d'unité graphique 1 cm.
Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = 3 + \text{i}\sqrt{3}$.

1. Déterminer le module et un argument de z_{A}. Placer le point A dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
2. Soit R la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \left(\text{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)z$.
   - **a.** Quelle est cette transformation R ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   - **b.** On appelle B l'image du point A par la transformation R. On note z_{B} l'affixe du point B. Calculer la forme algébrique de z_{B}. Placer le point B dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
   - **c.** Quelle est la nature du triangle OAB ? Justifier la réponse.
3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $z_{\overrightarrow{w}} = -2\sqrt{3}\text{i}$.
   - **a.** On appelle C l'image du point A par la transformation T. On note z_{C} l'affixe du point C. Calculer la forme algébrique de z_{C}. Placer le point C dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
   - **b.** *Dans cette question, toute rédaction, même partielle, sera prise en compte.* Quelle est la nature du quadrilatère OCAB ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

1. Résoudre l'équation différentielle (E) :

   $$y'' + 4y = 0.$$

   où y est une fonction de la variable x, deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie : $f(0) = \frac{1}{4}$ et $f'(0) = 0$.
3. Montrer que la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $g(x) = 3\sin x$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
4. Pour tout nombre réel x, on définit la fonction h par :

   $$h(x) = 3\sin x + \frac{1}{4}\cos 2x.$$

   Calculer $h'(x)$ pour tout nombre réel x.

5. Questionnaire à choix multiples :
pour chaque question, il y a une seule réponse exacte ; recopier la réponse exacte sur la copie. Chaque réponse exacte rapporte 0,5 *point. Aucune justification n'est demandée.*

a. Quelle est la valeur de $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$?

$\rhd$ 3 $\quad\quad$ $\rhd$ $-\dfrac{1}{4}$ $\quad\quad$ $\rhd$ $\dfrac{11}{4}$

b. Quelle est la valeur moyenne de la fonction h sur l'intervalle $[0 ; \pi]$?

$\rhd$ $-\dfrac{3}{\pi}$ $\quad\quad$ $\rhd$ 0 $\quad\quad$ $\rhd$ $\dfrac{6}{\pi}$

c. Combien l'équation $h(x) = 0$ admet-elle de solutions dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$?

$\rhd$ 0 $\quad\quad$ $\rhd$ 1 $\quad\quad$ $\rhd$ 2

PROBLÈME **11 points**

Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
La courbe $\mathscr{C}$ tracée sur l'annexe ci-jointe est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en O et au point A de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2} ; 0\right)$.
On admet que les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses $\dfrac{1}{2}$ et 3 sont parallèles à l'axe des abscisses.
La droite Δ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point O et passe par le point B de coordonnées $(-1 ; 3)$.

Partie I Exploitation graphique de la courbe $\mathscr{C}$

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{7}{2}\right]$.
2. Donner le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{7}{2}\right]$.
3. Donner les valeurs $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $f'(3)$.
4. Donner une équation de la tangente Δ. En déduire $f'(0)$.
5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{7}{2}\right]$.

Partie II Étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

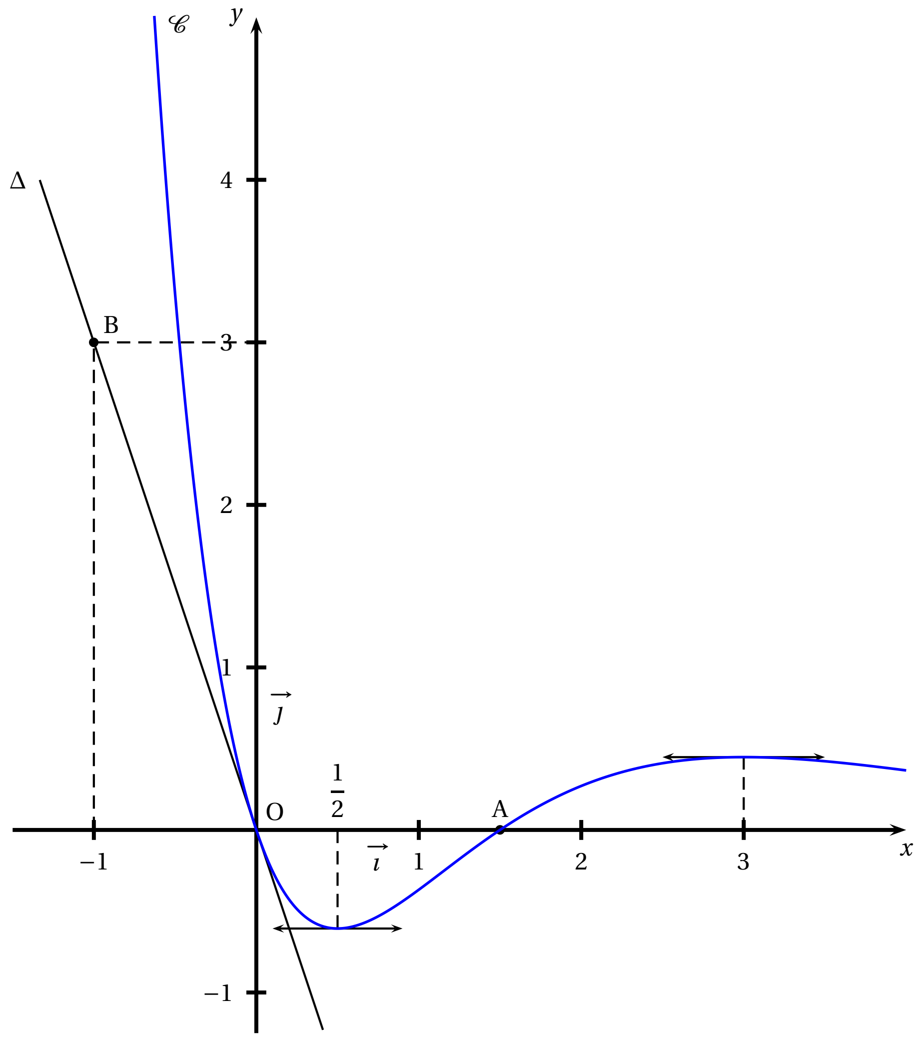
$$f(x) = \left(2x^2 - 3x\right)\text{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. Justifier la réponse.
2. Justifier que pour tout nombre réel x, $f(x) = \dfrac{2x^2}{\text{e}^x} - \dfrac{3x}{\text{e}^x}$ puis déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
3. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ puis montrer que $f'(x) = \left(-2x^2 + 7x - 3\right)\text{e}^{-x}$.

4. Étudier le signe de $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

Partie III Calcul d'aire

1. Calculer $f(2)$. Montrer que la fonction f est positive sur l'intervalle $[2\,;\,3]$.
2. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(-2x^2 - x - 1\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
3. Soit $\mathscr{D}$ le domaine du plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.
   a. Sur l'annexe, hachurer le domaine $\mathscr{D}$.
   b. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathscr{D}$, puis donner une valeur approchée au centième de l'aire du domaine $\mathscr{D}$.


$\mathscr{C}$
y
Δ
4
B
3
2
1
$\vec{\jmath}$
$\frac{1}{2}$
O
A
-1
$\vec{\imath}$
1
2
3
x
-1

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Novembre 2009 ∽ Génie mécanique - Génie énergétique - Génie civil Nouvelle-Calédonie

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d' argument $\frac{\pi}{2}$.

