Baccalauréat ES France juin 1999

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne l'indice mensuel des dépenses d'assurance maladie d'août 94 à juin 95 (tendances observées à fin juillet 1995 - base 100 janvier 1990).

Mois	Août 94	Octobre 94	Décembre 94	Février 95	Avril 95	juin 95
Rang du mois x_i	1	3	5	7	9	11
Indice y_i	123,4	125,9	127,5	127,9	129	131,4

(Source : Département statistique de la Caisse Nationale de l'Assurance Maladie des Travailleurs Salariés).

Pour tout l'exercice, les détails des calculs statistiques ne sont pas demandés. Les résultats seront arrondis avec deux chiffres après la virgule.

On a représenté sur le document 1 de l'annexe ci-jointe le nuage de points $M_i\,(x_i\,;\,y_i)$ associé à la série statistique dans un repère orthogonal. G désigne le point moyen du nuage. On veut réaliser un ajustement affine de ce nuage de points.

1. Déterminer les coordonnées du point G et placer ce point sur le graphique.

2. *Le modèle étudié dans cette question sera appelé « droite de Mayer ».*

a. G_1 désigne le point moyen des trois premiers points du nuage et G_2 celui des trois derniers points. Déterminer les coordonnées de G_1 et de G_2.

b. Déterminer l'équation réduite de la droite (G_1G_2) sous la forme $y = \mathrm{A}x + \mathrm{B}$.

c. Tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique précédent.

d. En utilisant la calculatrice, déterminer la somme des résidus pour cet ajustement affine :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{6} (y_i - \mathrm{A}x_i - \mathrm{B})^2.$$

3. *Le deuxième modèle proposé est celui des moindres carrés.*

La calculatrice donne :

• l'équation de la droite (D) d'ajustement de y en x :

$$y = 0,71x + 123,26.$$

• la somme des résidus pour cet ajustement $S_2 = 1,7$ (arrondie avec un chiffre après la virgule).

a. Des droites (D) et (G_1G_2) quelle est celle qui réalise le meilleur ajustement affine ? Justifier.

b. Tracer (D) sur le graphique précédent.

4. **a.** Quels sont les indices mensuels que l'on pouvait prévoir en utilisant l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés (question 3) pour les mois cités dans le tableau ci-dessous ?

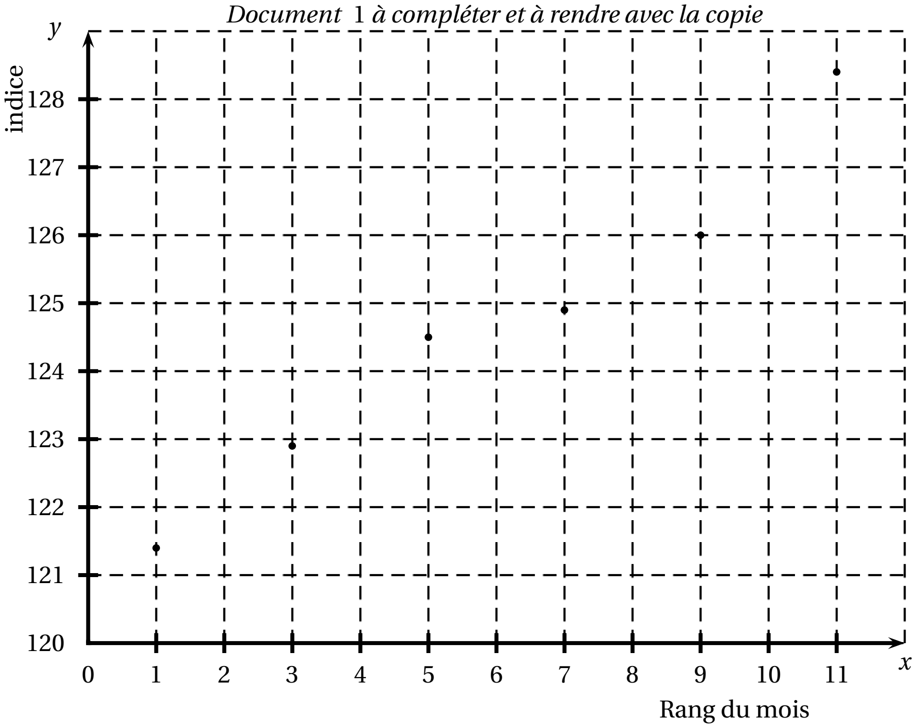
b. Recopier le tableau ci-dessous et le compléter.

