Baccalauréat ES France juin 2003

EXERCICE 1 **4 points**

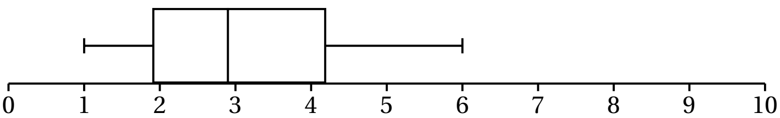
Commun à tous les candidats

Les guichets d'une agence bancaire d'une petite ville sont ouverts au public cinq jours par semaine : les mardi, mercredi, jeudi, vendredi et samedi.
Le tableau ci-dessous donne la répartition journalière des 250 retraits d'argent liquide effectués aux guichets une certaine semaine.

Jour de la semaine	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi
Rang i du jour	1	2	3	4	5
Nombre de retraits	37	55	45	53	60

On veut tester l'hypothèse « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine ». On suppose donc que le nombre des retraits journaliers est égal à $\dfrac{1}{5}$ du nombre des retraits de la semaine.
On pose $d^2_{\text{obs}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{5}\left(f_i - \dfrac{1}{5}\right)^2$ où f_i est la fréquence des retraits du i-ème jour.

1. Calculer les fréquences des retraits pour chacun des cinq jours de la semaine.
2. Calculer alors la valeur de $1\,000d^2_{\text{obs}}$ (la multiplication par 1 000 permet d'obtenir un résultat plus lisible).
3. En supposant qu'il y a équiprobabilité des retraits journaliers, on a simulé 2 000 séries de 250 retraits hebdomadaires.
   Pour chaque série, on a calculé la valeur du $1\,000d^2_{\text{obs}}$ correspondant. On a obtenu ainsi 2 000 valeurs de $1\,000d^2_{\text{obs}}$.
   Ces valeurs ont permis de construire le diagramme en boîte ci-dessous où les extrémités des « pattes » correspondent respectivement au premier décile et au neuvième décile.



   Lire sur le diagramme une valeur approchée du neuvième décile.
4. En argumentant soigneusement la réponse, dire si pour la série observée au début, on peut affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 10 %, que « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine » ?

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une enquête a montré que :

- avant de passer l'épreuve théorique du permis de conduire (c'est-à-dire le code) 75 % des candidats ont travaillé très sérieusement cette épreuve,
- lorsqu'un candidat a travaillé très sérieusement, il obtient le code dans 80 % des cas,
- lorsqu'un candidat n'a pas beaucoup travaillé, il n'obtient pas le code dans 70 % des cas.

On interroge au hasard un candidat qui vient de passer l'épreuve théorique (on rappelle que les résultats sont connus dès la fin de l'épreuve).
On note T l'évènement « le candidat a travaillé très sérieusement »
R l'évènement « le candidat a réussi le code ».
Les probabilités seront données sous forme décimale, arrondies éventuellement au millième.

1. Traduire les données à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a. Calculer la probabilité de l'évènement « le candidat a travaillé très sérieusement et il a obtenu le code ».

   b. Montrer que la probabilité $p(\text{R})$ qu'un candidat réussisse à l'épreuve théorique est égale à 0,675.
3. Le candidat interrogé vient d'échouer. Quelle est la probabilité qu'il ait travaillé très sérieusement ?
4. À la sortie de l'épreuve, on interroge au hasard et de façon indépendante 3 candidats (on suppose que ce choix peut être assimilé à un tirage successif avec remise).

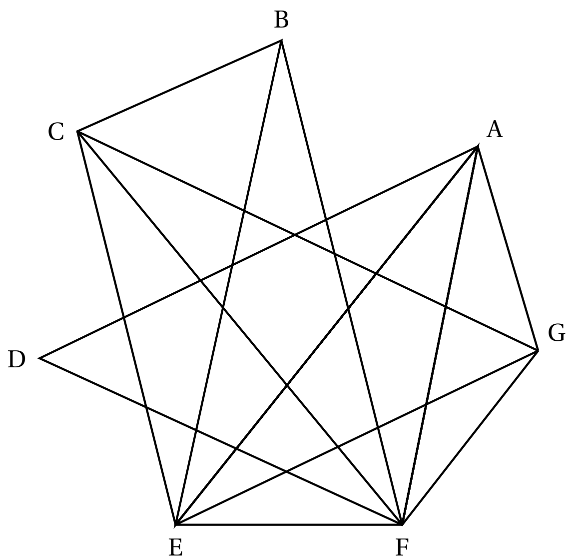
   Calculer la probabilité p_3 d'interroger au moins une personne ayant échoué à l'épreuve.
5. On interroge désormais au hasard et de façon indépendante n candidats.

   Quelle est la probabilité p_n d'interroger au moins une personne ayant échoué à l'épreuve ?

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle. À ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale Luther Allunison (A), John Biaise (B), Phil Colline (C), Bob Ditlâne (D), Jimi Endisque (E), Robert Fripe (F) et Rory Garaguerre (G). Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle. Les arêtes du graphe Γ ci-dessous indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.