Soit P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^3 + 2z^2 - 16.$$

1. Résolution de l'équation $P(z) = 0$.

   a. Calculer $P(2)$ et déterminer deux nombres réels α et β tels que $P(z) = (z-2)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right)$.

   b. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

   On désigne par A, B, et C les points d'affixes respectives :
   $a = 2$; $b = -2 - 2\mathrm{i}$; $c = 4\mathrm{i}$. ,

2. Étude du triangle ABC

   a. Placer les points A, B, et C dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   b. Calculer les modules des nombres complexes $b - a$, $c - a$ et $c - b$.

   c. Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

   d. Déterminer l'affixe d du point D tel que le quadrilatère ABDC soit un carré.

3. On note Ω le point du plan d'affixe $\omega = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}$.

   a. Déterminer l'écriture algébrique de ω et placer le point Ω dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   b. Démontrer que les points A, B, C, et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

-

EXERCICE 2 **4 points**

1. On note (x_n) la suite arithmétique de premier terme $x_0 = 10$ et de raison r.
   Sachant que $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$, déterminer r et en déduire les valeurs de x_1, x_2, x_3 et x_4.

2. Un sac contient 100 boules indiscernables au toucher. Sur chacune de ces boules est inscrit l'un des numéros 0, 1, 2, 3 ou 4. Le nombre de boules portant chaque numéro est indiqué dans le tableau ci-dessous : t

Numéro de la boule	0	1	2	3	4
Nombre de boules portant ce numéro	10	15	20	25	30

   Un joueur tire au hasard une boule dans le sac, et on admet que les tirages sont équiprobables.

   Pour chaque entier n compris entre 0 et 4, on note P_n la probabilité que le joueur tire une boule portant le numéro n.

   Déterminer les valeurs des nombres P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4.

3. On convient de la règle du jeu suivante :

- si le numéro n de la boule tirée est impair, le joueur perd n euros (son gain est donc égal à $-n$ euros) ;
- si le numéro n de la boule tirée est pair, le joueur gagne n euros (son gain est donc égal à $+n$ euros) .

On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage d'une boule associe le gain du joueur.

a. Déterminer les valeurs possibles de la variable aléatoire X.

b. Justifier que la probabilité de l'évènement $(X = 2)$ est égale à $0,2$.

c. Donner, dans un tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire X puis déterminer son espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$.

d. On modifie la règle du jeu de façon à ce que les numéros pairs soient perdants (le gain est égal à $-n$ euros) et les impairs gagnants (le gain est égal à $+n$ euros).

Calculer, selon cette nouvelle règle, l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y associée au gain du joueur.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : résolution d'une équation différentielle

Dans cette partie, on se propose de déterminer une solution particulière de l'équation différentielle

$$(E_1) : \quad y' + 2y = x$$

où y désigne une fonction numérique de la variable x, définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_2) : \quad y' + 2y = 0$.

2. Vérifier que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, par $u(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$, est une solution de l'équation différentielle (E_1).

3. On admet que toute solution φ de l'équation (E_1) est de la forme $\varphi(x) = u(x) + C\mathrm{e}^{-2x}$ où C est un nombre réel quelconque et u la fonction définie à la question 2.

Déterminer la solution φ_0 de l'équation (E_1) telle que : $\varphi_0(0) = \dfrac{3}{4}$.

Partie B : étude d'une fonction

medskip

On note f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \mathrm{e}^{-2x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'unités 4 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées.

1. Étude des limites de la fonction f

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$·

b. Justifier que $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + 1\right)$ et en déduire la limite de f en $-\infty$.

c. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$, et préciser la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

2. Étude des variations de la fonction f
   a. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f·
   b. Résoudre l'inéquation $\text{e}^{-2x} \leqslant \dfrac{1}{4}$ et en déduire le tableau des variations de la fonction f.
   c. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.
   d. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ possède une unique solution sur l'intervalle $[1 ; 2]$. Justifier avec précision et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.
3. Tracer, dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$, puis tracer la courbe $\mathcal{C}$

Partie C : Calcul d'une aire

1. Soit m un nombre réel strictement supérieur à $\ln 2$. On note $\mathcal{A}(m)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite $\mathcal{D}$ et les droites d'équations $x = \ln 2$ et $x = m$·
   Déterminer $\mathcal{A}(m)$ en fonction de m.
2. Calculer la limite de $\mathcal{A}(m)$ lorsque m tend vers $+\infty$·

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI mars 2010 Nouvelle-Calédonie Génie mécanique - Génie énergétique - Génie civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Déterminer, sous forme algébrique, les nombres complexes z_1 et z_2 vérifiant le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1 + \text{i}z_2 & = & 2 + \text{i}\left(\sqrt{3}+1\right) \\ z_1 - \text{i}z_2 & = & \text{i}\left(\sqrt{3}-1\right) \end{array}\right.$$

2. On note A, B, C les points d'affixes respectives $a = 1 + \text{i}\sqrt{3}$, $b = 1 - \text{i}$, $c = ab$.

   a. Donner la forme algébrique de c.

   b. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes a, b et c.

   c. Placer les points A, B, C dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

3. Déduire de la question précédente, la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

4. Soit M un point quelconque du plan complexe d'affixe z.

   a. Interpréter géométriquement les modules $\left|z - (1+\text{i}\sqrt{3})\right|$ et $|z-(1-\text{i})|$.

   b. Déterminer alors l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M tels que $\left|z - (1+\text{i}\sqrt{3})\right| = |z-(1-\text{i})|$.

   c. Représenter l'ensemble $\mathcal{D}$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère l'équation différentielle notée

$$(E) \quad 4y'' + 9y = 0$$

où y désigne une fonction numérique de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f'(2\pi) = \frac{3}{2}.$$

3. Démontrer que pour tout nombre réel t : $f(t) = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{3}{2}t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = -\mathrm{e}^{-x} + x^2 + x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie pour tout nombre réel x par : $g(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x + 1$.
On note g' la fonction dérivée de g.

1. Calculer $g'(x)$.
2. Déterminer le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire le sens de variation de g sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et dresser son tableau de variations. On précisera la valeur exacte de l'extremum de g.
4. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout nombre réel x.

