Mathématiques - brevet de technicien supérieur
session 2007 - groupement B
Éléments de correction

Exercice 1 (12 points)

A. Résolution d'une équation différentielle

1. La fonction G définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $G(t) = 710t$ est une primitive de la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = 710$.
   On en déduit la solution générale de l'équation homogène (E_0), $y(t) = k\mathrm{e}^{-710t}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
2. La fonction h est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, et $h'(t) = 0$.
   D'où il vient immédiatement : $h'(t) + 710h(t) = 710$: h est une solution particulière de (E).
3. La solution générale de (E) s'obtient en ajoutant une solution particulière h à la solution générale de l'équation homogène (E_0).
   La solution générale de (E) peut s'écrire :
   $$y(t) = k\mathrm{e}^{-710t} + 1 \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$
4. La fonction φ est solution de (E) alors $\varphi(t) = k\mathrm{e}^{-710t} + 1$.
   On veut de plus $\varphi(0) = 0$ alors $k = -1$, d'où :
   $$\varphi(t) = 1 - \mathrm{e}^{-710t}$$

B. Étude d'une fonction

1. φ est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et $\varphi'(t) = 710\mathrm{e}^{-710t}$.
   Or, pour tout réel $t \geq 0$, $\mathrm{e}^{-710t} > 0$, alors $\varphi'(t) > 0$: la fonction φ est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. (a) Le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction exponentielle est :
   $$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$
   En posant $x = -710t$, on obtient :
   $$\mathrm{e}^{-710t} = 1 - 710t + \frac{(-710t)^2}{2} + t^2\varepsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0.$$

D'où le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction φ est :

$$\varphi(t) = 710t - \frac{(710t)^2}{2} + t^2\varepsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

(b) Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 est donnée par la partie affine du développement limité de φ au voisinage de 0. Alors, ici, T a pour équation :

$$y = 710t.$$

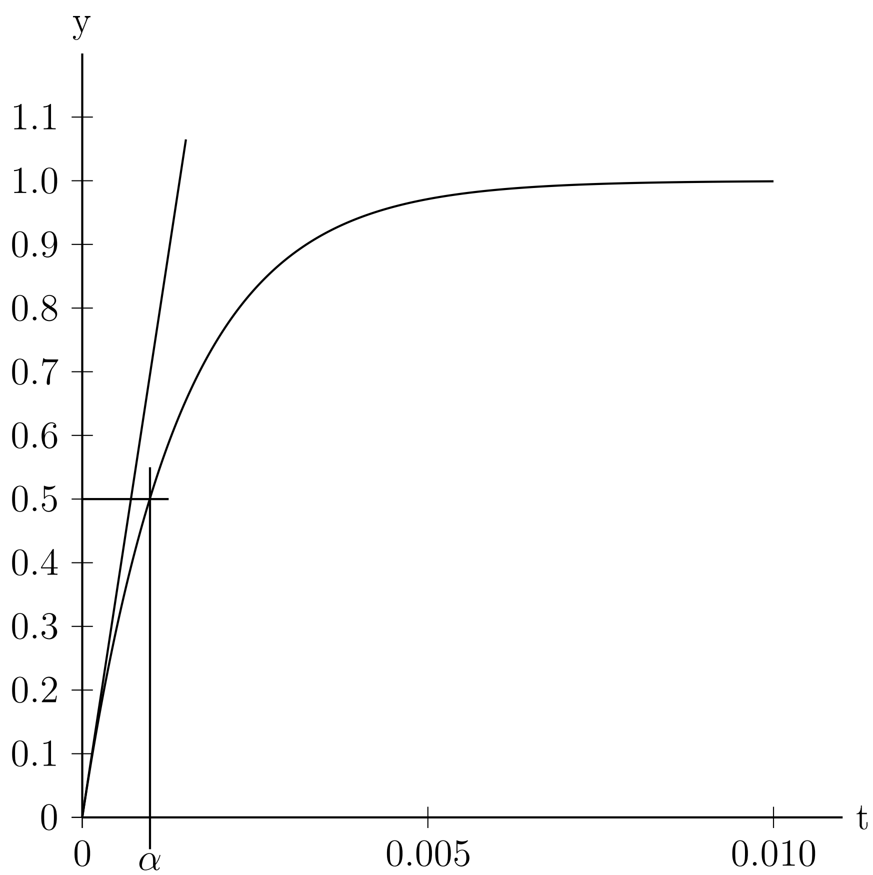
Pour la position relative de (C) et (T) au voisinage de 0, il faut étudier le signe de

$$\varphi(t) - (710t) = -\frac{(710t)^2}{2} + t^2\varepsilon(t),$$

expression qui est du signe de $-\dfrac{(710t)^2}{2}$ au voisinage de 0, c'est-à-dire toujours négatif.

Au voisinage de 0, la courbe C est toujours au dessous de la tangente T.

3. Courbe et tangente.



4. (a) On veut $\varphi(\alpha) = 0,5$, alors $\mathrm{e}^{-710\alpha} = 0,5$ équivaut à $\alpha = -\dfrac{\ln 0,5}{710}$.

   Or $\ln 0,5 = \ln \dfrac{1}{2} = -\ln 2$, alors

$$\alpha = \frac{\ln 2}{710} \simeq 98 \times 10^{-5}$$

   (b) Sur la figure, il faut tracer la droite d'équation $y = 0,5$, et α est l'abscisse du point d'intersection de cette droite et de la courbe C.

