

Correction BTS 2003 groupement B

Exercice 1

- (a) $P(E_1) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ car A et B sont indépendants.
D'où $P(E_1) = 0,04 \times 0,02 = 0,0008$.

(b) $P(E_2) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,04 + 0,02 - 0,0008 = 0,0592$
- (a) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,6065 + 0,3033 + 0,0758 = 0,9856$

(b) $P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$
 $= 0,6065 + 0,3033 + 0,0758 + 0,0126 + 0,0016 = 0,9998$

(c) On a vu que $P(X \leq 2) = 0,9856$.
De plus : $P(X \leq 3) = P(X \leq 2) + P(X = 3) = 0,9856 + 0,0126 = 0,9982$. Donc $n = 3$

3. $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(1,5; 0,01) \Leftrightarrow T = \frac{Y - 1,5}{0,01} \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$.

La probabilité demandée est

$$p = P(1,47 \leq Y \leq 1,53) = P(-3 \leq T \leq 3) = 2\Pi(3) - 1 = 2 \times 0,99865 - 1 = 0,997 \text{ à } 10^{-3}$$

4. (a) $\bar{Z} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ avec $\sigma = 0,01$ et $n = 100$
De plus, sous H_0 , $\mu = 1,5$. Donc $\bar{Z} \hookrightarrow \mathcal{N}(1,5; 0,001)$

(b) $\bar{Z} \hookrightarrow \mathcal{N}(1,5; 0,001) \Leftrightarrow \bar{T} = \frac{\bar{Z} - 1,5}{0,001} \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$

$$P(1,5 - h \leq \bar{Z} \leq 1,5 + h) = 0,95 \Leftrightarrow P\left(\frac{-h}{0,001} \leq \bar{T} \leq \frac{h}{0,001}\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow 2\Pi\left(\frac{h}{0,001}\right) - 1 = 0,95 \Leftrightarrow \Pi\left(\frac{h}{0,001}\right) = 0,975 \Leftrightarrow \frac{h}{0,001} = 1,96 \Leftrightarrow h = 0,00196 \text{ à } 10^{-3}$$

- (c) On prélève un échantillon de 100 bouteilles et on calcule la moyenne \bar{z} des volumes d'eau contenus dans les bouteilles de cet échantillon.

Si $\bar{z} \in [1,5 - h; 1,5 + h] = [1,498; 1,502]$ on accepte H_0 . Sinon on refuse H_0 , c'est à dire qu'on accepte H_1 .

- (d) $\bar{z} = 1,495$, donc on refuse H_0

Exercice 2

Partie A. Résolution d'une équation différentielle.

1. $x \mapsto -x$ est une primitive sur \mathbb{R} de $x \mapsto -1$. Donc la solution générale, sur \mathbb{R} , de l'équation différentielle $y' = -y$ est

$$y = Ce^{-x}$$

où C désigne une constante réelle quelconque.

2. $\forall x \in \mathbb{R} : h'(x) = 2e^{-x} + 2x(-e^{-x}) = (2-2x)e^{-x}$ d'où :
 $\forall x \in \mathbb{R} : h'(x) + h(x) = (2-2x)e^{-x} + 2xe^{-x} = 2e^{-x}$
 h est donc solution, sur \mathbb{R} , de l'équation (E).

3. La solution générale de l'équation $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ peut s'obtenir en ajoutant, à une solution particulière de cette équation, la solution générale de l'équation homogène associée : $a(x)y' + b(x)y = 0$.
 La solution générale de (E) est donc

$$y = 2xe^{-x} + Ce^{-x} = (2x+C)e^{-x}$$

où C désigne une constante réelle quelconque.

4. f étant solution de (E) on a $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = (2x+C)e^{-x}$
 La condition initiale $f(0) = 3$ donne $C = 3$ d'où $f(x) = (2x+3)e^{-x}$

Partie B. Etude d'une fonction

1. (a) $f(0) = 3$
 (b) $f'(0) = -1$
 (c) On a $f'(x) = (a-ax-b)e^{-x}$ d'où $\begin{cases} f(0) = 3 \\ f'(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a-b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$
 D'où $f(x) = (2x+3)e^{-x}$
 2. (a) L'application de $(uv)' = u'v + uv'$ donne, avec $u = 2x+3$ et $v = e^{-x}$:
 Pour tout x réel : $f'(x) = 2e^{-x} + (2x+3)(-e^{-x}) = (-2x-1)e^{-x}$
 (b) Une exponentielle étant toujours strictement positive, $f'(x)$ a même signe que $(-2x-1)$
 Donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
(c) $f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\nearrow 2\sqrt{e}$	\searrow

- (d) On a $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$. On en déduit :
 $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$
 (e) La partie régulière du développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(x)$ s'obtient en multipliant $(2x+3)$ par $\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à 2. On obtient alors :

$$f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Partie C. Calcul intégral

1. Pour tout x réel : $f(x) = -f'(x) + 2e^{-x}$. Par intégration, on obtient : $F(x) = -f(x) - 2e^{-x}$
 D'où $F(x) = -(2x+3)e^{-x} - 2e^{-x} = (-2x-5)e^{-x}$
 2. (a) $I = \int_0^{1/2} f(x) dx = [F(x)]_0^{1/2} = F(1/2) - F(0) = -6e^{-1/2} - (-5) = 5 - 6e^{-1/2}$
 (b) $I = 1,361$ à 10^{-3} .

3. (a) $J = \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \right]_0^{1/2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{48} = \frac{65}{48}$

(b) $J = 1,354 \text{ à } 10^{-3}$

(c) $1,361 - 1,354 = 0,007 < 0,01 = 10^{-2}$