BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR
SESSION 2001
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
GROUPEMENT B
ELEMENTS DE SOLUTION

EXERCICE I
Partie A

1. Une épreuve n'a que deux issues possibles, et on a la répétition de manière indépendante de cette épreuve. En conséquence, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,9$.

2. L'évènement " 8 pièces au moins soit conformes " est la réunion des évènements disjoints " exactement 8 pièces sont conformes ", "exactement 9 pièces sont conformes " et "exactement 10 pièces sont conformes ". En utilisant les résultats du cours et éventuellement le formulaire, on trouve donc :

$$\begin{aligned} p &= p(X=8) + p(X=9) + p(X=10) \\ &= C_{10}^{8}(0,9)^{8}(0,1)^{2} + C_{10}^{9}(0,9)^{9}(0,1) + C_{10}^{10}(0,9)^{10}(0,1)^{0} \\ &\simeq 0,930 \end{aligned}$$

Partie B

1. Définisson la loi de probabilité T_1 par :

$$T_1 = \frac{M - m_1}{\sigma_1} \Leftrightarrow M = 250 + 1,94T_1$$

La probabilité p_1 que la longueur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 246 et 254 est donc donnée par :

$$p_1 = p(246 \leqslant M \leqslant 254) = p(246 \leqslant 250 + 1,94T_1 \leqslant 254) = p\left(-\frac{4}{1,94} \leqslant T_1 \leqslant \frac{4}{1,94}\right)$$

Comme la loi T_1 est normale, centrée et réduite, on a :

$$p_1 = 2\Pi\left(\frac{4}{1,94}\right) - 1 \simeq 0,961$$

en utilisant les tables de la loi normale centrée réduite.

2. Définisson la loi de probabilité T_2 par :

$$T_2 = \frac{N - m_2}{\sigma_2} \Leftrightarrow N = 150 + 1,52T_2$$

La probabilité p_2 que la largeur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 147 et 153 est donc donnée par :

$$p_2 = p\left(147 \leqslant M \leqslant 153\right) = p\left(147 \leqslant 150 + 1,52T_2 \leqslant 153\right) = p\left(-\frac{3}{1,52} \leqslant T_1 \leqslant \frac{3}{1,52}\right)$$

Comme la loi T_2 est normale, centrée et réduite, on a :

$$p_2 = 2\Pi\left(\frac{3}{1,52}\right) - 1 \simeq 0,951$$

en utilisant les tables de la loi normale centrée réduite.

3. Commes les variables M et N sont indépendantes, la probabilité p_3 qu'une pièce soit conforme est donc égale à :

$$p_3 = p_1 \times p_2 \simeq 0,914$$

Partie C

1. En utilisant les données du texte, on a immédiatement :

$$\mathrm{P(A)} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \quad \mathrm{P(B)} = \frac{2}{5} \quad \mathrm{P(C/A)} = 0,914 \quad \mathrm{P(C/B)} = 0,879$$

2. En appliquant la formule des probabilités conditionnelles :

$$\mathrm{P(C \cap A) = P(A) \times P(C/A)} = \frac{3}{5} \times 0,914 = 0,5484$$

De même :

$$\mathrm{P(C \cap B) = P(B) \times P(C/B)} = \frac{2}{5} \times 0,879 = 0,3516$$

3. Sachant que C=(C∩A)∪(C∩B), la formule des probabilités totale fournit :

$$\mathrm{P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B)} = 0,9$$

EXERCICE II (11 points)

1. Le cours permet de dire que les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions définies par :

$$x \longmapsto ke^{2x}$$

où k est une constante réelle.

2. On a :

$$h'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$$

ce qui permet d'obtenir pour tout réel x :

$$h'(x) - 2h(x) = e^{2x}$$

ce qui prouve bien que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. D'après le cours, on peut dire que les fonctions y, solutions de l'équation différentielle (E) sont définies par :

$$y(x) = ke^{2x} + h(x) = ke^{2x} + xe^{2x}$$

4. $f(0) = -1 \Leftrightarrow k = -1$. La solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la condition $f(0) = -1$ est donc définie pour tout x réel par :

$$f(x) = -e^{2x} + xe^{2x} = e^{2x}(-1+x)$$

1. :

   (a) Le cours donne de manière évidente :

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

   (b) Par développement, on a :

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{2x} - e^{2x} = 0$$

   en utilisant la limite fournie.

