

# BTS Groupement B Session 2005

**Exercice 1 (11 points)** Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

*A. Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle (E) :

$$(1+x)y' + y = \frac{1}{1+x}$$

où  $y$  est une fonction de la variable réelle  $x$ , définie et dérivable sur  $] -1; +\infty[$  et  $y'$  sa fonction dérivée.

1. Démontrer que les solutions sur  $] -1; +\infty[$  de l'équation différentielle (E<sub>0</sub>) :

$$(1+x)y' + y = 0$$

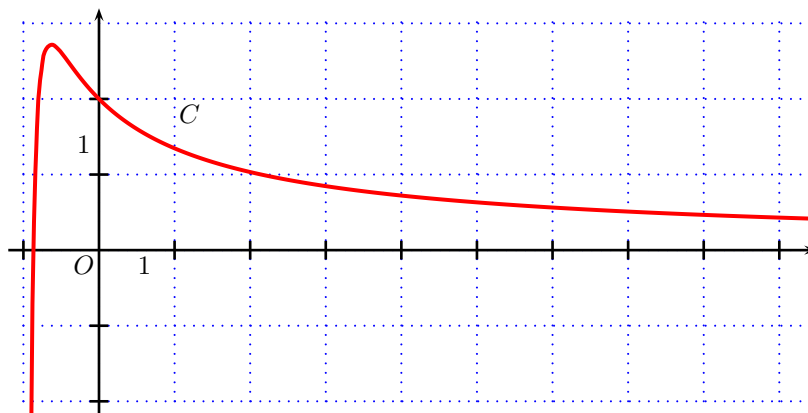
sont les fonctions définies par  $h(x) = \frac{k}{x+1}$  où  $k$  est une constante réelle quelconque.

2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $] -1; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$   
Démontrer que la fonction  $g$  est une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .
4. Déterminer la solution  $f$  de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale  $f(0) = 2$ .

*B. Etude d'une fonction*

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2 + \ln(1+x)}{1+x}$

Sa courbe représentative  $\mathcal{C}$ , dans un repère orthonormal où l'unité graphique est 1 cm, est donnée ci-dessous.



1. On admet que  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .  
Que peut-on en déduire pour la courbe  $\mathcal{C}$ ?
2. (a) Démontrer que, pour tout  $x$  de  $] -1; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{-1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$   
(b) Résoudre dans  $] -1; +\infty[$  l'inéquation  $-1 - \ln(1+x) \geq 0$ .  
En déduire le signe de  $f'(x)$  lorsque  $x$  varie dans  $] -1; +\infty[$  .  
(c) Etablir le tableau de variation de  $f$ .

3. Un logiciel de calcul formel donne le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction  $f$  :

$$f(x) = 2 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

*Ce résultat, admis, n'a pas à être démontré.*

- (a) En déduire une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.  
(b) Etudier la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{T}$  au voisinage de leur point d'abscisse 0.

### C. Calcul intégral

1. Déterminer la dérivée de la fonction  $G$  définie sur  $] -1; +\infty[$  par :

$$G(x) = \frac{1}{2} [\ln(1+x)]^2$$

2. En déduire qu'une primitive de  $f$  sur  $] -1; +\infty[$  est définie par :

$$F(x) = 2 \ln(1+x) + \frac{1}{2} [\ln(1+x)]^2$$

3. (a) On note  $I = \int_0^2 f(x) dx$ . Démontrer que  $I = \frac{1}{2} (\ln 3)^2 + 2 \ln 3$ .  
(b) Donner la valeur approchée arrondie à  $10^{-2}$  de  $I$ .  
(c) Donner une interprétation graphique du résultat obtenu au (b)

## Exercice 2 (9 points) Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une usine fabrique, en grande quantité, des rondelles d'acier pour la construction. Leur diamètre est exprimé en millimètres.

**Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats approchés sont à arrondir à  $10^{-2}$**

### A. Loi normale

Une rondelle de ce modèle est conforme pour le diamètre lorsque celui-ci appartient à l'intervalle  $[89,6; 90,4]$ .

1. On note  $X_1$  la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre. On suppose que la variable aléatoire  $X_1$  suit la loi normale de moyenne 90 et d'écart-type  $\sigma = 0,17$ . Calculer la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production soit conforme.
2. L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des rondelles : Il est envisagé de modifier le réglage des machines produisant les rondelles.  
On note  $D$  la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée dans la production future, associera son diamètre. On suppose que la variable aléatoire  $D$  suit une loi normale de moyenne 90 et d'écart-type  $\sigma_1$ .  
Déterminer  $\sigma_1$  pour que la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production future soit conforme pour le diamètre soit égale à 0,99.

### B. Loi binomiale

On note  $E$  l'événement : « une rondelle prélevée au hasard dans un stock important a un diamètre défectueux ».

On suppose que  $P(E) = 0,02$ .

On prélève au hasard quatre rondelles dans le stock pour vérification de leur diamètre. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de quatre rondelles.

On considère la variable aléatoire  $Y_1$  qui à tout prélèvement de quatre rondelles associe le nombre de rondelles de ce prélèvement ayant un diamètre défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire  $Y_1$  suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucune rondelle n'ait un diamètre défectueux. Arrondir à  $10^{-3}$ .
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus une rondelle ait un diamètre défectueux. Arrondir à  $10^{-3}$ .

*C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale*

Les rondelles sont commercialisées par lot de 1 000.

On prélève au hasard un lot de 1 000 dans un dépôt de l'usine. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1 000 rondelles.

On considère la variable aléatoire  $Y_2$  qui, à tout prélèvement de 1 000 rondelles, associe le nombre de rondelles non conformes parmi ces 1 000 rondelles.

On admet que la variable aléatoire  $Y_2$  suit la loi binomiale de paramètres  $n = 1\,000$  et  $p = 0,02$ . On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire  $Y_2$  par la loi normale de moyenne 20 et d'écart-type 4,43.

On note  $Z$  une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 20 et d'écart-type 4,43.

1. Justifier les paramètres de cette loi normale.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 15 rondelles non conformes dans le lot de 1 000 rondelles, c'est à dire calculer  $P(Z \leq 15,5)$

*D. Test d'hypothèse*

On se propose de construire un test d'hypothèse pour contrôler la moyenne  $\mu$  de l'ensemble des diamètres, en millimètres, de rondelles constituant une grosse livraison à effectuer.

On note  $X_2$  la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée au hasard dans la livraison, associe son diamètre.

La variable aléatoire  $X_2$  suit la loi normale de moyenne inconnue  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma = 0,17$ .

On désigne par  $\bar{X}_2$  la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 rondelles prélevé dans la livraison, associe la moyenne des diamètres de ces rondelles (la livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).

L'hypothèse nulle est  $H_0 : \mu = 90$ . Dans ce cas la livraison est dite conforme pour le diamètre.

L'hypothèse alternative est  $H_1 : \mu \neq 90$ .

Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

1. Enoncer règle de décision permettant d'utiliser ce test en admettant, sous l'hypothèse nulle  $H_0$ , le résultat suivant qui n'a pas à être démontré :

$$P(89,967 \leq \bar{X}_2 \leq 90,033) = 0,95$$

2. On prélève un échantillon de 100 rondelles dans la livraison et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres est  $\bar{x} = 90,02$ .  
Peut-on, au seuil de risque de 5%, conclure que la livraison est conforme pour le diamètre ?