**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat STI Génie électronique génie électrotechnique, optique France 23 juin 2008

Le candidat est invité à faire figurer toute trace de recherche, même incomplète on non fructueuse, qu'il aura développée.
Deux feuilles de papier millimétré seront distribuées en même temps que le sujet.

**EXERCICE 1** **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + 6z\sqrt{3} + 36 = 0.$$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
   $z_{\text{A}} = -3\sqrt{3} + 3\text{i}$ $\quad z_{\text{B}} = -3\sqrt{3} - 3\text{i}$ $\quad$ et $z_{\text{C}} = -6\sqrt{3}$.
   **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes $z_{\text{A}}$ et $z_{\text{B}}$.
   **b.** Écrire le nombre complexe $z_{\text{A}}$ sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ où $r$ est un nombre réel strictement positif et $\theta$ un nombre réel compris entre $-\pi$ et $\pi$.
   **c.** Placer les points A, B, C dans le plan muni du repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
3. **a.** Déterminer la nature du triangle ABC.
   **b.** En déduire que le quadrilatère OACB est un losange.
4. On appelle K le point du plan complexe d'ordonnée négative tel que le triangle OAK soit rectangle et isocèle en O.
   On note $z_{\text{K}}$ l'affixe du point K.
   **a.** Construire le point K sur la figure.
   **b.** Par quelle rotation de centre O, le point K est-il l'image du point A ?
   **c.** Écrire alors $z_{\text{K}}$, sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ (où $r$ est un nombre réel strictement positif et $\theta$ un réel compris entre $-\pi$ et $\pi$) puis sous forme algébrique.

**EXERCICE 2** **4 points**

On considère l'équation différentielle :

$$(\text{E}) : \quad y'' + 25y = 0$$

où $y$ désigne une fonction de la variable réelle $x$ définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et $y''$ sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation (E).
2. Soit $f$ la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont on note $f'$ la fonction dérivée, vérifiant les trois conditions suivantes :

   - $f$ est solution de l'équation différentielle (E) ;

- la courbe représentative de $f$ dans un repère du plan passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{6}\ ;\ -2\right)$ ;
- $f'(0) = -5$.

Montrer que, pour tout réel $x$, $f(x) = \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x$.

**3.** Vérifier que, pour tout réel $x$, $f(x) = 2\cos\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$.

**4.** Calculer la valeur moyenne de $f$ sur l'intervalle sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{6}\right]$.

**PROBLÈME** **11 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.

On s'intéresse dans ce problème à la fonction $f$ définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(X) = \frac{3}{\mathrm{e}^{3x} + 1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

**Partie A : étude de la fonction *f***

**1.** **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**b.** En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

**c.** Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout nombre réel $x$ ; qu'en déduit-on sur la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à cette asymptote ?

**2.** On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 3$.

**a.** Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers $-\infty$.

**b.** En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite $\mathscr{D}$ comme asymptote.

**c.** Montrer que, pour tout nombre réel $x$, $f(x) = 3 - \frac{3\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x} + 1}$.

**d.** En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et dc la droite $\mathscr{D}$.

**3.** On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$.

**a.** Montrer que, pour tout nombre réel $x$, $f'(x) = \frac{-9\mathrm{e}^{3x}}{\left(\mathrm{e}^{3x} + 1\right)^2}$.

**b.** En déduire le sens de variation de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations.

**4.** Déterminer une équation de la tangente $\Delta$ au point d'abscisse 0.

**5.** Dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ tracer les droites $\mathscr{D}$ et $\Delta$ ainsi que la courbe $\mathscr{C}$.

**Partie B : Calcul de l'aire d'une partie du plan**

**1.** **a.** On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{3\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x} + 1}.$$

Déterminer une primitive $G$ de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$. (On pourra remarquer que la fonction $g$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ où $u$ est une fonction que l'on précisera).

**b.** En utilisant la question 2. c. de la partie A, déterminer une primitive $F$ de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

**2.** Soit $a$ un réel strictement positif.
On note $\mathcal{A}(a)$ la mesure, exprimée en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.

**a.** Exprimer $\mathcal{A}(a)$ à l'aide d'une intégrale.

**b.** Établir que $\mathcal{A}(a) = 3a - \ln\left(\mathrm{e}^{3a} + 1\right) + \ln 2$.

**c.** En remarquant que $3a = \ln\left(\mathrm{e}^{3a}\right)$, écrire $\mathcal{A}(a)$ sous la forme du logarithme népérien d'un quotient ; déterminer alors la limite de $\mathcal{A}(a)$ lorsque $a$ tend vers $+\infty$.
*Dans cette question particulièrement, toute trace de recherche, même incomplète, figurant sur la copie sera prise en compte dans l'évaluation.*