   (c) On en déduit que la courbe représentative de f admet comme asymptote horizontale l'axe des abscisses.

2. :

   (a) On vérifie facilement que :

   $$f'(x) = 1 \times e^{2x} + (x-1)\left(2e^{2x}\right) = (2x-1)e^{2x}$$

   (b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $(2x-1)$. Donc si $x \leqslant \frac{1}{2}$, alors $f'(x) \leqslant 0$, tandis que si $x \geqslant \frac{1}{2}$, alors $f'(x) \geqslant 0$.

   (c) On en déduit évidemment que la fonction f est décroissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}, \infty\right[$.

3. :

   (a) On remplace t par $2x$ dans le formulaire, ce qui donne :

   $$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to0}\varepsilon(x) = 0$$

   (b) On a en développant la fonction f :

   $$\begin{aligned} f(x) &= xe^{2x} - e^{2x} \\ &= x\left(1 + 2x + 2x^2\right) - \left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3\right) + x^3\varepsilon(x) \\ &= -1 - x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

(c) On en déduit que la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 a pour équation :

$$y = -1 - x$$

Pour étudier la position relative de C et de T au voisinage de ce point, formons :

$$f(x) - (-x-1) = \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

On en déduit donc que sur un voisinage de 0, si $x < 0$, alors la courbe C est en-dessous de T, et que si $x > 0$, alors C est au-dessus de T.

(d) Voir la courbe en fin de correction.

C. Calcul intégral

1. Effectuons une intégration par parties en posant :

$$u(x) = x - 1 \qquad v'(x) = e^{2x} \Rightarrow u'(x) = 1 \qquad v(x) = \frac{e^{2x}}{2}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \left[(x-1)\frac{e^{2x}}{2}\right]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0} \frac{e^{2x}}{2}dx \\ &= \left[(x-1)\frac{e^{2x}}{2}\right]_{\alpha}^{0} - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_{\alpha}^{0} \\ &= -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}e^{2\alpha} - \frac{1}{2}\alpha e^{2\alpha} \\ &= -\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4}\right)e^{2\alpha} \end{aligned}$$

2.

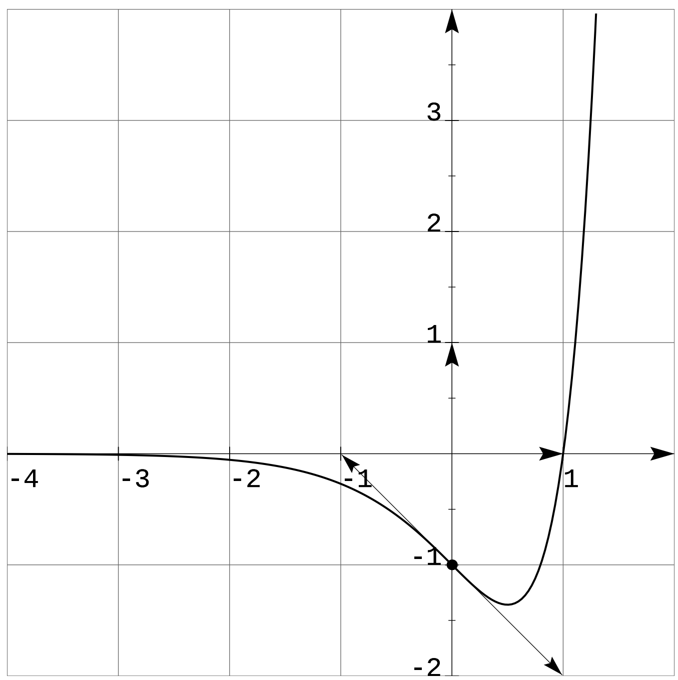
(a) En utilisant la limite de cours :

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \alpha e^{2\alpha} = 0$$

on obtient :

$$\lim_{\alpha \to -\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha \to -\infty} -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}e^{2\alpha} - \frac{1}{2}\alpha e^{2\alpha} = -\frac{3}{4}$$

(b) L'intégrale représente l'opposé de l'aire comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses, pour x compris entre $-\infty$ et 0.


3
2
1
-1
-2
-4
-3
-2
-1
1