BTS 2004 Groupement B : Eléments de correction

Exercice 1 *A. Loi normale* **Rappel : Tous les résultats sont donnés à** 10^{-2}

1. $T = \dfrac{X-100}{0,25} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$
   $P(99,45 \leq X \leq 100,55) = P\left(\dfrac{-0,55}{0,25} \leq T \leq \dfrac{0,55}{0,25}\right) = 2\Pi\left(\dfrac{0,55}{0,25}\right) - 1 = 2\Pi(2,2) - 1 = 0,97$
2. $P\left(\dfrac{-h}{0,25} \leq T \leq \dfrac{h}{0,25}\right) = 0,95 \Leftrightarrow 2\Pi\left(\dfrac{h}{0,25}\right) - 1 = 0,95 \Leftrightarrow \Pi\left(\dfrac{h}{0,25}\right) = 0,975$
   D'où $\dfrac{h}{0,25} = 1,96$ et donc $h = 0,49$
   0,95 est la probabilité qu'une tige prélevée au hasard dans la production ait une longueur appartenant à l'intervalle $[99,51; 100,49]$.

B. Loi binomiale et loi de Poisson

1. A chaque tige tirée au hasard, il y a deux issues possibles :
   la tige est conforme pour la longueur
   la tige n'est pas conforme pour la longueur
   Les tirages sont indépendants car le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
   Donc la probabilité d'obtenir une tige non conforme pour la longueur est la même à chaque tirage.
   C'est $p = 0,03$
   On effectue $n = 50$ tirages
   Donc Y suit la binomiale $\mathcal{B}(50; 0,03)$. On note $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(50; 0,03)$.
2. $P(Y = 2) = 0,26$
3. $P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = 0,81$
4. $\mathcal{B}(50; 0,03) \simeq \mathcal{P}(1,5)$
5. $P(Z = 2) = 0,25$ (tables)
   $P(Z \leq 2) = P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2) = 0,81$

C. Intervalle de confiance

1. Une estimation ponctuelle $\hat{\mu}$ de la moyenne μ est donnée par la moyenne de l'échantillon.
   Donc $\hat{\mu} = 9,99$
2. $\left[\bar{x} - \alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ avec $\bar{x} = 9,99$; $\sigma = 0,19$; $n = 50$ et α tel que $2\Pi(\alpha) - 1 = 0,95$ donne $\alpha = 1,96$ et l'intervalle cherché est donc $[9,93; 10,05]$.
3. C'est faux!!!

Exercice 2 *A. Résolution d'une équation différentielle*

1. $y = Ce^{-0,2x^2}$ où C est une constante réelle quelconque.
   – $\forall x \in R_+^* : h'(x) + 0,4\ x\ h(x) = 0 + 0,4\ x = 0,4\ x$ donc h est solution de (E).
2. $y = 1 + Ce^{-0,2x^2}$ où C est une constante réelle quelconque.
3. $F(x) = 1 + Ce^{-0,2x^2}$ et $F(0) = 0 \Rightarrow 1 + C = 0 \Rightarrow C = -1$ d'où
   $F(x) = 1 - e^{-0,2x^2}$

B. Etude d'une fonction

1. L'axe des abscisses est asymptote à $\mathcal{C}$ vers $+\infty$.
2. (a) $f'(x) = 0,4\ e^{-0,2x^2} + 0,4\ x\left(-0,4\ x\ e^{-0,2x^2}\right) = 0,4\left(1 - 0,4\ x^2\right)\ e^{-0,2x^2}$ d'où le résultat.

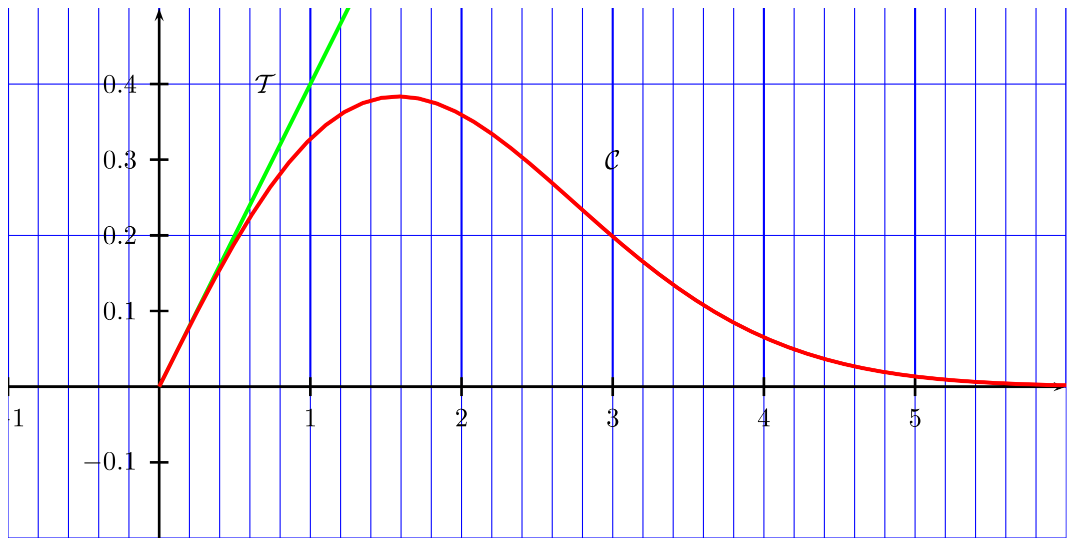
(b) Sur $[0;+\infty[$ $f'(x)$ a même signe que $1+\sqrt{0,4}\ x$

(c)

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{0,4}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0

avec $M = 0,38$ à 10^{-2}

3. La troncature à l'ordre 1 de la partie régulière du développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0 permet de déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T} : y = 0,4\ x$
La position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$ est donnée par le signe de $f(x) - 0,4\ x$
$f(x) - 0,4\ x = -0,08\ x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$
$-0,08\ x^3 + x^3\varepsilon(x)$ a même signe, au voisinage de 0, que $-0,08\ x^3$.
On en déduit que, au voisinage de 0, $\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{T}$ (ne pas oublier que $x \geq 0$)



C. Application à un problème de probabilité

1. $P(X \leq 4) = \displaystyle\int_0^4 f(t)\ dt = 1 - e^{-0,2.4^2} = 1 - e^{-3,2} = 0,96$ à 10^{-2} près.

(a) $P(X \leq x_0) = 0,99 \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^{x_0} f(t)\ dt = 0,99 \Leftrightarrow 1 - e^{-0,2x_0^2} = 0,99 \Leftrightarrow e^{-0,2x_0^2} = 0,01$

(b) De (a) on déduit : $-0,2\ x_0^2 = \ln 0,01$ d'où $x_0^2 = \dfrac{\ln 0,01}{-0,2}$ et $x_0 = \sqrt{\dfrac{\ln 0,01}{-0,2}}$ car $x_0 \geq 0$

On obtient : $x_0 = 4,80$ à 10^{-2} près.

(c) L'affirmation peut s'écrire : "$P(X \leq 5) \geq 0,99$"
Soit $F(x) = P(X \leq x)$. F est la fonction de répartition de X et donc, comme toute fonction de répartition, elle est croissante.
On a donc $F(4,80) \leq F(5)$, c'est à dire : $P(X \leq 4,80) \leq P(X \leq 5)$.
Or, d'après (b) : $P(X \leq 4,80) = 0,99$. Donc $P(X \leq 5) \geq 0,99$.
La réponse est donc OUI *(les justifications ci dessus n'étaient pas demandées)*