

EXERCICE 1

4 points

1. a. Dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} , résoudre l'équation d'inconnue z

$$z^2 - 8z + 32 = 0.$$

- b. Écrire les solutions de cette équation sous forme exponentielle.
2. Soit le nombre complexe $4e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donner sa forme algébrique.
3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 1 cm, on donne les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 4 + 4i \quad z_B = 4 - 4i \quad z_C = 2 + 2i\sqrt{3}.$$

- a. Placer les points A, B et C dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .
- b. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

EXERCICE 2

5 points

On considère un circuit électrique fermé comprenant un condensateur dont la capacité, exprimée en farads, a pour valeur C, une bobine dont l'inductance, exprimée en henrys, a pour valeur L et un interrupteur.

Le temps t est exprimé en secondes. À l'instant $t = 0$, on suppose le condensateur chargé, on ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit.

On appelle $q(t)$ la valeur de la charge, exprimée en coulombs, du condensateur à l'instant t .

On définit ainsi une fonction q , deux fois dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$, dont la dérivée première est notée q' .

On admet que la fonction q est solution de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' + \frac{1}{LC}y = 0$$

où y est définie et deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$ et de dérivée seconde y'' .

Dans tout l'exercice on prend $C = 1,25 \times 10^{-3}$ et $L = 0,5 \times 10^{-2}$.

1. a. Montrer que q est alors solution de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' + 1,6 \times 10^5 y = 0.$$

- b. Résoudre l'équation différentielle (E).
- c. Déterminer la solution particulière q de (E) vérifiant :

$$q(0) = 6 \times 10^{-3} \quad \text{et} \quad q'(0) = 0.$$

2. On sait que la valeur $i(t)$ de l'intensité, exprimée en ampères, du courant qui parcourt le circuit à l'instant t vérifie $i(t) = -q'(t)$. On définit ainsi une fonction i sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- a. Vérifier que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$

$$i(t) = 2,4 \sin(400t).$$

b. Calculer : $\frac{400}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{400}} \cos(800t) dt$.

c. On désigne par I_e la valeur, exprimée en ampères, de l'intensité efficace dans le circuit. Son carré est donné par la formule :

$$I_e^2 = \frac{400}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{400}} i^2(t) dt.$$

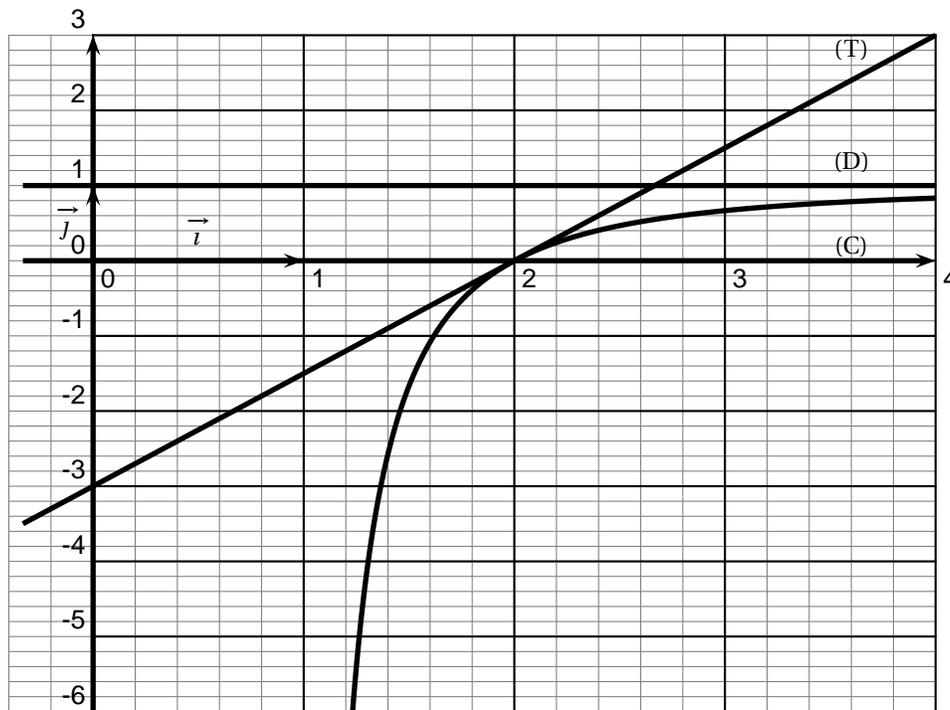
Calculer I_e^2 (on pourra utiliser la formule $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$), puis donner une valeur approchée de I_e à 10^{-3} près, sachant que I_e est un nombre positif.

