BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR
SESSION 2002
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
GROUPEMENT B
ELEMENTS DE SOLUTION

EXERCICE I

1. (a) On a :

$$p(A) = p(X = 0) = e^{-0,28}\frac{(0,28)^0}{0!} \simeq 0,756$$

   (b) L'évènement B est l'union des évènements deux à deux incompatibles " un véhicule tiré au hasard dans la parc a eu exactement 0 sinistre pendant l'année considérée ", " un véhicule tiré au hasard dans la parc a eu exactement 1 sinistre pendant l'année considérée " et " un véhicule tiré au hasard dans la parc a eu exactement 2 sinistres pendant l'année considérée ". Donc

$$\begin{array}{c} p(B) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) \\ = e^{-0,28}\frac{(0,28)^0}{0!} + e^{-0,28}\frac{(0,28)^1}{1!} + e^{-0,28}\frac{(0,28)^2}{2!} \\ \simeq 0,997 \end{array}$$

2. (a) Nous avons une suite de 15 épreuves de Bernouilli indépendantes. Chaque épreuve n'a que deux issues possibles : soit l'évènement E est réalisé avec une probabilité de 0,6, soit il n'est pas réalisé avec une probabilité de 0,4. Ceci prouve que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 15 et 0,6.

   (b) On veut calculer la probabilité de l'évènement :

$$p(Y = 10) = C_{15}^{10} \times (0,6)^{10} \times (0,4)^5 \simeq 0,186$$

3. Puisque C suit la loi normale de moyenne 1200 et d'écart type 200, la variable aléatoire D définie par

$$D = \frac{C - 1200}{200}$$

suit la loi normale centrée réduite. On trouve alors

$$C = 1200 + 200D$$

ce qui permet facilement d'en déduire :

$$1000 \leqslant C \leqslant 1500 \Leftrightarrow -1 \leqslant D \leqslant \frac{3}{2}$$

Il vient alors, en utilisant le formulaire :

$$\begin{array}{c} p(1000 \leqslant C \leqslant 1500) = p\left(-1 \leqslant D \leqslant \frac{3}{2}\right) \\ = \Pi\left(\frac{3}{2}\right) - \Pi(-1) = \Pi\left(\frac{3}{2}\right) - (1 - \Pi(1)) \\ = \Pi\left(\frac{3}{2}\right) + \Pi(1) - 1 \simeq 0,775 \end{array}$$

4. (a) L'estimation ponctuelle est donnée par le pourcentage obtenu sur l'échantillon prélevé :

$$p = 91$$

(b) On pose :

$$T = \frac{F - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}}$$

T suit la loi normale centrée réduite. L'intervalle de confiance pour T à 95% est défini par :

$$p\left(-t \leq T \leq t\right) = 0,95 \Leftrightarrow 2\Pi\left(t\right) - 1 = 0,95 \Leftrightarrow \Pi\left(t\right) = 0,975 \Leftrightarrow t \simeq 1,96$$

en utilisant le formulaire. On en déduit :

$$p\left(-1,96 \leq T \leq 1,96\right) = 0,95 \Leftrightarrow p\left(-1,96 \leq \frac{F - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}} \leq 1,96\right) = 0,95$$

Afin de pouvoir obtenir un intervalle de confiance, il nous faut dans ce cas approximer l'écart-type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}$ de F par σ, qui d'après le cours vaut

$$\sigma = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \times \sqrt{\frac{f\left(f-1\right)}{n}} = \sqrt{\frac{f\left(1-f\right)}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.91 \times (1 - 0.91)}{100 - 1}} \simeq 2.8762 \times 10^{-2}$$

On en déduit ensuite :

$$p\left(-1,96 \leq \frac{F - p}{\sigma'} \leq 1,96\right) = 0,95 \Leftrightarrow p\left(p - 1,96 \times \sigma' \leqslant F \leqslant p + 1,96 \times \sigma'\right) = 0,95$$

On utilise l'estimation ponctuelle de p, à savoir que $p \simeq 0,91$ pour trouver que

$$p - 1,96 \times \sigma' = 0.91 - 1.96 \times 2.8762 \times 10^{-2} \simeq 0.85363$$
$$p + 1,96 \times \sigma' = 0.91 + 1.96 \times 2.8762 \times 10^{-2} \simeq 0.96637$$

En conclusion, l'intervalle de confiance cherché est :

$$[0,853; 0,967]$$

(c) Cette affirmation est fausse d'après le cours.

