Mathématiques - brevet de technicien supérieur session 2006 - groupement B Éléments de correction

Exercice 1

A. Résolution d'une équation différentielle

1. L'équation caractéristique associée à (E_0) est :

$$r^2 - 3r - 4 = 0.$$

Le disciminant $\Delta = 9 + 16 = 25$ est stictement positif. L'équation caractéristique admet alors deux racines rélles distinctes $r_1 = -1$ et $r_2 = 4$.
Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont alors les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = \lambda \mathrm{e}^{-x} + \mu \mathrm{e}^{4x} \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels.}$$

2. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
Par dérivation, on obtient pour tout x réel :

$$h'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow h'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

et

$$h''(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow h''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

En reportant dans (E), on obtient :

$$\begin{aligned} h''(x) - 3h'(x) - 4h(x) &= (x-2)\mathrm{e}^{-x} - 3(1-x)\mathrm{e}^{-x} - 4x\mathrm{e}^{-x} \\ &= (x - 2 - 3 + 3x - 4x)\mathrm{e}^{-x} \\ &= -5\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

h est donc une solution particulière de (E).

3. Les solutions de (E) sont données par la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation homogène associée (E_0), d'où les solutions de (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \lambda \mathrm{e}^{-x} + \mu \mathrm{e}^{4x} \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels.}$$

4. On a $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \lambda\mathrm{e}^{-x} + \mu\mathrm{e}^{4x}$ d'où $f(0) = \lambda + \mu$.
$f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x} - \lambda\mathrm{e}^{-x} + 4\mu\mathrm{e}^{4x}$ d'où $f'(0) = 1 - \lambda + 4\mu$.
On cherche la fonction f solution particulière de (E) telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.
On obtient alors le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda + \mu & = 2 \\ -\lambda + 4\mu & = -2 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \lambda & = 2 \\ \mu & = 0 \end{array} \right. .$$

La fonction f est alors :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

B. Étude locale d'une fonction

1. Le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction exponentielle est :

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^3\varepsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

En posant $t = -x$, on obtient :

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Par produit avec $x-2$, il vient :

$$\begin{aligned}(x+2)\mathrm{e}^{-x} &= (x+2)\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)\right)\\ &= 2-2x+x^2-\frac{x^3}{3}+x-x^2+\frac{x^3}{2}+x^3\varepsilon(x) \quad \text{ne garder que les termes de degré inférieur à 3}\\ &= 2-x+\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x)=2-x+\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$$

2. Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 est donnée par la partie affine du développement limité de f au voisinage de 0. Alors, ici, T a pour équation :

$$y=2-x.$$

3. Pour la position relative de (C) et (T) au voisinage de 0, il faut étudier le signe de

$$f(x)-(2-x)=\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x),$$

expression qui est du signe de $\frac{x^3}{6}$ au voisinage de 0.
   - Pour $x<0$, $f(x)-(2-x)<0$: la courbe (C) est en dessous de la tangente (T),
   - Pour $x=0$, (T) et C sont sécantes,
   - Pour $x>0$, $f(x)-(2-x)>0$, la courbe (C) est au-dessus de la tangente (T).

C. Calcul intégral

1. On a :

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{0,6} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{0,6}(x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On intègre par parties en posant :

$$\begin{aligned}u(x) &= x+2 \quad \text{alors} \quad u'(x)=1\\ v'(x) &= \mathrm{e}^{-x} \quad \text{alors} \quad v(x)=-\mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}I &= \left[-(x+2)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{0,6}-\int_0^{0,6}-\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= -2,6\mathrm{e}^{-0,6}+2-\left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{0,6}\\ &= -2,6\mathrm{e}^{-0,6}+2-\mathrm{e}^{-0,6}+1\\ &= 3-3,6\mathrm{e}^{-0,6}.\end{aligned}$$

2. $I\approx 1,024$.
3. Comme la courbe (C) est au-dessus de l'axe des abscisses pour $x\geq -2$, I est l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la courbe (C) et la droite d'équation $x=0,6$. Cette aire mesure environ $1,024$ unités d'aire.

Exercice 2

A. Ajustement affine

1. (a) À l'aide de la calcultrice, on obtient un coefficient de corrélation linéaire $r \approx 0,98$ arrondi à 10^{-2}.
   (b) Avec les arrondis imposés, la droite de régression linéaire de y en x a pour équation

$$y = 0,406x + 15.$$

2. Pour connaître une estimation au rang 7, il suufit de remplacer x par 7 dans l'expression précédente. On obtient $y \approx 17,842$.
   Au rang 7, 17 842 chaudières seront fabriquées en supposant que la tendance actuelle se poursuive.

B. Probabilités conditionnelles

1. D'après l'énoncé, on a :
   - $P(A) = \dfrac{900}{1500} \Leftrightarrow P(A) = 0,6$.
   - $P(B) = \dfrac{600}{1500} \Leftrightarrow P(B) = 0,4$.
   - $P(D/A) = \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow P(D/A) = 0,01$.
   - $P(D/B) = \dfrac{5}{100} \Leftrightarrow P(D/B) = 0,05$.
2. $P(D \cap A) = P(A) \times P(D/A)$ d'où $P(D \cap A) = 0,006$.
   De même, on a : $P(D \cap B) = P(B) \times P(D/B)$ d'où $P(D \cap B) = 0,02$.
3. Calculons $P(D)$:

$$\begin{aligned} P(D) &= P\left((D \cap A) \cup (D \cap B)\right) \\ &= P(D \cap A) + P(D \cap B) \quad \text{car les événements } (D \cap A) \text{ et } (D \cap B) \text{ sont incompatibles} \\ &= 0,006 + 0,02 \\ &= 0,026. \end{aligned}$$

   On a $P(\overline{D}) = 1 - P(D)$ d'où $P(\overline{D}) = 0,974$.

C. Loi normale

X suit la loi normale de moyenne 15 et d'écart-type 3, alors la variable aléatoire $T = \dfrac{X - 15}{3}$ suit la loi normale centrée réduite.

Calculons $P(X \geq 10)$:

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= 1 - P(X \leq 10) \\ &= 1 - P\left(T \leq \frac{10-15}{3}\right) \\ &= 1 - P\left(T \leq -\frac{5}{3}\right) \\ &= 1 - \Pi\left(-\frac{5}{3}\right) \\ &= 1 - \left(1 - \Pi\left(\frac{5}{3}\right)\right) \\ &= \Pi\left(\frac{5}{3}\right) \\ &\approx \Pi(1,67) \\ &\approx 0,952. \end{aligned}$$

D. Intervalle de confiance

1. Une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p des chaudières de ce stock qui sont sans aucun défaut est $\widehat{p} = \dfrac{94}{100} = 0,94$.

2. Un intervalle de confiance de la fréquence p avec le coefficient de confiance de 95% est

$$\left[\widehat{p} - t\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n-1}}\ ;\ \widehat{p} + t\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n-1}}\right]$$

avec $\widehat{p} = 0,94$, $n = 100$, et t tel que $2\Pi(t) - 1 = 0,95$.
$\Pi(t) = \dfrac{1,95}{2} = 0,975$. La table nous donne $t = 1,96$.
L'intervalle de confiance de p avec le coefficient de confiance de 95% est alors :

$$[0,89\ ;\ 0,99].$$

3. Non, la fréquence p n'appartient pas nécessairement à l'intervalle de confiance.