PROBLÈME

11 points

Partie A

On donne, dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, la représentation graphique (\mathcal{C}) d'une fonction g définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$ ainsi que deux droites (T) et (D). La droite (T) passe par les points de coordonnées respectives $(2; 0)$ et $(0; -3)$. La droite (D) a pour équation $y = 1$.



1.
 - a. Déterminer graphiquement $g(2)$.
 - b. Sachant que la droite (T) est tangente à la courbe (\mathcal{C}) au point d'abscisse 2, déterminer graphiquement $g'(2)$.
 - c. On admet que la droite (D) est asymptote à la courbe (\mathcal{C}) . Déterminer graphiquement la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
 - d. Sachant que la courbe (\mathcal{C}) coupe l'axe des abscisses en un seul point, étudier graphiquement le signe de la fonction g sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

2. On définit les fonctions g_1 , g_2 et g_3 sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$g_1(x) = 1 - \frac{1}{x-1} \quad ; \quad g_2(x) = 1 - \frac{2}{x^2 - x} \quad ; \quad g_3(x) = \ln(x-1).$$

L'une d'elles est la fonction g que l'on se propose d'identifier en utilisant les résultats de la première question.

- a. Calculer $g_1(2)$, $g_2(2)$ et $g_3(2)$.
Ces résultats permettent-ils d'éliminer une des trois fonctions?
- b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_2(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_3(x)$.
Quelle fonction peut-on alors éliminer?
- c. On note g'_1 et g'_2 les fonctions dérivées respectives de g_1 et g_2 .
Calculer $g'_1(2)$ et $g'_2(2)$ puis conclure.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par

$$f(x) = x + 1 + 2 \ln x - 2 \ln(x-1).$$

On note (\mathcal{C}_f) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. Quelle propriété de la fonction logarithme népérien permet de prouver que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$,

$$f(x) = x + 1 + 2 \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) ?$$

- b. Déterminer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe (\mathcal{C}_f) ?
2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b. Justifier que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}_f) .
c. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]1; +\infty[$, $\frac{x}{x-1} > 1$.
Quel est alors le signe de $\ln \left(\frac{x}{x-1} \right)$ pour x appartenant à $]1; +\infty[$?
d. En déduire la position de la courbe (\mathcal{C}_f) par rapport à la droite (D).
3. a. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$, $f'(x) = g(x)$ où g est la fonction trouvée dans la **partie A**.
b. À l'aide des résultats graphiques obtenus dans la **partie A**, dresser le tableau de variations de la fonction f .

Partie C

1. Montrer que, sur l'intervalle $]1; +\infty[$, la fonction H définie par

$$H(x) = x \ln x - (x-1) \ln(x-1)$$

est une primitive de la fonction h définie par $h(x) = \ln x - \ln(x-1)$ sur cet intervalle.

2. a. Sur la feuille annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe (\mathcal{C}_f) . Sur cette figure, représenter la droite (D) et hachurer la partie du plan comprise entre la droite (D) , la courbe (\mathcal{C}_f) et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.
- b. On désigne par \mathcal{A} la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan hachurée précédemment. Donner la valeur exacte de \mathcal{A} puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près par excès.

**Annexe : représentation de la courbe (\mathcal{C}_f)
À rendre avec la copie**