Mois	nov. 95	déc. 95	janvier 96
Indices prévisionnels calculés par l'ajustement affine des *moindres carrés*			
Tendances réellement observées	134,3	133,4	133,5

c. Quel commentaire peut-on faire ?

Annexe

Document 1 *à compléter et à rendre avec la copie*



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

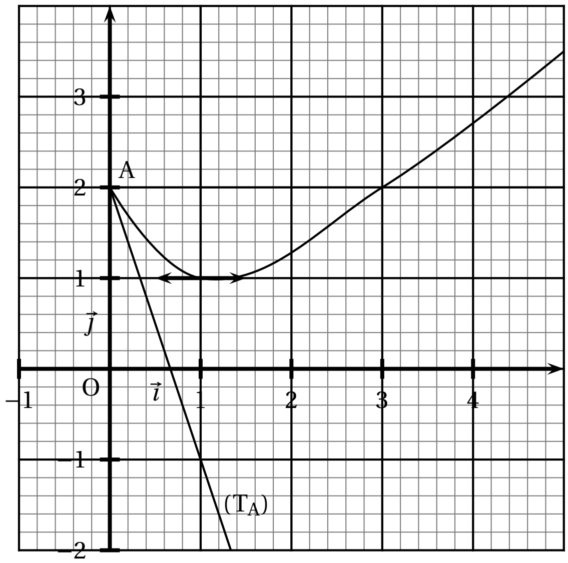
La courbe ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

On note f' la fonction dérivée de f.

La droite (T_A) est la tangente au point A d'abscisse 0.

La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1.

Enfin, la fonction f est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$ et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$.



1. À partir des informations portées sur le graphique et complétées par les précisions précédentes, répondre aux questions suivantes :

a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

x	0	1
$f(x)$		
$f'(x)$		

b. Donner le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$, complété par la limite en $+\infty$.

2. On considère la fonction g inverse de la fonction c'est-à-dire $g = \dfrac{1}{f}$.

On note g', la fonction dérivée de g.

a. Déterminer $g(0)$, $g(1)$, $g(3)$.

b. Quel est le sens de variation de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$?
Justifier la réponse donnée.

c. Déterminer les valeurs $g'(0)$, $g'(1)$.

d. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

3. On souhaite traduire graphiquement les informations obtenues pour la fonction g. Tracer une courbe qui satisfait aux résultats obtenus à la question 2, dans un repère orthonormal (unité 2 cm) sur une feuille de papier millimétré ; le tracé des tangentes aux points d'abscisses 0 et 1 devra apparaître sur la figure.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ représenté sur le document 2 de l'annexe ci-jointe. Le plan (R) est représenté par ses traces sur les plans de coordonnées ; il a pour équation : $x + z = 2$.

1. On donne les points A, B, C définis par leurs coordonnées respectives : A(6 ; 0 ; 0), B(0 ; 3 ; 0) et C(0 ; 0 ; 6).

a. Placer les points A, B, C dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ et tracer le triangle ABC.

b. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$.

c. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (1 ; 2 ; 1).
Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (P) passant par A, B et C.

d. Vérifier que le plan (P) a pour équation $x + 2y + z = 6$.

