Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Métropole 21 juin 2012
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée.

Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte. Chaque bonne réponse rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlève pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Partie A

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

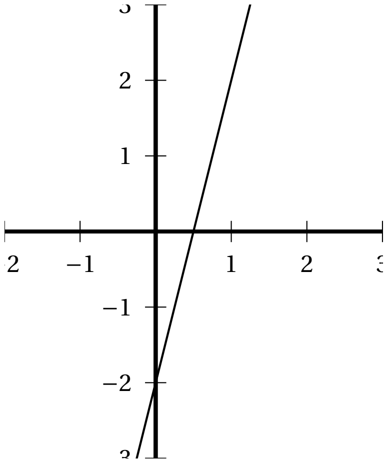
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

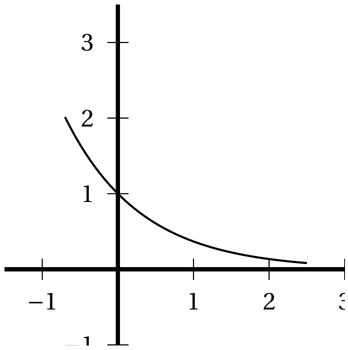
1. L'écriture exponentielle de $-2+2\text{i}$ est :
   a. $-2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$
   b. $\sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$
   c. $2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$
   d. $2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$
2. La transformation qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = z + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est :
   a. La rotation de centre O et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$
   b. La translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   c. La rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$
   d. La translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Soient A, B, C et D les points d'affixes $z_\text{A} = 1+\text{i}$, $z_\text{B} = 3-2\text{i}$, $z_\text{C} = 4$ et $z_\text{D} = 2+3\text{i}$.
   a. z_B et z_C ont le même module
   b. O appartient au cercle de diamètre [BD]
   c. A appartient à la médiatrice du segment (BC]
   d. z_B et z_D ont des modules opposés

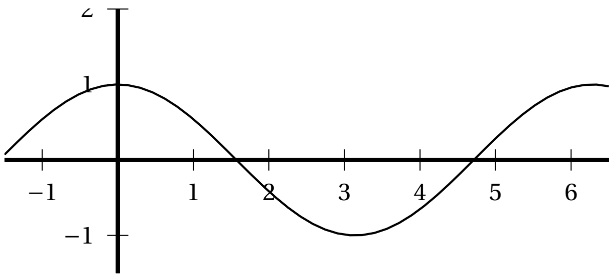
Partie B

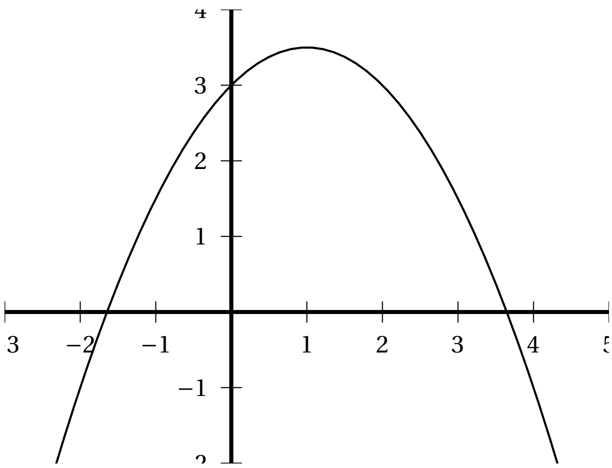
1. Soit l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$ où y désigne une fonction deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels. Une fonction f solution de cette équation est définie par :
   a. $f(x) = 3$
   b. $f(x) = \sin(3x)$
   c. $f(x) = \text{e}^{3x}$
   d. $f(x) = x^2 - 4$

2. On considère l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels. La représentation graphique d'une solution de cette équation différentielle dans un repère orthonormal est :

a. 

b. 

c. 

d. 

EXERCICE 2 **5 points**

Émile possède quatre pièces de monnaie, une pièce de 2 €, une pièce de 1 € et deux

pièces de 0,50 € et de quatre gobelets d'apparence identique. Sous chacun de ces gobelets, il place exactement une pièce de monnaie.
Il demande à son camarade Robert de soulever au hasard un gobelet puis un deuxième.
Il note alors la valeur de la pièce placée sous le premier gobelet soulevé puis la valeur de la pièce placée sous le second gobelet soulevé.
Chaque issue de cette expérience aléatoire est donc un couple de nombres. Par exemple, (1 ; 0,5) est le couple obtenu en découvrant d'abord la pièce de 1 € et ensuite une pièce de 0,50 €.

