# Baccalauréat ES Métropole juin 2002

**EXERCICE 1** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

*Les résultats numériques seront obtenus à l'aide de la calculatrice ; aucun détail des calculs statistiques n'est demandé.*

Le tableau suivant donne la dépense, en millions d'euros, des ménages en produits informatiques (matériels, logiciels, réparations) de 1990 à 1998.

| Année | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Dépense $y_i$ | 398 | 451 | 423 | 501 | 673 | 956 | 1 077 | 1 255 | 1 427 |

Source INSEE

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ et le point moyen dans un repère orthogonal tel que 2 cm représentent une année en abscisse et 1 cm représente 100 millions d'euros en ordonnée (ainsi 398 sera représenté par 3,98 cm).
2. **a.** Donner la valeur arrondie à $10^{-3}$ du coefficient de corrélation linéaire de la série $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$. Un ajustement affine vous paraît-il justifié ?

   **b.** Écrire une équation de la droite d'ajustement affine D de $y$ en $x$ par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à $10^{-3}$ ). Représenter D dans le repère précédent.

   **c.** En utilisant cet ajustement affine, donner une estimation de la dépense des ménages (arrondie à un million d'euros) en produits informatiques en 2000.
3. L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose $z_i = \ln y_i$.

   **a.** Recopier et compléter le tableau suivant où $z_i$ est arrondi à $10^{-3}$ :

   | $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
   |---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
   | $z_i$ | 5,986 | 6,111 | 6,047 | 6,217 | | | | | |

   **b.** Donner la valeur arrondie à $10^{-3}$ du coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i,\ z_i)$. Écrire une équation de la droite d'ajustement affine de $z$ en $x$ par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à $10^{-3}$).

   **c.** En utilisant cet ajustement, donner une estimation de la dépense des ménages (arrondie à un million d'euros) en produits informatiques en 2000.
4. En 2000 les ménages ont dépensé 68,9 milliards d'euros pour la culture, les loisirs et les sports et 3,1 % de ces dépenses concernent les produits informatiques.

   Avec lequel des deux ajustements l'estimation faite est-elle la meilleure ?

   Quel est le salaire brut annuel moyen ?

**EXERCICE 2** **5 points**

**Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Une école de commerce a effectué une enquête, en janvier 2000, auprès de ses jeunes diplômés des trois dernières promotions afin de connaître leur insertion professionnelle. À la première question, trois réponses et trois seulement sont proposées :
A « La personne a une activité professionnelle » ;
B « La personne poursuit ses études » ;
C « La personne recherche un emploi ou effectue son service national ».

On a constaté que 60 % des réponses ont été envoyées par des filles. Dans l'ensemble des réponses reçues, en a relevé les résultats suivants :
* 65 % des filles et 55 % des garçons ont une activité professionnelle ;
* 20 % des filles et 15 % des garçons poursuivent leurs études.

**1.** On prend au hasard la réponse d'un jeune diplômé.

   **a.** Montrer que la probabilité qu'il poursuive ses études est égale à 0, 18.

   **b.** Calculer la probabilité qu'il exerce une activité professionnelle.

**2.** On prend au hasard la réponse d'une personne qui poursuit ses études ; quelle est la probabilité que ce soit la réponse d'une fille (on donnera le résultat sous forme fractionnaire) ?

**3.** On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante trois réponses (on suppose que ce choix peut être assimilé à un tirage successif avec remise).

   À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité que l'une au moins des réponses soit celle d'un jeune diplômé poursuivant ses études.

**4.** Dans l'ensemble des réponses des jeunes diplômés exerçant une activité professionnelle, la répartition des salaires bruts annuels en milliers d'euros est la suivante :

| Salaire brut annuel $S$ | $20 \leqslant S < 22$ | $22 \leqslant S < 26$ | $26 \leqslant S < 30$ | $30 \leqslant S < 34$ | $34 \leqslant S < 38$ | $38 \leqslant S < 40$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pourcentage | 5 | 15 | 28 | 22 | 20 | 10 |

Quel est le salaire brut annuel moyen ?

