

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat STI Métropole 23 juin 2009 ∞
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1

5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Soit A le point d'affixe $z_A = 1 + i\sqrt{3}$.
 - a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_A .
 - b. Écrire le nombre complexe z_A sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π .
 - c. Placer le point A dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) en prenant comme unité graphique 2 cm.
2. Soit B l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On appelle z_B l'affixe du point B.
 - a. Déterminer l'écriture du nombre complexe z_B sous la forme $re^{i\theta}$ (où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π).
 - b. Écrire le nombre complexe z_B sous forme algébrique.
 - c. Placer le point B dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .
3. Montrer que le triangle AOB est équilatéral.
4. Soit C le point d'affixe $z_C = z_A e^{i\frac{\pi}{4}}$.
 - a. Par quelle transformation géométrique le point C est-il l'image du point A ? Préciser les éléments caractéristiques de cette transformation.
 - b. Placer le point C dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .
 - c. Écrire le nombre complexe z_C sous forme trigonométrique.
 - d. Établir que $z_C = z_A \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.
En déduire l'écriture du nombre complexe z_C sous forme algébrique.
 - e. Déduire des résultats précédents les valeurs exactes $\cos \frac{7\pi}{12}$ et de $\sin \frac{7\pi}{12}$.

EXERCICE 2

5 points

On propose à un candidat au baccalauréat un exercice qui comporte trois questions auxquelles il doit répondre par vrai ou faux.

Une bonne réponse rapporte 2 points, une mauvaise réponse enlève 1 point, l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

On appelle :

- A l'évènement : « le candidat n'a pas répondu à la question » ;
- B l'évènement : « le candidat a donné la bonne réponse à la question » ;
- C l'évènement : « le candidat a donné la mauvaise réponse à la question ».

Si, par exemple, le candidat a donné les bonnes réponses aux questions 1 et 2, et la mauvaise réponse à la question 3, le résultat obtenu se note (B, B, C).

Un candidat qui ne sait répondre à aucune question hésite entre deux stratégies :

- soit il répond au hasard aux trois questions ;
- soit il décide de ne pas répondre à une question, par exemple la première, et répond au hasard aux deux autres questions.

I. Première stratégie : le candidat choisit de ne pas laisser de questions sans réponse.

Il répond donc au hasard et de façon équiprobable aux trois questions.

1. Combien de triplets différents peut-on obtenir ? (On pourra utiliser un arbre.)
2. Calculer la probabilité que le candidat n'ait fait aucune faute. .
3. Montrer que la probabilité que le candidat ait fait une faute et une seule, est égale à 0,375.
4. On note X la variable aléatoire qui à chaque triplet associe la note obtenue à l'exercice.
 - a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X .
 - b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
 - c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X .

II. Deuxième stratégie : le candidat choisit de ne pas répondre à la première question, et répond au hasard et de façon équiprobable aux deux autres questions.

1. Combien de triplets différents peut-on obtenir ?
2. On note Y la variable aléatoire qui à chaque triplet associe la note obtenue à l'exercice.
 - a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y .
 - b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y .
 - c. Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$ de la variable aléatoire Y .

III. Comparaison des stratégies : parmi les deux stratégies, quelle est la plus favorable au candidat ?

PROBLÈME

10 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On s'intéresse dans ce problème à une fonction f définie sur l'ensemble des réels \mathbb{R} .

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = 2e^x + 2x + 3.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction g sur \mathbb{R} .
Les limites ne sont pas demandées.
2.
 - a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2; -1]$.
 - b. Donner l'arrondi au dixième de α .
 - c. En déduire, selon les valeurs du nombre réel x , le signe de $g(x)$.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 2e^x + x^2 + 3x.$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
3. Soit \mathcal{P} la parabole d'équation $y = x^2 + 3x$.
 - a. Déterminer la limite de $f(x) - (x^2 + 3x)$ quand x tend vers $-\infty$.
 - b. Que peut-on en déduire graphiquement ?
 - c. Étudier la position relative de la courbe \mathcal{C} et de la parabole \mathcal{P} .
4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
 - a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x .
 - b. En utilisant la question 2. c. de la partie A, dresser le tableau de variations de la fonction f .
 - c. Donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près.
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
6. Sur la feuille annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la parabole \mathcal{P} dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , en prenant comme unité graphique 2 cm.
Tracer sur cette feuille annexe la tangente T et la courbe \mathcal{C} .

Partie C : Calcul d'aire

1. Hachurer sur la feuille annexe la partie du plan comprise entre la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.
2.
 - a. Calculer la mesure exacte, en unités d'aire, de l'aire \mathcal{A} de la partie du plan hachurée précédemment.
 - b. En déduire, en cm^2 , la mesure arrondie au centième de l'aire \mathcal{A} .

ANNEXE

Cette feuille est à rendre avec la copie