Partie B : Étude de la fonction *f*

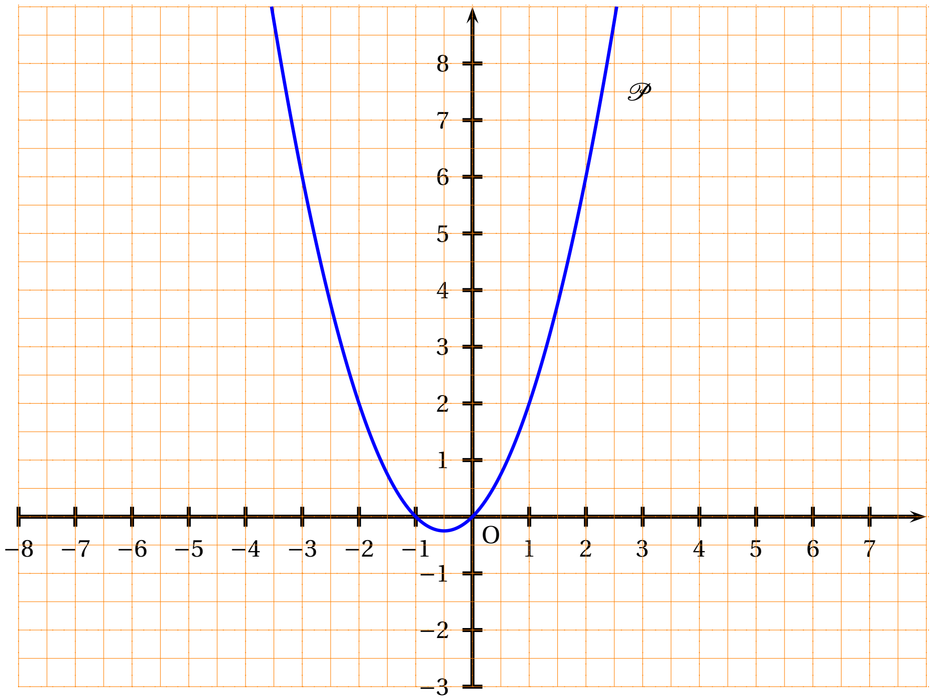
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Étude des limites de f
   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Vérifier que $f(x) = x^2\left(\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{(-x)^2} + 1 + \dfrac{1}{x}\right)$ et déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Étude des variations de f
   a. Montrer que pour tout nombre réel x : $f'(x) = g(x)$.
   b. Déduire de la partie A le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f·
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$.
   À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. On considère la fonction p définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $p(x) = x^2 + x$.
   Sa courbe représentative notée $\mathscr{P}$ est représentée sur la feuille annexe.
   a. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{P}$.
   b. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [f(x) - p(x)]$.
5. Construire dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la courbe $\mathscr{C}$ sur la feuille annexe en tenant compte des précédents résultats.

Partie C : Calcul d'une aire

1. Soit β un nombre réel strictement supérieur à 1. Calculer en unités d'aire, l'aire $\mathscr{A}(\beta)$ du domaine plan compris entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ d'une part, les droites d'équations $x = 1$ et $x = \beta$ d'autre part.
2. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\beta)$ quand β tend vers $+\infty$.

Feuille annexe à compléter et à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Antilles–Guyane juin 2010

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z suivantes :

a. $z^2 = -1$;

b. $z^2 - 4z + 13 = 0$;

c. $z - 3\text{i} = -2\text{i}z + 4$.

2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_A = \text{i},\ z_B = 2 + 3\text{i} \quad \text{et} \quad z_C = \frac{4 + 3\text{i}}{1 + 2\text{i}}.$$

a. Placer les points A et B dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

b. Calculer la distance AB.

c. Montrer que $z_C = 2 - \text{i}$.

3. **a.** Calculer le module et un argument de $z_C - z_A$.

b. En déduire l'écriture exponentielle de $z_C - z_A$.

c. Déterminer géométriquement l'ensemble E des points M d'affixe z du plan qui vérifient $|z - z_A| = 2\sqrt{2}$.

d. Justifier que les points B et C appartiennent à l'ensemble E puis tracer cet ensemble dans le plan.

EXERCICE 2 **5 points**

Un concessionnaire propose à ses clients, au moment d'acheter un véhicule neuf, d'équiper celui-ci avec des options :

- La peinture métallique (option A) pour un coût de 500 euros
- La climatisation (option B) pour un coût de 1 000 euros
- Un système GPS embarqué (option C) pour un coût de 1 500 euros

Le client est libre de choisir zéro, une ou plusieurs options parmi les trois proposées.

1. Déterminer le nombre de combinaisons d'options qu'il est possible de faire.

2. N'ayant aucune information sur le choix des clients, le concessionnaire suppose les combinaisons d'options équiprobables.

a. Calculer la probabilité qu'un client équipe son véhicule en choisissant au moins une option.

b. Calculer la probabilité qu'un client équipe son véhicule en choisissant au moins l'option B.

3. On note X la variable aléatoire associée au coût total (en euros) des options que peut choisir un client qui achète un véhicule chez ce concessionnaire.

a. Recopier puis compléter le tableau suivant :

k	0	500	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000
$p(X=k)$							

b. Calculer la probabilité qu'un client achète pour plus de 1 500 euros d'options.

c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X, qui représente le coût moyen (en euros) d'une combinaison d'options pour un véhicule.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Le concessionnaire propose la promotion : « l'option C au prix de l'option B ».
Calculer le pourcentage de baisse de son chiffre d'affaire moyen sur la vente des combinaisons d'options pour un véhicule.
(Comme à la question 2., on supposera les combinaisons d'options équiprobables.)

PROBLÈME **10 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} + 2x.$$

1. Soit h la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$h(x) = 1 - \ln x + 2x^2.$$

a. On note h' la fonction dérivée de h.
Montrer que $h'(x) = \dfrac{4x^2-1}{x}$ puis déterminer le signe de $h'(x)$ pour x dans $]0~;~+\infty[$.

b. Calculer $h\left(\dfrac{1}{2}\right)$ puis dresser le tableau de variations de h.
On ne déterminera pas les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

c. En déduire le signe de $h(x)$ pour x dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0 x>0} f(x)$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

c. Montrer que pour tout $x>0$, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ puis dresser le tableau de variations de f.

3. **a.** Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$.

b. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite Δ.

4. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

5. Tracer la courbe $\mathcal{C}$, et les droites $\mathcal{T}$ et Δ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

6. Soit G la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $G(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

a. Démontrer que G est une primitive de la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

b. Hachurer la partie du plan délimitée par les droites d'équation $x = 1$, $x = \mathrm{e}$, la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.

c. Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire de cette partie hachurée.

Baccalauréat STI Antilles–Guyane juin 2010
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **5 points**

Rappel : i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$z^2 - 10z + 50 = 0.$$

On explicitera les étapes de la résolution.

2. Pour tout nombre complexe z, on pose

$$P(z) = z^3 - 20z^2 + 150z - 500.$$

a. Calculer $P(10)$.

b. Déterminer des nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z, on ait :

$$P(z) = (z - 10)\left(az^2 + bz + c\right).$$

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 5 + 5\text{i}, \quad z_{\text{B}} = 5 - 5\text{i}, z_{\text{C}} = z_{\text{A}} + z_{\text{B}} \quad \text{et} \quad z_{\text{D}} = 5.$$

a. Placer les points A, B, C et D (on utilisera une feuille de papier millimétré et on prendra comme unité graphique 1 cm).

b. Déterminer le module et un argument de $z_{\text{A}}, z_{\text{B}}$ et z_{C}.

c. Déterminer, en justifiant, la nature du quadrilatère OACB.

4. Soit E le point d'affixe $z_{\text{E}} = 2 + 4\text{i}$.

a. Placer le point E sur la figure précédente.

b. Calculer les modules des nombres complexes $z_{\text{A}} - z_{\text{D}}$, $z_{\text{B}} - z_{\text{D}}$ et $z_{\text{E}} - z_{\text{D}}$.

c. Montrer que le triangle EAB est rectangle.

EXERCICE 2 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Dans chacune des questions suivantes trois affirmations sont proposées, une seule de ces affirmations est exacte. Sur la copie, noter le numéro de la question et recopier l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée.

Barème : Une réponse exacte rapporte 1 *point, une réponse inexacte enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse ou la donnée de plusieurs réponses à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Si le total donne un nombre négatif, la note attribuée à cet exercice sera ramenée à zéro.*

1. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = x + 1$ où la fonction inconnue y, de la variable x, est définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et y' désigne sa fonction dérivée.

