BTS 2004 groupement B

Exercice 1 (9 points) Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des tiges métalliques cylindriques pour l'industrie. Leur longueur et leur diamètre sont exprimés en millimètres.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A. Loi normale

Une tige de ce type est considérée comme conforme pour la longueur lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[99{,}45; 100{,}55]$.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque tige prélevée au hasard dans la production, associe sa longueur.

On suppose que X suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart type 0,25.

1. Calculer la probabilité qu'une tige prélevée au hasard dans la production soit conforme pour la longueur.
2. Déterminer le nombre réel h positif tel que : $P(100 - h \leq X \leq 100 + h) = 0{,}95$
   Interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.

B. Loi binomiale et loi de Poisson

Dans un lot de ce type de tiges, 3 % des tiges ne sont pas conformes pour la longueur.

On prélève au hasard 50 tiges de ce lot pour vérification de la longueur. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 tiges.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 50 tiges, associe le nombre de tiges non conformes pour la longueur.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur.
4. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson.
   Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.
5. On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où λ a la valeur obtenue au **4.**
   Calculer $P(Z = 2)$ et $P(Z \leq 2)$.

C. Intervalle de confiance

Dans cette question on s'intéresse au diamètre des tiges, exprimé en millimètres.

On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 50 tiges dans la production d'une journée.

Soit $\bar{D}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 tiges prélevées au hasard et avec remise dans la production d'une journée, associe la moyenne des diamètres des tiges de cet échantillon.

On suppose que $\bar{D}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{50}}$ avec $\sigma = 0{,}19$.

Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue, arrondie à 10^{-2}, est $\bar{x} = 9{,}99$.

1. A partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ des diamètres des tiges produites dans cette journée.
2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\bar{x}$ de la moyenne μ des diamètres des tiges produites pendant la journée considérée, avec le coefficient de confiance 95 %.

3. On considère l'affirmation suivante : "la moyenne μ est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question **2.**"
   Est-elle vraie ? (on ne demande pas de justification).

Exercice 2 (11 points) *Dans cet exercice, on étudie une fonction qui intervient dans des calculs de probabilité à propos de la crue d'un fleuve.*
(Source : un bureau d'étude du domaine de l'équipement)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + (0{,}4x)\,y = 0{,}4x$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' + (0{,}4x)\,y = 0$
2. Montrer que la fonction constante h, définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) = 1$, est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Vérifier que la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x) = 1 - e^{-0{,}2x^2}$ est la solution particulière de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $F(0) = 0$.

B. Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 0{,}4xe^{-0{,}2x^2}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, les unités graphiques étant de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. (a) Démontrer que, pour tout x de $[0;+\infty[$, $f'(x) = 0{,}4\left(1 - \sqrt{0{,}4}\,x\right)\left(1 + \sqrt{0{,}4}\,x\right)e^{-0{,}2x^2}$.
   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0;+\infty[$.
   (c) Donner le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$.
   On y fera figurer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} du maximum de la fonction f.
3. Un logiciel de calcul formel fournit pour f le développement limité suivant, à l'ordre 3, au voisinage de 0 : $f(x) = 0{,}4x - 0{,}08x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.
   Ce résultat est admis et n'est donc pas à démontrer.
   En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0, et la position relative de $\mathcal{T}$ et de $\mathcal{C}$ au voisinage de ce point.
4. Tracer sur la copie la tangente $\mathcal{T}$ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ défini au début de la partie *B*.

C. Application à un problème de probabilité

Une étude statistique, fondée sur un historique des crues d'un fleuve, permet de faire des prévisions sur sa hauteur maximale annuelle, en mètres.

On note X la variable aléatoire qui, à une année prise au hasard dans une longue période, associe la hauteur maximale du fleuve en mètres.

Soit x un réel positif. La probabilité qu'une année donnée la hauteur maximale du fleuve soit inférieure à x mètres est $P(X \leq x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$ où f est la fonction définie dans la partie *B*.

On admet que $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt = 1 - e^{-0{,}2x^2}$.

1. Les digues actuelles ne protègent l'agglomération que lorsque la hauteur est inférieure à 4 mètres.
   Calculer la probabilité $P(X \leq 4)$ qu'une année donnée, l'agglomération soit protégée de la crue ; arrondir le résultat à 10^{-2}.
2. Afin de réaliser des travaux pour améliorer la protection de l'agglomération, on cherche la hauteur x_0, en mètres, telle que $P(X \leq x_0) = 0{,}99$.

   (a) Montrer que x_0 est solution de l'équation : $e^{-0{,}2x^2} = 0{,}01$.

(b) Déterminer la valeur approché arrondie à 10^{-2} de x_0.

(c) On considère l'affirmation suivante :
"En surélevant les digues actuelles d'un mètre, la probabilité qu'une année prise au hasard, l'agglomération soit protégée est supérieure à 0,99".
Cette affirmation est-elle vraie ? (Donner la réponse sans explication)