Graphe Γ

1. Déterminer la matrice associée au graphe Γ (les sommets de Γ étant classés dans l'ordre alphabétique).
2. Quelle est la nature du sous-graphe de Γ' constitué des sommets A, E, F et G ?

   Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique $\chi(\Gamma)$ du graphe Γ ?
3. Quel est le sommet de plus haut degré de Γ ?

   En déduire un encadrement de $\chi(\Gamma)$.

4. Après avoir classé l'ensemble des sommets de Γ par ordre de degré décroissant, colorier le graphe Γ figurant en annexe.
5. Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ?
   Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0\,;50]$ par

$$g(x) = (x-15)^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}.$$

1. On note g' la fonction dérivée de g sur $[0\,;50]$.
   a. Montrer que $g'(x) = \dfrac{1}{3}(x-15)(21-x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$.
   b. Étudier le signe de g' sur $[0\,;50]$.
   c. Dresser le tableau de variations de g sur $[0\,;50]$.
2. Soit G la fonction définie pour tout x de $[0\,;50]$ par

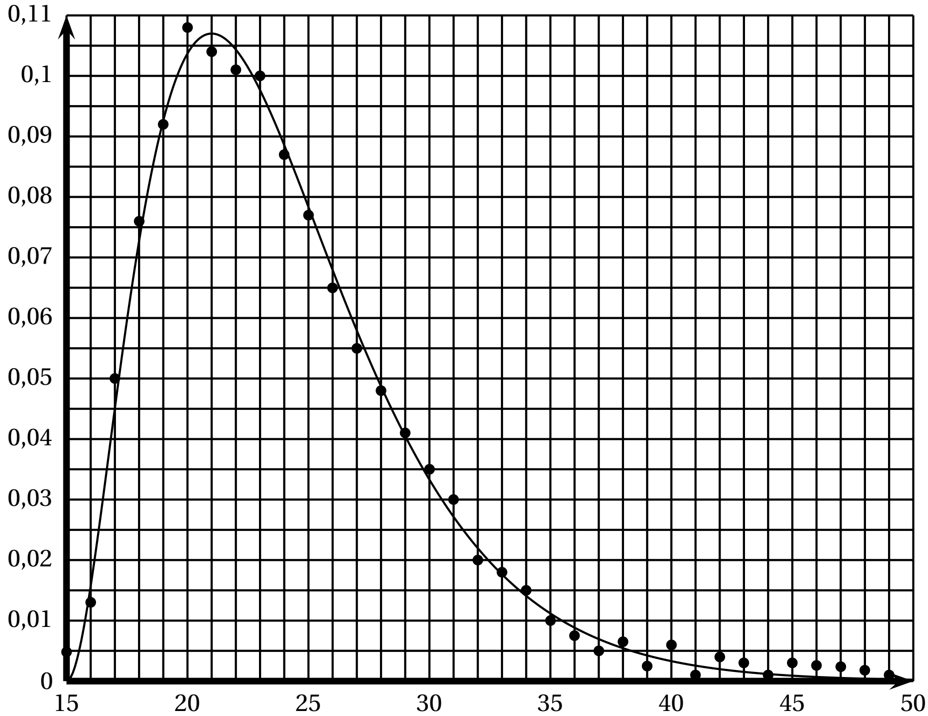
$$G(x) = 3(-x^2+24x-153)\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}.$$

   Montrer que G est une primitive de g sur $[0\,;50]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[15\,;49]$ par $f(x) = \dfrac{107\mathrm{e}^7}{36\,000}g(x)$.

1. Justifier que f admet les mêmes variations que g sur l'intervalle $[15\,;49]$.
2. La représentation graphique de f dans un repère orthogonal $\mathscr{R}$ est donnée ci-dessous.



Calculer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine plan délimité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 15$ et $x = 49$ (on utilisera le résultat de la **question A. 2)**).

On donnera la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis sa valeur arrondie à 10^{-1}.

Partie C

Dans une population et pour une génération donnée, le taux de fécondité $t(k)$ à l'âge k où k est un entier compris entre 15 et 49, est le rapport entre le nombre de naissances chez les mères d'âge k et le nombre de femmes d'âge k de cette génération.

Le nuage de points représentant le taux de fécondité d'une population pour une génération donnée (l'âge étant représenté en abscisse et le taux de fécondité en ordonnée) est représenté dans le repère $\mathscr{R}$.

On appelle descendance finale la somme des taux de fécondité par âge $t(k)$; elle est donc égale à $\displaystyle\sum_{k=15}^{49} t(k)$. On suppose qu'elle peut être modélisée par l'aire délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 15$ et $x = 49$.

1. Utiliser les résultats de la **partie B** afin d'estimer la descendance finale de cette génération (on donnera un résultat arrondi à 10^{-1}).
2. Une valeur arrondie à 10^{-2}de la somme des taux de fécondité par âge est 1,20. Comparer ce résultat avec celui obtenu à la question précédente. Le modèle choisi paraît-il adapté ?
3. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[15 ; 49]$. Peut-on affirmer que la descendance finale est égale à cette valeur moyenne ? Justifier votre réponse.