2. On a placé dans le repère les points G, E et F à coordonnées entières. Le point G est situé sur l'axe $(0 ; \vec{\jmath})$ le point E dans le plan $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et le point F dans le plan $\left(\text{O} ; \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Le plan (Q) passant par les points G, E et F est parallèle auplan $(0 ; \vec{\jmath}, \vec{k}$.

a. Donner l'équation du plan (Q).

b. Donner les coordonnées des points G, E et F.

c. Parmi les points E, F et G, quels sont ceux situés dans le plan (P) ?

d. Quelle est la nature de l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 2 \\ x + 2y + z & = & 6. \end{array}\right.$$

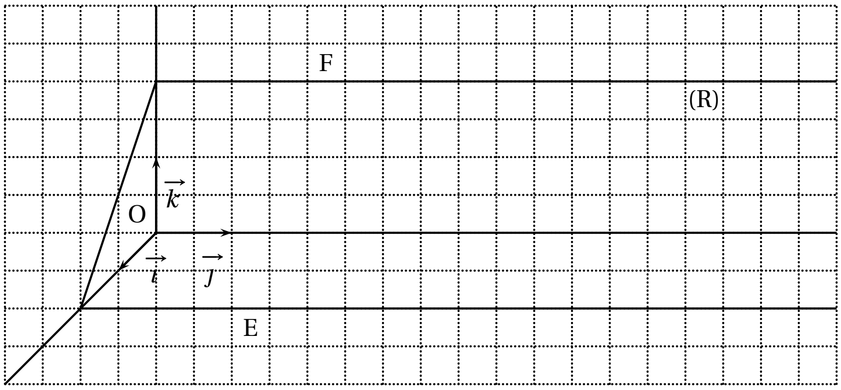
e. Représenter cet ensemble sur l'annexe 2 ci-jointe.

3. On considère le système S de trois équations à trois inconnues x, y, z :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x+ & & z & = & 2 \\ & y & & = & 2 \\ x & +2y & +z & = & 6. \end{array}\right.$$

Quel est l'ensemble des points du plan R dont les coordonnées sont les solutions du système S ?

Document 2 à compléter et à rendre avec la copie



PROBLÈME **9 points**

On a tracé dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; 4]$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} - \ln x.$$

Dans tout le problème, on donnera les résultats arrondis à 10^{-3}.

⋆ A. - Étude théorique liée à la fonction f

1. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; 4]$.

   b. Étudier la limite de f en 0.

   c. Donner le tableau de variation de f.

2. Soit (Z) la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations : $y = \frac{1}{2}$, $x = 1$ et $x = 3$.

   a. Justifier que l'on a $f(x) \geqslant \frac{1}{2}$ sur $]0 ; 4]$ et exprimer à l'aide d'une intégrale (que l'on n'essaiera pas de calculer dans cette question) l'aire $\mathscr{A}_Z$, en unités d'aire, de la partie (Z) du plan.

   b. Soit g la fonction définie sur $]0 ; 4]$ par $g(x) = x\ln x - x$.
   Calculer $g'(x)$.

   c. En déduire la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}_Z$, en unités d'aire.

⋆ B. - Probabilité et jeu

Au cours de l'élaboration d'une phase d'un jeu vidéo inspiré du golf, on cherche à évaluer la probabilité de gagner. L'écran est le carré AOFB. Les sommets du carré ont pour coordonnées :

$$A(0\,;4)\quad O(0\,;0)\quad F(4\,;0)\quad B(4\,;4).$$

La courbe $(\mathscr{C})$ partage l'écran en deux parties :
- la partie de l'écran située strictement au-dessus de la courbe représente une mare et elle est notée (M) ; - la partie de l'écran située au-dessous de la courbe représente le terrain de jeu et elle est notée (T). La partie (Z) définie au paragraphe **A** est donc incluse dans (T).

1. Dans cette question, le jeu consiste à simuler le lancer d'une balle. On admet que la probabilité d'atteindre une partie de l'écran est donnée par :

$$\frac{\text{Aire de la partie de l'écran considérée}}{\text{Aire du carré AOFB}}$$

   Cette probabilité est indépendante de l'unité graphique choisie. Déterminer, par le calcul, la probabilité que la balle atteigne la zone (Z).

2. Dans cette question, le jeu consiste à simuler trois lancers successifs et indépendants ; on admet que, pour chaque lancer, la probabilité d'atteindre (Z) est de 0,044. On gagne lorsque deux au moins des trois balles lancées ont atteint la partie (Z). Calculer la probabilité de gagner.
   On pourra s'aider d'un arbre et on fera figurer le détail des calculs sur la copie.