- La fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 1$ est une solution de l'équation différentielle (E).
- La fonction g définie par $g(x) = \mathrm{e}^{-x} + x$ est une solution de l'équation différentielle (E).
- La fonction h définie par $h(x) = \mathrm{e}^{-x} + x + 1$ est une solution de l'équation différentielle (E).

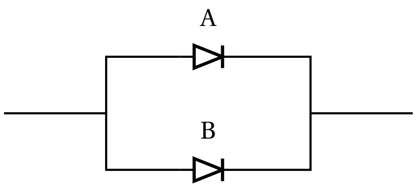
2. Un sac contient 32 jetons : huit rouges, huit jaunes, huit bleus et huit verts. Les huit jetons d'une même couleur sont numérotés de 1 à 8. Un joueur tire au hasard un jeton dans le sac. On suppose que les tirages des jetons sont équiprobables.
S'il tire le numéro 8 rouge, il gagne 16 euros ; s'il tire un numéro 8 qui n'est pas rouge, il gagne 8 euros ; s'il tire un jeton rouge qui n'est pas le numéro 8, il gagne 4 euros ; pour tout autre tirage, il perd 4 euros.

On note X la variable aléatoire qui, à chacun des résultats possibles du tirage, associe le gain ou la perte réalisé par le joueur en euros, un gain étant compté positivement et une perte négativement. Les valeurs que peut prendre X sont donc : 16 ; 8 ; 4 ; -4.

- La probabilité pour que X prenne la valeur 4 est égale à $\frac{1}{4}$.
- L'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut $-0,5$.
- La probabilité pour que X prenne une valeur inférieure ou égale à 4 est égale à $\frac{3}{4}$.

3. Un système est formé de deux amplificateurs A et B. À partir d'un signal appliqué à l'entrée E, on obtient un signal à la sortie S si au moins l'un des deux amplificateurs fonctionne.

On considère les évènements :
A : « L'amplificateur A fonctionne » ;
B : « L'amplificateur B fonctionne ».



On note P(A) et P(B) les probabilités respectives des évènements A et B.
On suppose que P(A) = 0,9 ; P(B) = 0,75 et que la probabilité pour que l'on n'ait pas de signal à la sortie est égale à 0,05. On note p la probabilité pour que A et B fonctionnent simultanément.

- $p = 0,15$.
- $p = 0,7$.
- $p = 0,75$.

4. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \mathrm{e}^{2+3n}$.

- La suite (u_n) est une suite arithmétique.
- La suite (u_n) est une suite géométrique.
- La suite (u_n) n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : Étude de signe

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1.$$

1. Montrer que, pour tout nombre réel x, $g(x) = \left(\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 1$.

2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 2 - \frac{3\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} + 1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

b. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

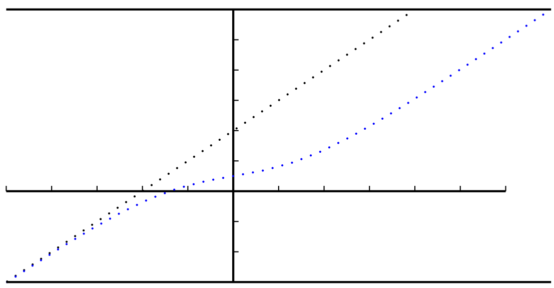
2. On considère la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x + 2$.

a. Démontrer que la droite $\mathscr{D}_1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

b. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}_1$.

3. *Dans cette question, loute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

En visualisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_1$ sur l'écran d'une calculatrice graphique, on obtient le tracé suivant, pour les abscisses comprises entre -5 et 7 et les ordonnées comprises entre -3 et 6, les graduations apparentes sur les axes correspondent aux coordonnées entières.



Au vu de ce tracé, deux élèves ont deviné que cette courbe admet une asymptote en $+\infty$, que l'on notera $\mathscr{D}_2$, le premier pense que $\mathscr{D}_2$ a pour équation $y = x - 1$, le deuxième n'est pas d'accord et pense que cette asymptote a pour éqllation $y = x - 2$.

En effectuant un calcul de limite, déterminer lequel des deux a raison.

4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(\mathrm{e}^{x} + 1)^2}$), où g désigne la fonction définie dans la partie A.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, qu'on notera α, sur l'intervalle $[-2~;~-1]$, puis déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

6. En utilisant une feuille de papier millimétré et en prenant comme unité graphique 2 cm, tracer, dans le plan muni du repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et Δ ainsi que la courbe $\mathcal{C}$.

Partie C : Calcul d'aire

1. Déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On pourra remarquer que $\dfrac{\text{e}^x}{\text{e}^x+1}$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

2. On note $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

  a. Hachurer cette partie du plan.

  b. On admet que la fonction f est positive sur $[-1~;~1]$. Écrire, à l'aide d'une intégrale, l'aire $\mathcal{A}$ exprimée en unités d'aire.

  c. Montrer que $\ln(\text{e}+1) - \ln\left(\text{e}^{-1}+1\right) = 1$.

  d. En déduire la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$.

3. On note $\mathcal{A}'$ l'aire de la partie du plan comprise entre la droite d'équation $y = \dfrac{1}{4}x + 2$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$, exprimée en unités d'aire. Montrer que $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI La Réunion juin 2010 ∽
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + 4z + 13 = 0.$$

2. Dans le plan complexe $\mathscr{P}$, on considère les points A, B et C d' affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = -2 - 3\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = -2 + 3\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{C}} = 3 - 2\mathrm{i}.$$

a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

b. Écrire $\dfrac{z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}}}$ sous forme algébrique.

c. En déduire la forme exponentielle de $\dfrac{z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}}}$.

d. En justifiant, donner la nature du triangle OAC.

3. On désigne par D l'image du point C par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a. Construire à la règle et au compas le point D dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On laissera apparents les traits de construction.

b. Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe z_{D} du point D.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Les points A, B, C et D semblent appartenir à une même figure géométrique. Laquelle ? On justifiera la réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.
Chaque bonne réponse rapporte 1 *point et chaque mauvaise réponse enlève* 0,5 *point.*
Une absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.
On notera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie.

Partie A

Dans une entreprise qui fabrique des pièces pour l'horlogerie, on souhaite étudier la conformité d'un type de pièce ayant la forme d'une roue dentée. Deux machines produisent ce type de pièce. Sur chacune des machines, on prélève 200 unités sortant de la chaîne de fabrication et on mesure avec précision le diamètre des roues dentées. On rassemble les résultats dans le tableau suivant :

Diamètre en mm	3,45	3,5	3,55	3,6
Nombre de pièces issues de la machine A	5	184	10	1
Nombre de pièces issues de la machine B	9	173	15	3

Une pièce est dite conforme lorsqu'elle a un diamètre de $3,5$ mm.