EXERCICE II

PARTIE A

1. L'équation caractéristique est

$$r^2 - r - 2 = 0$$

qui a pour solution 2 et -1, donc les fonctions y solutions de l'équation différentielle sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y\left(x\right) = Ae^{2x} + Be^{-x}$$

où A et B sont deux constantes réelles quelconques.

2. On a :

$$h'(x) = \left(2 - x^2\right) e^{-x}$$
$$h''(x) = \left(x^2 - 2x - 2\right) e^{-x}$$

ce qui permet facilement de vérifier que

$$h''(x) - h'(x) - 2h(x) = (-6x - 4) e^{-x}$$

ce qui prouve bien que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. D'après le cours, on sait que toute solution de l'équation différentielle (E) est somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation (E_0), donc toute solution f de (E) a pour expression :

$$f(x) = Ae^{2x} + Be^{-x} + \left(x^2 + 2x\right) e^{-x}$$

4. On a facilement :

$$f(0) = A + B = 1 \quad f'(0) = 2A - B + 2 = 1$$

ce qui donne un système d'équations ayant pour solutions $A = 0$ et $B = 1$. La fonction f a donc pour expression :

$$f(x) = \left(x^2 + 2x + 1\right) e^{-x} = (x+1)^2 e^{-x}$$

PARTIE B

1. (a) On a

$$\lim_{x\to-\infty} (x+1)^2 = +\infty \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

(b) D'après le cours, ou bien à l'aide du changement de variable défini par $X = -x$, on a $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$. Il suffit ensuite d'écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = x^2 e^{-x} + 2xe^{-x} + e^{-x}$$

pour en déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(c) On en déduit que la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$, c'est à dire l'axe des abscisses.

2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2(x+1) e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x} = \left(2x + 2 - x^2 - 2x - 1\right) e^{-x} = \left(1 - x^2\right) e^{-x}$$

(b) Comme $e^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $\left(1 - x^2\right)$, trinôme qui a deux racines -1 et 1. En conséquence $\left(1 - x^2\right) \geqslant 0$ sur $[-1, 1]$. Donc $[-1, 1]$ est l'intervalle solution de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

(c) On en déduit facilement que f est décroissante sur $]-\infty, -1]$, croissante sur $[-1, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$.

3. (a) On a à l'aide du formulaire :

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t) \Rightarrow e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

(b) Il suffit d'utiliser le produit de deux développements limités :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2 + 2x + 1\right)\left(1 - x + \tfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right) \\ &= 1 + x - \tfrac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \end{aligned}$$

en ne conservant dans le développement que les termes d'ordre au plus égal à deux.

(c) Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 est donc

$$y = 1 + x$$

et comme

$$f(x) - (1 + x) = -\frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

on peut en déduire que sur un voisinage de 0, le signe de cette différence est égal à celui de $-\frac{1}{2}x^2$, c'est à dire négatif. En conséquence, on peut dire que la courbe C est en dessous de T au voisinage de ce point.

PARTIE C

1. (a) La fonction f définie dans la partie B étant une solution de l'équation différentielle (E), on peut donc dire que pour tout x réel :

$$f''''(x) - f'(x) - 2f(x) = (-6x - 4)e^{-x}$$

On isole facilement $f(x)$ dans un membre pour obtenir l'égalité demandée :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f''(x) - f'(x) + (6x + 4)e^{-x}\right]$$

(b) Un simple calcul de dérivation fournit :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \tfrac{1}{2}\left[f''(x) - f'(x) - 6e^{-x} + (6x + 10)e^{-x}\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[f''(x) - f'(x) + (6x + 4)e^{-x}\right] \\ &= f(x) \end{aligned}$$

et ceci pour tout x de $\mathbb{R}$.

(c) On remplace dans l'expression de $F(x)$ $f(x)$ et $f'(x)$ par leurs expressions , ce qui fournit facilement :

$$F(x) = \left(-x^2 - 4x - 5\right)e^{-x}$$

2. L'aire A de la partie du plan hachurée sur la figure est, en unités d'aire, donnée par l'intégrale

$$A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-1) = 2e - 5$$