C. Calcul intégral

1. On a

$$\begin{aligned} I(t) &= 710 \int_0^t x\mathrm{e}^{-710x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^t 710x\mathrm{e}^{-710x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

   On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{lll} u(x) = x & \text{alors} & u'(x) = 1 \\ v'(x) = 710\mathrm{e}^{-710x} & \text{alors} & v(x) = -\mathrm{e}^{-710x} \end{array}$$

   d'où :

$$\begin{aligned} I &= \left[-x\mathrm{e}^{-710x}\right]_0^t - \int_0^t -\mathrm{e}^{-710x}\,\mathrm{d}x \\ &= -t\mathrm{e}^{-710t} + \left[\frac{\mathrm{e}^{-710x}}{-710}\right]_0^t \\ &= -t\mathrm{e}^{-710t} - \frac{1}{710}\mathrm{e}^{-710t} + \frac{1}{710}. \end{aligned}$$

2. $t\mathrm{e}^{-710t} = \dfrac{1}{710} \times \dfrac{710t}{\mathrm{e}^{710t}}$.

   En posant $u = 710t$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} 710t = +\infty$ et à l'aide de $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^u}{u} = +\infty$, il vient

$$\lim_{t\to+\infty} t\mathrm{e}^{-710t} = 0$$

   De plus, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-710t} = 0$, alors on a

$$\lim_{t\to+\infty} I(t) = \frac{1}{710} \simeq 141 \times 10^{-5}.$$

Exercice 2 (8 **points**)

A. Loi normale

X suit la loi normale de moyenne 30 et d'écart-type $0,09$, alors la variable aléatoire $T=\dfrac{X-30}{0,09}$ suit la loi normale centrée réduite.

Une pièce est conforme si $X \in [29,8\ ;\ 30,2]$.

$$\begin{aligned}
P(29,8 \leq X \leq 30,2) &= P\left(\frac{29,8-30}{0,09} \leq T \leq \frac{30,2-30}{0,09}\right)\\
&= P\left(-\frac{0,2}{0,09} \leq T \leq \frac{0,2}{0,09}\right)\\
&= P\left(-\frac{20}{9} \leq T \leq \frac{20}{9}\right)\\
&= \Pi\left(\frac{20}{9}\right) - \Pi\left(-\frac{20}{9}\right)\\
&= \Pi\left(\frac{20}{9}\right) - \left[1-\Pi\left(\frac{20}{9}\right)\right]\\
&= 2\Pi\left(\frac{20}{9}\right) - 1\\
&\approx 2\Pi(2,22) - 1\\
&\approx 0,9736.
\end{aligned}$$

B. Loi binomiale

1. – Chaque prélèvement est constitué par 20 épreuves élémentaires indépendantes puisque le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
   – Chaque épreuve élémentaire peut déboucher sur deux résultats et deux seulement : la pièce de type 2 est défectueuse, évènement de probabilité $p = P(E) = 0,03$ et la pièce de type 2 n'est pas défectueuse, évènement de probabilité $q = 1 - p = 0,97$.
   – La variable aléatoire Y associe à ces tirages le nombre total de pièces de type 2 défectueuses.

   Donc Y suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,03.
2. On demande

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= \mathrm{C}_{20}^{0}p^0q^{20}\\
&= 0,97^{20}\\
&\simeq 0,54
\end{aligned}$$

3. On demande la probabilité qu'une pièce au moins soit défectueuse, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y=0)\\
&\simeq 0,46
\end{aligned}$$

C. Test d'hypothèse

1. $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 400 et d'écart-type $0,5$, alors la variable aléatoire $T = \dfrac{\overline{Z} - 400}{0,5}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$\begin{aligned} P(400 - h \leq \overline{Z} \leq 400 + h) &= P\left(-\frac{h}{0.5} \leq T \leq \frac{h}{0.5}\right) \\ &= P(-2h \leq T \leq 2h) \\ &= \Pi(2h) - \Pi(-2h) \\ &= \Pi(2h) - [1 - \Pi(2h)] \\ &= 2\Pi(2h) - 1 \end{aligned}$$

   $2\Pi(2h) - 1 = 0,95$ alors $\Pi(2h) = 0,975$.
   Par lecture inverse de la table, on obtient $2h = 1,96$ c'est-à-dire $h = 0,98$.

2. D'après la question précédente, nous avons alors

$$P(399,02 \leq \overline{Z} \leq 400,98) = 0,95$$

   La règle de décision permettant d'utiliser ce test est la suivante :
   On prélève un échantillon aléatoire de 100 pièces, on mesuse la hauteur des pièces et on calcule la moyenne $\overline{z}$ de ces hauteurs :
   - Si $\overline{z} \in [399,02\ ;\ 400,98]$, on accepte l'hypothèse H_0 et on rejette H_1, donc la livraison est conforme pour la hauteur,
   - Si $\overline{z} \notin [399,02\ ;\ 400,98]$, on rejette l'hypothèse H_0 et on accepte H_1, donc la livraison n'est pas conforme pour la hauteur.

3. Ici $\overline{z} = 399,12$ donc $\overline{z} \in [399,02\ ;\ 400,98]$: la livraison est conforme pour la hauteur, au seuil de 5%.