1. On tire au hasard une pièce dans le lot issu de la machine A. La probabilité que cette pièce soit conforme est de :

a. 0,8925 **b.** 0,92 **c.** 0,865 **d.** 1,02

2. On tire au hasard une pièce parmi les 400 qui ont été prélevées dans la production.
La probabilité que le diamètre de cette pièce soit supérieur ou égal à 3,5 mm est de :

a. 0,035 **b.** 0,8925 **c.** 0,0725 **d.** 0,965

3. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque pièce mesurée, associe l'écart par rapport à la dimension théorique de 3,5 mm. Le tableau suivant donne la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

x_i	$-0,05$	0	0,05	0,1
$P(X = x_i)$	0,035	0,892 5	0,062 5	0,01

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est de :

a. 0,2375 **b.** 2,375 **c.** 0,002 375 **d.** 0,005 875

Partie B

1. Une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 3y = 6x + 5$ est :

a. $x \longmapsto \mathrm{e}^{-3x}$ **b.** $x \longmapsto \mathrm{e}^{-3x} + 2x + 1$
c. $x \longmapsto \mathrm{e}^{3x} + 2x + 1$ **d.** $x \longmapsto \mathrm{e}^{-3x} + 2x + 3$

2. Une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$ est :

a. $x \longmapsto 2\cos(9x) + 5\sin(3x)$ **b.** $x \longmapsto 2\cos(3x) + 5\sin(3x)$
c. $x \longmapsto 2\cos(9x)$ **d.** $x \longmapsto 2\cos(9x) + 5\sin(9x)$

PROBLÈME **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, en prenant pour unité graphique 2 cm.
Sur la **feuille annexe jointe, à rendre avec la copie**, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = a\ln x + \frac{b}{x} + c,$$

où a, b et c désignent trois nombres réels.
On a également placé les points A et B de coordonnées respectives $(0~;~\ln 2 - 2)$ et $(-4\ln 2 + 8~;~0)$ dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. **a.** Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et de $f'(1)$.
   b. Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2, calculer $f'(2)$.
2. **a.** Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a et b.
   b. Montrer que a, b et c sont solutions du système $\left\{\begin{array}{rcr} b+c & = & -1\\ a-b & = & 0\\ 2a-b & = & 1\end{array}\right.$.
   c. Calculer a, b et c. En déduire l'expression de $f(x)$.

Partie B

Dans toute la suite du problème, on admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 2.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On admet que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
4. La courbe $\mathscr{C}$ semble couper l'axe des abscisses sur l'intervalle $[6~;~7]$.
   Prouver ce résultat, puis donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de l'abscisse du point d'intersection.

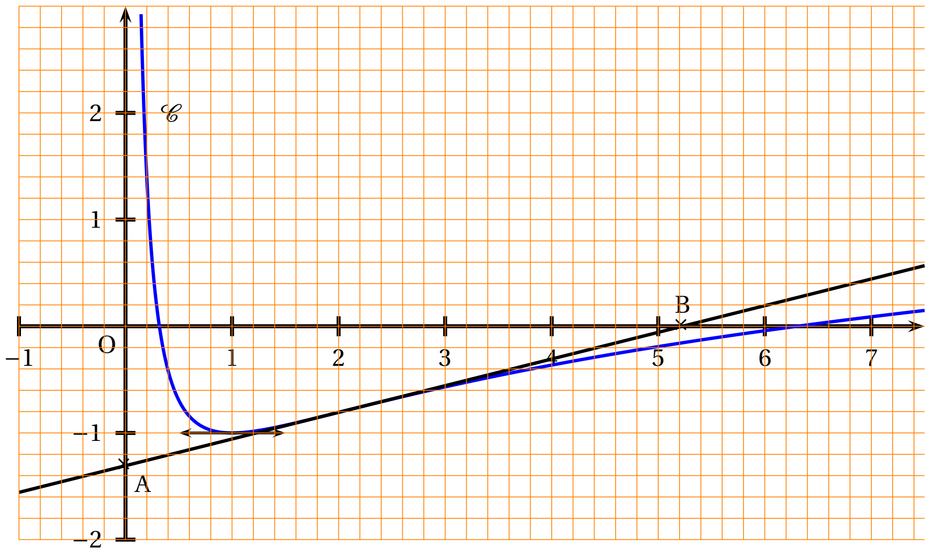
Partie C

On désigne par Γ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées du (ou des) pointes) d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.
2. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.
3. Tracer la courbe Γ sur la feuille annexe, à rendre avec la copie.
4. **a.** Hachurer la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}$, Γ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.
   b. Calculer la mesure exacte, en unités d'aire, de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie hachurée.
   c. En déduire, en cm^2, la mesure arrondie au centième de l'aire $\mathscr{A}$.

Problème

Annexe, à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Métropole 22 juin 2010 ∾
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$

1. Soit $P(z) = z^3 - 27$, où z désigne un nombre complexe.
   a. Vérifier que $P(z) = (z-3)\left(z^2+3z+9\right)$.
   b. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$$z_A = 3, \quad z_B = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i} \quad \text{et} \quad z_C = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}.$$
   a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_B et z_C.
   b. Écrire le nombre complexe z_C sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.
   c. Justifier que les points A, B et C sont sur un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.
   d. Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
3. Le point D est l'image du point C par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. On appelle z_D l'affixe du point D.
   Montrer que $z_D = -3$, puis placer le point D sur la figure précédente.
4. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité : $|z+3| = 3$.
   a. Vérifier que les points O, B et C appartiennent à l'ensemble $\mathscr{F}$.
   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   L'ensemble $\mathscr{F}$ est l'image du cercle Γ par certaines transformations du plan.
   En citer une et préciser ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 2 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.
Chaque bonne réponse rapporte 1 *point et chaque mauvaise réponse enlève* 0,5 *point.*
Une absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.
On notera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie.

Partie A

Deux machines A et B produisent un même type de pièce. On a prélevé 3 000 unités sortant de la machine A et 2 000 de la machine B.
Ces pièces peuvent présenter deux types de défauts : un défaut de couleur, noté C, et un défaut de taille, noté T.
Pour la machine A, 2 % des pièces présentent uniquement le défaut C, 5 % uniquement le défaut T et 1 % les deux défauts.
Pour la machine B, 3 % présentent le seul défaut C, 4 % le seul défaut T et 2 % les deux défauts.
On pourra éventuellement se servir du tableau ci-dessous

	C seul	T seul	C et T	ni C ni T	Total
A			30		3 000
B	60				2 000
Total					5 000

On prend au hasard une pièce parmi les 5 000 prélevées ; toutes les pièces ont la même chance d'être choisies.

1. La probabilité que la pièce soit fabriquée par la machine A est :

a. $\frac{2}{3}$ **b.** $\frac{3}{5}$ **c.** $\frac{3}{2}$ **d.** $\frac{2}{5}$

2. La probabilité que la pièce présente uniquement le défaut C est :

a. $0,024$ **b.** $0,02$ **c.** $0,03$ **d.** 120

3. La probabilité que la pièce présente le défaut T est :

a. $\frac{23}{500}$ **b.** $\frac{3}{50}$ **c.** $\frac{7}{500}$ **d.** $\frac{1}{20}$

4. La probabilité que la pièce présente au moins l'un des deux défauts est :

a. $0,014$ **b.** $0,06$ **c.** $0,038$ **d.** $0,084$

Partie B

L'entreprise décide de commercialiser les 5 000 pièces prélevées :

- les pièces présentant les deux défauts sont invendables et sont détruites ;
- les pièces présentant uniquement un défaut de taille sont bradées au prix de 10 € chacune ;
- celles présentant uniquement un défaut de couleur sont soldées au prix de 25 € chacune ;
- enfin les pièces correctes sont vendues au prix de 30 € chacune.

