Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie électronique génie électrotechnique, optique France juin 2006

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

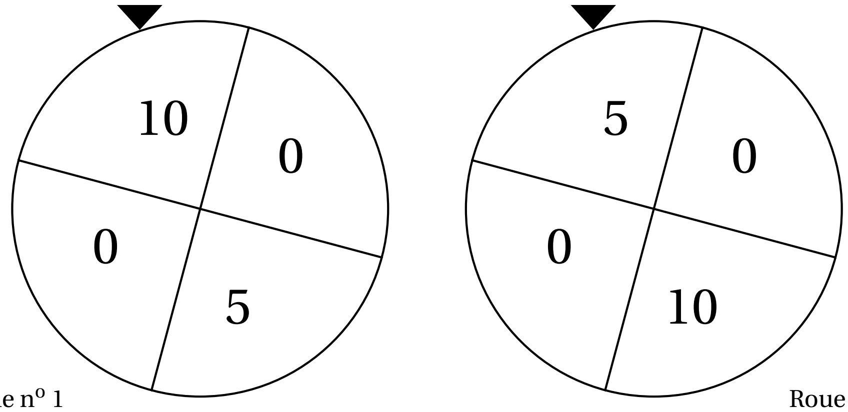
1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 1 - i\sqrt{3}$.
   - **a.** Déterminer le module et un argument de z_A et z_B.
   - **b.** Donner la forme exponentielle de z_A.
   - **c.** Placer les points A et B dans le plan muni du repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
3. On désigne par R la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :
$$z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z.$$
   - **a.** Indiquer la nature de la transformation R et préciser ses éléments caractéristiques.
   - **b.** On nomme C l'image du point A par la transformation R. Déterminer la forme exponentielle de l'affixe z_C du point C. En déduire sa forme algébrique.
   - **c.** Placer le point C.
   - **d.** Montrer que le point B est l'image du point C par la transformation R.
4. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 2 **4 points**

Pour la fête de l'école, une association propose une loterie selon le principe suivant :

- Le joueur mise 10 euros.
- Il fait tourner deux roues identiques chacune s'arrêtant devant un repère.

Chaque roue est divisée en quatre quartiers sur lesquels sont indiqués les gains en euros 10 ; 0 ; 5 ; 0. Tous les quartiers ont la même probabilité de s'arrêter devant le repère. La gain obtenu par le joueur est égal à la somme des gains indiqués sur les quartiers sur lesquels se sont arrêtées les roues.



Roue n° 1 Roue n° 2

Dans l'exemple ci-dessus, la partie assure au joueur un gain de 15 €.

1. Étude du gain d'un joueur pour une mise de 10 euros.
On nomme G la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain du joueur en euros.

a. Reproduire et compléter le tableau suivant donnant les valeurs prises par la variable aléatoire G selon les quartiers sur lesquels se sont arrêtées les roues :

Roue n° 2 \ Roue n° 1	10	0	5	0
10				
0				
5				
0				

b. Prouver que la probabilité que le joueur obtienne un gain supérieur ou égal à sa mise est 50 %.

c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

d. Calculer la probabilité, notée $p(G > 10)$, qu'un joueur obtienne un gain strictement supérieur à sa mise.

e. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire G, puis donner son interprétation.

2. Étude du bénéfice de l'association pour une valse de m euros.
On suppose dans cette question que la mise du joueur est m euros.
On note B la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le bénéfice (positif ou négatif) réalisé par l'association, c'est-à-dire la différence entre la mise qu'elle a encaissée et le gain éventuel qu'elle a reversé au joueur.

a. Exprimer en fonction de m l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.

b. Déterminer m pour que l'espérance de bénéfice de l'association soit d'au moins 5 €.

PROBLÈME **11 points**

Partie A ; Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad : \quad y' + y = -x - 1$$

où y désigne une fonction de la variable x. définie et dérivable sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

1. a. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.

   b. Déterminer la solution h de cette équation différentielle $y' + y = O$ prenant la valeur $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ en $x = 1$.

2. Déterminer le nombre réel a tel que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax$ soit solution de l'équation différentielle (E).

Partie B : étude d'une fonction auxiliaire *f*

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} - x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. f' désigne la fonction dérivée de la fonction f. Calculer, pour tout réel x, $f'(x)$ puis en déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   b. Donner un encadrement de α d'amplitude $0,01$.
4. Préciser le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Partie C : Calcul de l'aire d'une partie du plan

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est tracée sur la feuille jointe en annexe, qui est à rendre avec la copie.

1. Dans le demi-plan constitué des points d'abscisses positives, hachurer la partie $\mathscr{D}$ limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$ l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
2. Calculer en fonction de α la mesure, en unités d'aire, de l'aire de la partie $\mathscr{D}$ du plan.

Partie D : étude d'une fonction *g* et représentation graphique

La fonction g est définie sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ par :

$$g(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{-x} - x}$$

(où α désigne le nombre réel trouvé à la partie B et on note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. a. Vérifier que, pour tout $x \in]-\infty\,;\,\alpha[$, $g(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^{x}}{1 - x\mathrm{e}^{x}}$.

   b. En déduire la limite de la fonction g en $-\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.
2. En utilisant les résultats trouvés dans la partie B question 4, déterminer la limite de la fonction g en α. Interpréter graphiquement cette limite.
3. a. La fonction g' désignant la dérivée de la fonction g, montrer que pour tout x de $]-\infty\,;\,\alpha[$, $g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}(1+x)}{(\mathrm{e}^{-x} - x)^2}$.

   b. En déduire les variations de la fonction g sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ et dresser le tableau des variations de la fonction g.
4. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g dans le repère figurant sur la feuille annexe à remettre avec la copie.

Feuille annexe à remettre avec la copie