**EXERCICE 2** **5 points**

**Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Julie possède depuis plusieurs mois un téléphone mobile pour lequel elle a souscrit un forfait mensuel de deux heures. Soucieuse de bien gérer ses dépenses, elle étudie l'évolution de ses consommations.
Elle a constaté que :
• Si pendant le mois noté $n$ elle a dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant noté $(n+1)$ est $\frac{1}{5}$.
• Si pendant le mois noté $n$ elle n'a pas dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant est $\frac{2}{5}$.
Pour $n$ entier naturel strictement positif, on désigne par $\text{A}_n$ l'événement « Julie a dépassé son forfait le mois $n$ » et par $\text{B}_n$ l'événement contraire. On pose $p_n = p(\text{A}_n)$ et $q_n = p(\text{B}_n)$ ; on a $p_1 = \frac{1}{2}$.
*Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.*

**1.** **a.** Donner les probabilités de $\text{A}_{n+1}$ sachant que $\text{A}_n$ est réalisé et de $\text{A}_{n+1}$ sachant que $\text{B}_n$ est réalisé.

   **b.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, les égalités suivantes sont vraies :

$$p(\text{A}_{n+1} \cap \text{A}_n) = \frac{1}{5}p_n \qquad \text{et} \qquad p(\text{A}_{n+1} \cap \text{B}_n) = \frac{2}{5}q_n.$$

En déduire que l'égalité suivante est vraie : $p_{n+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}p_n$.

2. Pour tout entier naturel $n > 1$ on pose : $u_n = p_n - \frac{1}{3}$.
   Montrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme $u_1$.
3. Écrire $u_n$ puis $p_n$ en fonction de $n$. Déterminer la limite de $(p_n)$.

**PROBLÈME** **10 points**
**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = (x^2 - 3x + 3)\mathrm{e}^x - 4.$$

1. **a.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
   **b.** Étudier les variations de $f$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $x_0$ appartenant à $]\,1\ ;\ 2[$.
   Donner une valeur arrondie à $10^{-3}$ de $x_0$.
3. Déduire des résultats précédents le signe de $f(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty\ [$.

**Partie B**

Une entreprise fabrique un produit, en quantité $x$ exprimée en tonnes, sa capacité de production ne pouvant dépasser 3 tonnes. Le coût total de fabrication de ce produit, en centaines de milliers d'euros, est donné par :

$$C_T(x) = (x - 3)\mathrm{e}^x + 3x + 4.$$

Le coût moyen est défini sur $]0\ ;\ 3]$ par la formule suivante :

$$C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x}.$$

1. Pour tout $x$ de $]0\ ;\ 3]$ calculer $C'_m(x)$ et vérifier que l'égalité suivante est vraie : $C'_m(x) = \frac{f(x)}{x^2}$.
   En déduire le sens de variation de $C_m$ sur $]0\ ;\ 3]$.
2. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimum ?
   Quel est le coût moyen minimum (arrondi au millier d'euros) d'une tonne de ce produit ?

**Partie C**

Une tonne du produit fabriqué est vendue 300 000 euros ; toute la production est vendue.

1. **a.** Le bénéfice algébrique, en centaines de milliers d'euros, réalisé après la fabrication et la vente de $x$ tonnes du produit est noté $B(x)$. Montrer l'égalité suivante : $B(x) = (3 - x)\mathrm{e}^x - 4$.
   **b.** Étudier le sens de variation de $B$ sur $[0\ ;\ 3]$.
   Quelle est la production pour laquelle le bénéfice est maximum ?
2. **a.** Tracer la courbe représentative de $B$ dans un plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 5 cm pour une tonne en abscisse et 2 cm pour 100 000 euros en ordonnée).
   **b.** À l'aide du graphique, déterminer à 0,1 près les quantités à produire pour que l'entreprise réalise un gain.