Sachant que le coût de fabrication d'une pièce est de 10 €, on considère la variable aléatoire X égale au bénéfice fait par l'entreprise sur chaque pièce, exprimé en euros.

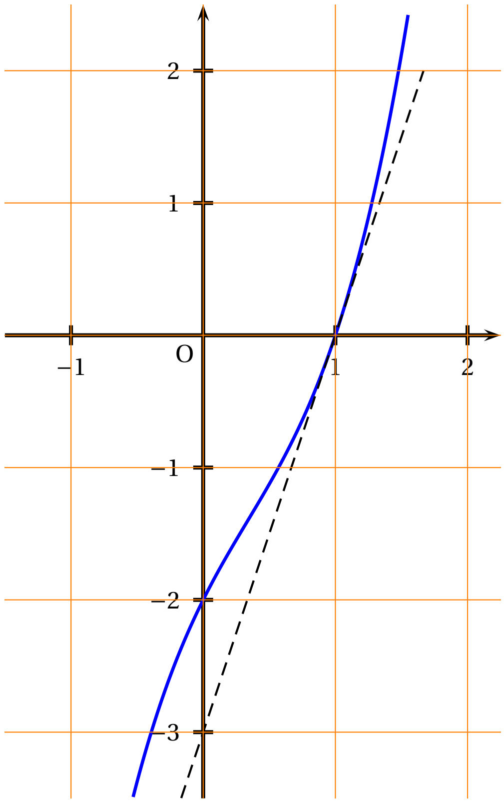
5. L'entreprise peut espérer un bénéfice moyen, exprimé en euros, de :

a $18,68$ **b** $18,54$ **c** $18,89$ **d** $18,75$

PROBLÈME **10 points**

Partie A : exploitation d'un graphique

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ où a et b désignent deux nombres réels.
On suppose g strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Cette courbe coupe les axes de coordonnées aux points A(1 ; 0) et B(0 ; −2).
La droite en pointillés est la tangente à la courbe au point d'abscisse 1. Elle coupe l'axe des ordonnées au point C(0 ; −3).



1. Lire $g(1)$ sur le graphique.
   En déduire une relation entre a et b.
2. Donner la valeur de $g'(1)$.
   Écrire alors une relation vérifiée par a.
3. À l'aide des deux premières questions, déterminer les valeurs de a et b.
4. Donner le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite, on admettra que : $g(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$.

Partie B : étude d'une fonction

On considère maintenant la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; 5]$ par :

$$f(x) = 4\ln x + x^2 - 2x + 1 + \frac{4}{x}.$$

Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. On admet que $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$.
   En remarquant que, pour tout x de l'intervalle $]0 ; 5]$,
   $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(4x\ln x + x^3 - 2x^2 + x + 4\right)$, déterminer la limite de la fonction f en zéro et interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0 ; 5]$, $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x^2}$ où g est la fonction définie dans la partie A.
   En déduire le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

Partie C : position relative de deux courbes

Dans la question 1. on demande de conjecturer des résultats à partir de la calculatrice ; dans la question 2. on demande de prouver ces résultats.

1. Sur l'écran de la calculatrice, on fera apparaître la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f, ainsi que l'hyperbole Γ d'équation $y = \dfrac{4}{x}$.

Les résultats attendus dans cette question seront obtenus à partir de la lecture d'écran.

a. Faire un schéma reproduisant l'écran obtenu en précisant la fenêtre utilisée.

b. Les courbes $\mathscr{C}$ et Γ semblent avoir un point commun. Donner ses coordonnées.

c. Préciser la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à Γ.

2. On considère la fonction d définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 5]$ par :

$$d(x) = f(x) - \frac{4}{x}.$$

a. À l'aide de la question précédente, proposer une solution de l'équation $d(x) = 0$ et, à l'aide d'un calcul, opérer une vérification.

b. Calculer $d'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction d.

c. En déduire le signe de $d(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 5]$.

d. La position de $\mathscr{C}$ par rapport à Γ précisée à la question 1. c. est-elle confirmée ?

Partie D : calcul d'aire

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 5]$ par : $H(x) = x\ln x - x$.

Montrer que H est une primitive de la fonction ln sur l'intervalle $]0\ ;\ 5]$.

2. Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la courbe Γ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 1$. Le résultat sera donné en unités d'aire.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Métropole juin 2010
Génie mécanique, génie des matériaux

Le candidat est invité à faire figurer sur sa copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$4y'' = -y$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et où y'' désigne sa dérivée seconde.

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right).$$

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, puis vérifier que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).

2. **a.** Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E).

b. Déterminer la solution particulière g de l'équation différentielle (E) dont la courbe représentative passe par les points A(0 ; 1) et $\text{B}\left(\pi ; -\sqrt{3}\right)$.

c. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $g(x) = f(x)$.

EXERCICE 2 **6 points**

Le plan est muni d'un repère orthononnal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$;

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes l'équation :

$$(z-2)\left(z^2 - 2z + 4\right) = 0.$$

2. On considère les points A, B, C, D, E d'affixes respectives :

$$z_A = 2 \ ; \ z_B = 1 + i\sqrt{3} \ ; \ z_C = \overline{z_B} \ ; \ z_D = 2e^{2i\frac{\pi}{3}} \ ; \ z_E = 2ie^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

a. Donner le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A et z_B.

b. Donner le module et un argument de z_C.

c. Donner sans calcul le module et un argument de z_D

d. Déterminer la forme algébrique de z_D et z_E.

3. a. Placer les points A, B, C, D, E dans le repère indiqué sur la feuille de papier millimétré fournie.
   On prendra comme unité graphique 2 cm sur chacun des axes.

   Dans les questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   b. Montrer que les points A, B, C, D, E sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

   c. Tracer le cercle dans le repère.

   d. Quelle est la nature du triangle DBC ?

PROBLÈME **10 points**

Soit la fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression

$$f(x) = 6 - x - \mathrm{e}^{-x}.$$

Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. a. Étudier la limite de f en $+\infty$.

   b. Montrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(6\mathrm{e}^{x} - x\mathrm{e}^{x} - 1\right)$.
   On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$. En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. a. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -x + 6$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

   b. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

3. On note f' la fonction dérivée de f sur R.

   a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ peut se mettre sous la forme
   $f'(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}}$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1 - \mathrm{e}^{x} \geqslant 0$.

   c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de f.

4. Soit Δ' la parallèle à Δ passant par l'origine.
   Calculer les coordonnées du point d'intersection N de Δ' et de $\mathscr{C}_f$.

5. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-\ln(6)$.

6. En utilisant une feuille de papier millimétré, tracer dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites Δ, Δ' et $\mathscr{T}$. On prendra comme unité graphique 1 cm sur chacun des axes.

7. Soit la fonction F, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression

$$F(x) = 6x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{e}^{-x}.$$

   a. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

   b. Hachurer sur le graphique le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = -\ln(6)$ et l'axe des ordonnées.

   c. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2 de la partie hachurée.
   On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie de $\mathscr{A}$ au dixième de cm^2.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole 22 juin 2010

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A

En 2008, les ateliers Ouest et Est d'une même entreprise produisent respectivement 1 100 et 900 pièces d'un unique modèle chaque jour.
On estime que 2 % de la production de l'atelier Ouest est défectueuse ainsi que 3 % de la production de l'atelier Est.

