# BTS 2005 : Eléments de correction

**Exercice 1** *A. Equation différentielle.*

1. Sur $]-1;+\infty[$ , l'équation peut s'écrire $y' = -\dfrac{1}{1+x}y$.
   La fonction $A$ définie sur $]-1;+\infty[$ par $A(x) = \ln(1+x)$ est une primitive sur $]-1;+\infty[$ de la fonction $a$ définie sur $]-1;+\infty[$ par $a(x) = \dfrac{1}{1+x}$
   On en déduit (voir formulaire) la solution générale de $(E)$ : $y = ke^{-\ln(1+x)} = ke^{\ln\frac{1}{1+x}} = \dfrac{k}{1+x}$
   où $k$ désigne une constante réelle quelconque.
2. $g$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $\forall x \in ]-1;+\infty[$ : $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x}(1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$
   De plus, $\forall x \in ]-1;+\infty[$ : $(1+x)g'(x) + g(x) = (1+x)\dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} + \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = \dfrac{1}{1+x}$
   Donc $g$ est solution de $(E)$
3. **Théorème :** *La solution générale de l'équation $y' = a(x)y + b(x)$ peut s'obtenir en ajoutant, à une solution particulière de cette équation, la solution générale de l'équation homogène associée : $y' = a(x)y$.*
   On en déduit que la solution générale de $(E)$ peut s'écrire : $y = \dfrac{k+\ln(1+x)}{1+x}$
4. $f$ étant solution de $(E)$ : $f(x) = \dfrac{k+\ln(1+x)}{1+x}$
   $f(0) = 2 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{2+\ln(1+x)}{1+x}$

*B. Etude de fonction*

1. $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x=-1$ est asymptote à $\mathcal{C}$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y=0$ est asymptote à $\mathcal{C}$ vers $+\infty$.
2. (a) $\forall x \in ]-1;+\infty[$ : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x}(1+x) - [2+\ln(1+x)]}{(1+x)^2} = \dfrac{-1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$

   (b) $-1-\ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq -1 = \ln\dfrac{1}{e} \Leftrightarrow 1+x \leq \dfrac{1}{e}$ car ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ .
   Finalement : $-1-\ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1+\dfrac{1}{e}$
   Un carré étant toujours positif, on en déduit le signe de $f'(x)$ :

| $x$ | $-1$ | | $-1+\frac{1}{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

(c)

| $x$ | $-1$ | | $-1+\frac{1}{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\|\|$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $e$ | $\searrow$ | $0$ |

3. (a) La troncature à l'ordre un de la partie régulière du développement limité de $f$ au voisinage de 0 permet d'énoncer qu'une équation de la tangente au point d'abscisse 0 peut s'écrire : $y = 2 - x$

   (b) $f(x) - (2-x) = \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ a même signe, au voisinage de 0, que $\frac{1}{2}x^2$
   Donc, au voisinage de 0, $f(x) - (2-x) \geq 0$ c'est à dire que la courbe est au dessus de la tangente.

*C. Intégration*

1. $\forall x \in ]-1;+\infty[ \ : G'(x) = \frac{1}{2} 2\ln(1+x)\ \frac{1}{1+x} = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$

2. $f(x) = \frac{2}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{2}{1+x} + G'(x) \Rightarrow F(x) = 2\ln(1+x) + G(x)$
   D'où $F(x) = 2\ln(1+x) + \frac{1}{2}[\ln(1+x)]^2$

3. (a) $I = \int_0^2 f(x)\ dx = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0) = 2\ln 3 + \frac{1}{2}(\ln 3)^2$

   (b) A $10^{-2}$ près : $I = 2,80$

   (c) $f \geq 0$ sur $[0;2]$ donc $I$ représente l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=2$

**Exercice 2** *A. Loi normale*

1. $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(90;0,17) \Leftrightarrow X_1^* = \frac{X_1 - 90}{0,17} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$
   $P(89,6 \leq X_1 \leq 90,4) = P\left(\frac{-0,4}{0,17} \leq X_1^* \leq \frac{0,4}{0,17}\right) = 2\Pi\left(\frac{0,4}{0,17}\right) - 1 = 2\,\Pi(2,35) - 1 =$ $2 \times 0,9906 - 1 = 0,9812 = 0,98$ à $10^{-2}$ près

2. $D \hookrightarrow \mathcal{N}(90;\sigma_1) \Leftrightarrow D^* = \frac{D-90}{\sigma_1} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$
   $P(89,6 \leq D \leq 90,4) = 0,99 \Leftrightarrow P\left(-\frac{0,4}{\sigma_1} \leq D^* \leq \frac{0,4}{\sigma_1}\right) = 0,99 \Leftrightarrow 2\Pi\left(\frac{0,4}{\sigma_1}\right) - 1 = 0,99$
   D'où $\Pi\left(\frac{0,4}{\sigma_1}\right) = 0,995$ puis $\frac{0,4}{\sigma_1} = 2,575$ et enfin $\sigma_1 = \frac{0,4}{2,575} = 0,16$ à $10^{-2}$ près.

*B. Loi binomiale*

1. Pour chaque rondelle prélevée dans le stock, il y a deux issues possibles : Son diamètre est défectueux ou pas.
   Le prélèvement étant assimilé à un tirage avec remise, il y a indépendance : La probabilité d'obtenir une rondelle avec un diamètre défectueux est la même à chaque tirage. C'est $p = 0,02$.
   On effectue $n = 4$ tirages.
   Donc $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p) = \mathcal{B}(4;0,02)$

2. Si $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$ : $P(Y_1 = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.
   D'où $P(Y_1 = 0) = C_4^0 0,02^0 (1-0,02)^{4-0} = 0,98^4 = 0,922$ à $10^{-3}$ près.

3. $P(Y_1 \leq 1) = P(Y_1 = 0) + P(Y_1 = 1) = 0,98^4 + 4 \times 0,02 \times 0,98^3 = 0,998$ à $10^{-3}$ près.

*C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.*

1. Lorsqu'on approche la loi de $Y_2$ par la loi de $Z$, on doit conserver les caractéristiques de $Y_2$, à savoir : Espérance et écart-type.
   $E(Y_2) = 1000 \times 0,02 = 20$ et $\sigma(Y_2) = \sqrt{1000 \times 0,02 \times 0,98} = 4,43$
   Il faut donc que $E(Z) = 20$ et $\sigma(Z) = 4,43$. Donc $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(20; 4,43)$
2. $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(20; 4,3) \Leftrightarrow Z^* = \dfrac{Z-20}{4,43} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$
   $P(Z \leq 15,5) = P\left(Z^* \leq \dfrac{-4,5}{4,43}\right) = \Pi\left(-\dfrac{4,5}{4,43}\right) = \Pi(-1,02) = 1 - \Pi(1,02) = 1 - 0,8461 =$ $0,1539 = 0,15$ à $10^{-2}$ près.

*C. Test d'hypothèse*

1. On prélève un échantillon de 100 rondelles et on calcule la moyenne $\bar{x}$ des diamètres de ces 100 rondelles.
   Si $\bar{x} \in [89,967; 90,033]$ on accepte l'hypothèse $H_0 : \mu = 90$
   Sinon, on accepte $H_1 : \mu \neq 90$.
2. $\bar{x}$ appartient à l'intervalle d'acceptation de $H_0$, donc, au seuil de risque de 5%, on peut conclure que la livraison est conforme pour le diamètre.