1. À l'aide d'un arbre ou d'un tableau, déterminer tous les tirages possibles.
2. On admet que toutes les issues sont équiprobables.

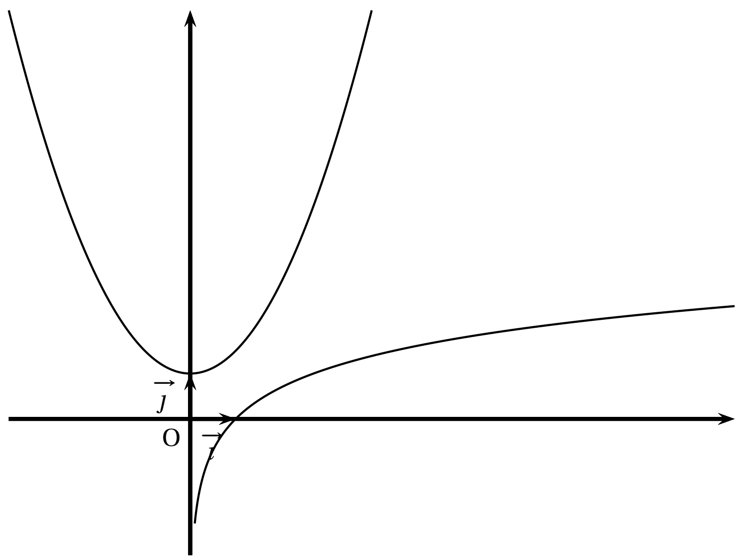
   On note A l'évènement : « Les deux pièces découvertes par Robert ont des valeurs différentes ».

   Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale $\dfrac{5}{6}$.
3. On définit la variable aléatoire S qui, à chaque issue, associe la somme des valeurs indiquées sur les deux pièces découvertes.
   a. Quelles sont les valeurs prises par S ?
   b. Donner la loi de probabilité de S.
   c. Calculer l'espérance mathématique de S. Interpréter ce nombre.
4. Robert découvre deux pièces au hasard comme indiqué auparavant. On note B l'évènement : « Robert a assez d'argent en main pour acheter un magazine à 1,30 € ». Déterminer la probabilité de l'évènement B.

PROBLÈME **10 points**

Partie A : Étude graphique d'une inéquation

Sur le graphique ci-dessous sont tracées la courbe représentant la fonction logarithme népérien et la parabole d'équation $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$ dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.



À l'aide du graphique, expliquer pourquoi on peut conjecturer que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$\frac{1}{2}x^2 + 1 - \ln x > 0.$$

Ce résultat est admis dans la suite du problème.

Partie B : Calculatrice et conjectures

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du plan, Δ_1 et Δ_2 les droites d'équations respectives $y = \frac{1}{2}x - 1$ et $y = \frac{3}{2}x - 2$.

La courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ_1 ont été représentées à l'aide d'un grapheur. Le graphique obtenu est donné en annexe. Cette annexe est à compléter et à rendre avec la copie.

1. Sur l'annexe, tracer la droite Δ_2.
2. À l'aide du graphique, conjecturer les réponses aux questions posées ci-dessous :
   a. Quel est le sens de variation de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$?
   b. Quelles sont les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 0 ?
   c. Que représente la droite Δ_1 pour la courbe $\mathscr{C}$?
   d. Que représente la droite Δ_2 pour la courbe $\mathscr{C}$?

Partie C : Vérification des conjectures

L'objectif de cette partie est de démontrer les conjectures émises dans la partie précédente.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$ puis en 0.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x strictement positif.
   b. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + 1 - \ln x\right)$.
   c. À l'aide de la partie A, étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$?
3. a. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x - 1\right)\right]$.
   b. Que peut-on en déduire pour la droite Δ_1 ?
   c. Étudier la position relative de la droite Δ_1 et de la courbe $\mathscr{C}$.
   d. Démontrer la conjecture émise quant à ce que représente la droite Δ_2 pour la courbe $\mathscr{C}$.

Partie D : Calcul d'aire

1. Soit G et g les fonctions définies sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$G(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\ln x}{x}$$

   Montrer que la fonction G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Calculer l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré sur le graphique fourni en annexe.

ANNEXE

À rendre avec la copie