1. Compléter sur l'annexe à rendre avec la copie, le tableau suivant :

	Pièces défectueuses	Pièces non défectueuses	Total
Ouest	22		
Est			
Total			2 000

2. On prélève, au hasard, une pièce dans la production totale. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être prélevées.
   a. On définit les évènements suivants :
      – E : « la pièce prélevée est produite dans l'atelier Est »,
      – D : « la pièce prélevée est défectueuse ».

      On note $p(E)$ la probabilité de l'évènement E.
      Calculer $p(E)$, $p(D)$, $p(E \cap D)$ puis $p(E \cup D)$.
   b. On a prélevé au hasard une pièce dans la production de l'entreprise. Elle est défectueuse.
      Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'atelier Ouest.

Partie B

En 2009, la production journalière est la suivante :

	Pièces défectueuses	Pièces non défectueuses	Total
Ouest	20	980	1 000
Est	24	776	800
Total	44	1 756	1 800

Chaque pièce coûte 7 € à produire et est testée.
La réparation d'une pièce défectueuse produite dans l'atelier Ouest coûte 3 € et celle d'une pièce défectueuse produite dans l'atelier Est 5 €.
Chaque pièce est ensuite vendue 10 €. Ainsi, par exemple, une pièce défectueuse produite par l'atelier Ouest rapporte : 10 – 7 – 3 soit 0 € à l'entreprise.
On appelle B le gain journalier de l'entreprise.

1. Calculer le gain journalier B de l'entreprise.
2. Durant l'année, les ateliers fonctionnent 300 jours. Estimer le gain annuel, exprimé en euros, de l'entreprise.

3. Le chef d'entreprise envisage d'éliminer les pièces défectueuses avant réparation pour ne vendre que les pièces non défectueuses. Cette stratégie lui coûte 100 000 € par an compte tenu du recyclage. Cette stratégie est-elle rentable pour l'entreprise ?

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ orthonormal direct d'unité graphique 2 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z + 8.$$

   a. Vérifier que $P(-1) = 0$.
   b. Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout nombre complexe z,

$$P(z) = (z+1)\left(z^2 + az + b\right).$$

   c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

2. On note A, B et C les points du plan, d'affixes respectives $z_{\text{A}} = -1$, $z_{\text{B}} = 2 + 2\text{i}$ et $z_{\text{C}} = 2 - 2\text{i}$.
   a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   b. Déterminer le module et un argument des nombres complexes $z_{\text{A}}, z_{\text{B}}$ et z_{C}. En déduire une écriture exponentielle de ces trois nombres.
   c. Déterminer l'aire en cm^2 du triangle ABC.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

On considère l'équation différentielle notée (E) :

$$y' + 0,1y = 3$$

où y désigne une fonction inconnue de la variable réelle t, dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. Résoudre l'équation différentielle notée (F) :

$$z' + 0,1z = 0$$

   où z désigne une fonction inconnue de la variable réelle t, dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. On pose, pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$,
   $y(t) = z(t) + 30$, où la fonction z est solution de l'équation différentielle (F).
   a. Démontrer que la fonction y est solution de l'équation différentielle (E).
   b. Parmi les fonctions précédentes, déterminer celle vérifiant $y(0) = 20$.

Partie B

La température en degrés Celsius (°C) du lubrifiant d'un moteur varie en fonction du temps t de fonctionnement exprimé en heures.
La fonction f est définie pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = 30 - 10\mathrm{e}^{-0,1t}.$$

1. Déterminer la température du lubrifiant :

  a. À l'arrêt.

  b. Au bout de vingt quatre heures.

2. On s'intéresse au comportement de la fonction f en $+\infty$.

  a. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

  b. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

  c. Donner une signification concrète de ce résultat pour le lubrifiant.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

  a. Calculer $f'(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
  En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

  b. Construire la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ dans le repère orthogonal $[0\ ;\ +\infty[$ de l'annexe qu'on rendra avec la copie.

  c. À quel instant la température du lubrifiant est-elle de 28 °C ? Donner une valeur approchée à l'heure près puis à la minute près du résultat.

  d. Calculer la température moyenne du lubrifiant entre la cinquième et la dixième heure de fonctionnement.

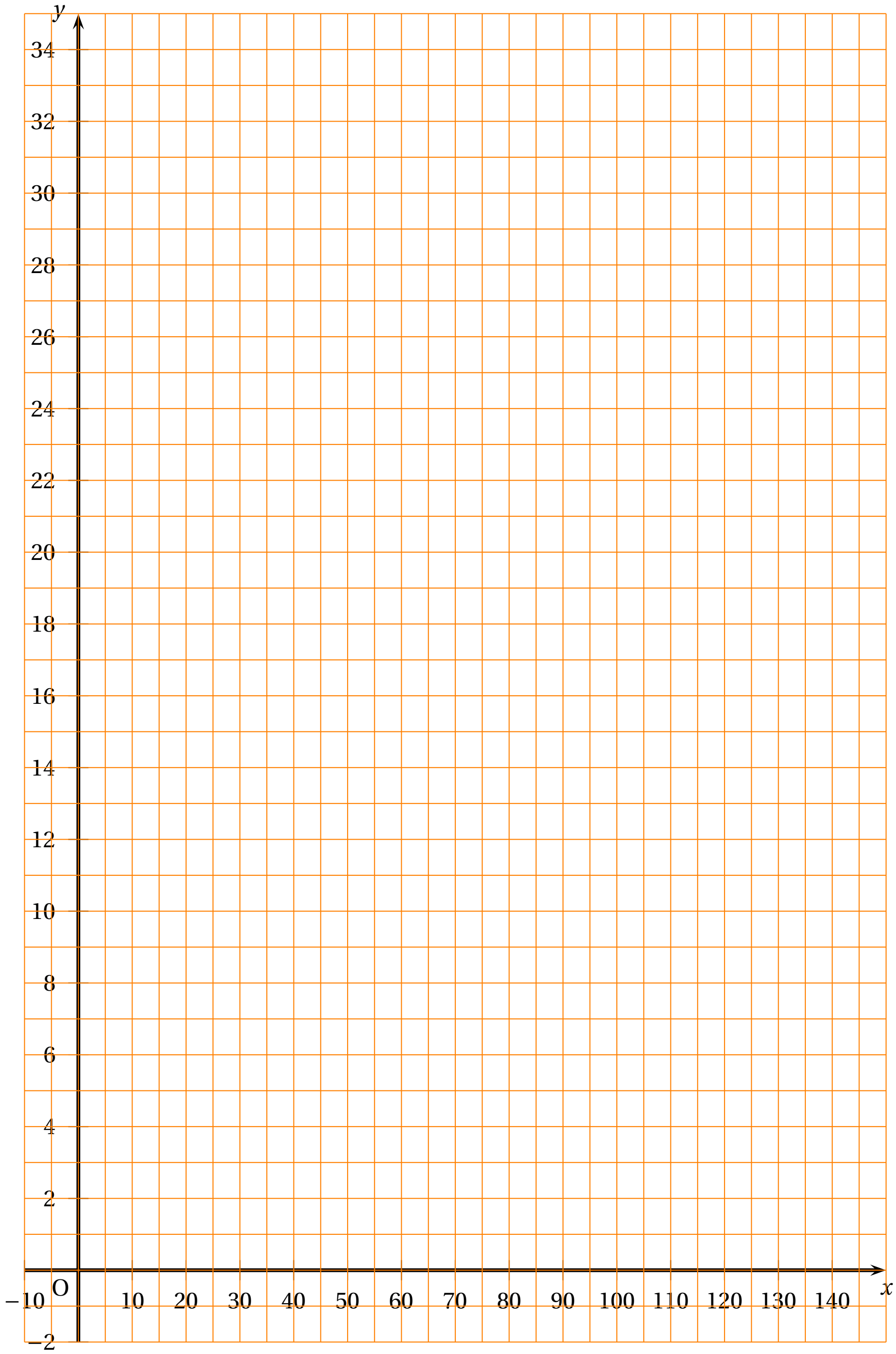
On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction g dérivable sur [a ; b] est :

$$V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Annexe (à rendre avec la copie)

Exercice 1

	Pièces défectueuses	Pièces non défectueuses	Total
Ouest	22		
Est			
Total			2 000



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Polynésie juin 2010 ∾
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Soit (E) l'équation de la variable complexe z :

$$z^2 - 4z + 8 = 0.$$

Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
On considere les points A, B, C, D et K d'affixes respectives :

$$a = 2 + 2\text{i}, \quad b = 1 + \text{i}\sqrt{3}, \quad c = 2 - 2\text{i}, \quad d = 3 - \text{i}\sqrt{3} \text{ et } k = 2.$$

2. Construction du quadrilatère ABCD.
   a. Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes a et b.
   b. Démontrer que le point K est le milieu du segment [AC] et le milieu du segment [BD].
   c. Placer les points A, C et K, puis construire les points B et D.
3. Nature du quadrilatère ABCD.
   a. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   b. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

EXERCICE 2 **4 points**

Une urne contient 100 boules. Chacune de ces boules porte l'un des numéros 1, 2, 3, 4 ou 5.
La répartition des boules suivant leur numéro est donnée par le tableau ci-dessous :

Numéro inscrit sur la boule	1	2	3	4	5
Nombre de boules	15	25	15	35	10

Un joueur tire au hasard une boule dans cette urne. On admet que tous les tirages sont équiprobables.

1. Pour tout entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant 5$, on note p_n la probabilité de tirer une boule numérotée n.
   Déterminer p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5.
2. On considère les évènements suivants :
   - A : « La boule tirée porte un numéro inférieur ou égal à 3 » ;
   - B : « La boule tirée porte un numéro pair ».

   Déterminer les probabilités des évènements A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.

3. Un jeu est défini de la façon suivante : un joueur mise 6 € puis il tire une boule de l'urne.

- Si le numéro de la boule est impair il reçoit une somme de 11 € ;
- si le numéro de la boule tirée est pair il ne reçoit rien.

On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le gain (éventuellement négatif) du joueur.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

b. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

c. On modifie la règle du jeu, la mise reste identique.

- Si le numéro de la boule tirée est impair il reçoit la somme de a euros ;
- si le numéro de la boule tirée est pair il ne reçoit rien.

Déterminer la valeur du nombre a pour que le jeu soit équitable.

PROBLÈME **11 points**

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x} - 2x + 4.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

L'unité graphique est 2 cm sur chacun des axes.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \ln x - x^2$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ (les limites ne sont pas demandées).

2. Étude du signe de g

a. Calculer $g(1)$.

b. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B : Étude de la fonction *f*

1. Étude des limites

a. Déterminer la limite de f en 0. Que peut-on déduire graphiquement pour la courbe $\mathscr{C}$?

b. Déterminer la limite de f en ∞.

2. Étude d'une asymptote

a. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -2x + 4$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

b. Déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

3. On désigne par f' la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$, puis démontrer que : $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x^2}$.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$,

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

4. Démontrer qu'il existe une tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ qui est parallèle à la droite $\mathcal{D}$.

5. Construire dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ les droites $\mathcal{T}$ et $\mathcal{D}$, puis la courbe $\mathcal{C}$.

Partie C : Calcul d'une aire

1. Calculer $f(2)$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[1~;~2]$.

2. On note F la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$F(x) = (\ln x)^2 - x^2 + 4x.$$

a. Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

b. On note $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

Déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$ puis en donner la valeur arrondie au mm^2.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Polynésie juin 2010 ∾
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère ortbonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 centimètres. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre l'équation $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes.
2. On considère les nombres çomplexes :

$$z_1 = \sqrt{3} + \text{i} \quad ; \quad z_2 = \sqrt{3} - \text{i} \quad \text{et } z_3 = 2\text{i}$$

   a. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_1, z_2 et z_3.

   b. Placer les points A B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   c. Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{z_3}{z_2}$.

   d. En déduire que le point C est l'image du point B par une rotation R de centre O dont on précisera l'angle.

3. Soit E le symétrique du point A par rapport à l'origine O du repère.

   a. Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point E.

   b. Montrer que le point E est l'image du point C par la rotation R.

4. Démontrer que le triangle BEC est équilatéral.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre l'équation différentielle (E) :

$$9y'' + y = 0$$

   où y désigne une fonction de la variable x et y'' la dérivée seconde de la fonction y.

2. On désigne par f la solution de (E) vérifiant $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(0) = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

   a. Déterminer la fonction f.

   b. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

3. La valeur efficace de la fonction f est le réel positif E défini par
   $E^2 = \dfrac{1}{6\pi}\displaystyle\int_0^{6\pi} \left[f(x)\right]^2\,\text{d}x$.

   a. Montrer que, pour tout réel x, $\left[f(x)\right]^2 = \dfrac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\dfrac{2x}{3} + \dfrac{5\pi}{3}\right)\right]$.

b. Calculer le réel E.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On donne en annexe la courbe représentative Γ d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ et sa tangente Δ au point d'abscisse 0.

1. Par lecture graphique, donner les valeurs entières de $g(0)$ et de $g'(0)$.
2. On admet qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x,
   $g(x) = \mathrm{e}^x + ax + b$.
   On note g' la dérivée de la fonction g.
   a. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x.
   b. À l'aide des résultats des deux questions précédentes calculer les valeurs de a et de b.
3. Dans la suite du problème on admet que, pour tout réel x, $g(x) = \mathrm{e}^x - 2x + 2$.
   a. Étudier le sens de variation de la fonction g puis dresser son tableau de variations dans lequel on précisera la valeur exacte de l'extremum (les limites ne sont pas demandées).
   b. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.
   c. Comment ce résultat se traduit-il graphiquement ?

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\left(1 + 2\mathrm{e}^{-x}\right)$$

On note f' la dérivée de la fonction f et on appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 centimètres en abscisse et 1 centimètre en ordonnée.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote en $+\infty$ la droite D d'équation $y = x$.
   c. Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite D. On précisera leur point d'intersection.
3. **a.** Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout réel, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}g(x)$.
   b. En utilisant les résultats de la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.
5. Sur une feuille de papier millimétré qui vous sera fournie, tracer les droites D et T ainsi que la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B

On note $\mathscr{A}$ la mesure, exprimée en centimètres carrés, de l'aire du domaine du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$ la droite D l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

1. Hachurer le domaine ainsi défini.
2. Soient h et H les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x\text{e}^{-x}$ et
   $H(x) = 2(-x-1)\text{e}^{-x}$.
   Montrer que la fonction H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis en donner une valeur arrondie au millimètre carré près.

Annexe (problème - partie A)