Mathématiques - brevet de technicien supérieur
session 2008 - groupement B

Exercice 1 : *(12 points)*

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

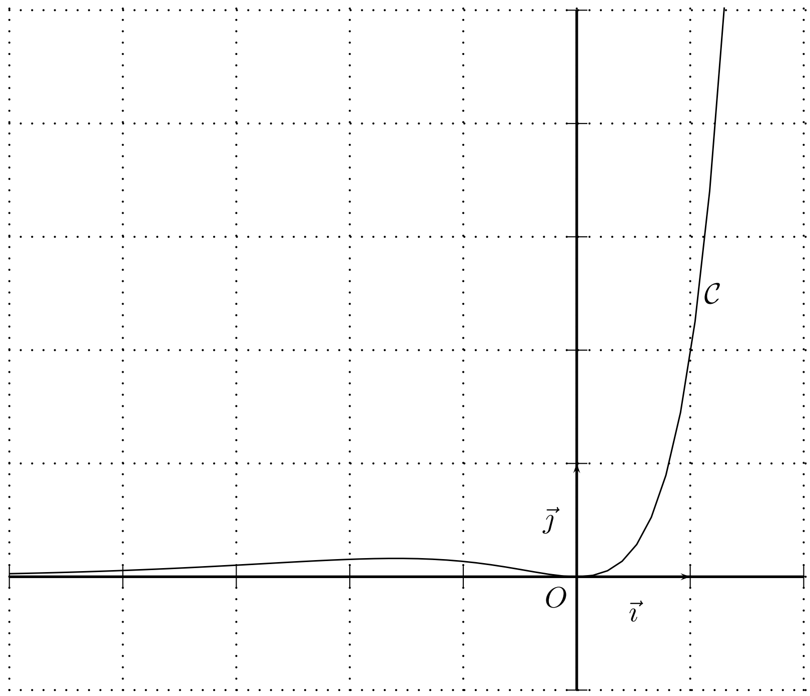
A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = x\mathrm{e}^x$ où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :
$$y' - 2y = 0.$$
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x-1)\mathrm{e}^x$.
Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^x$. Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.



1. (a) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x - 2 - x)$.
   (b) En déduire le coefficient directeur $f'(0)$ de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abcisse 0.
   Interpréter graphiquement ce résultat.

2. (a) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$.
   (b) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

C. Calcul intégral

1. On note $I = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x$.
   Démontrer que $I = 0,009$.
2. On note $J = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.
   Démontrer que $J = 0,5\left(\mathrm{e}^{0,6} - \mathrm{e}^{-0,6}\right)$.
3. On note $K = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} (x+1)\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$.
   Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = 0,3\left(\mathrm{e}^{0,3} + \mathrm{e}^{-0,3}\right)$.
4. On note $L = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de L.
   (b) Donner la valeur approchée de L arrondie à 10^{-3}.
   (c) Vérifier que la valeur exacte de I et la valeur approchée de L obtenue à la question précédente diffèrent de $4,5 \times 10^{-4}$.

Exercice 2 : *(8 points)*

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique en grande série des pièces de bois. Ces pièces sont prévues pour s'encastrer les unes dans les autres.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

A. Loi normale

Une pièce de type est conforme lorsque sa cote x, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle $[9,5\,;\,10,5]$ et lorsque sa cote y appartient à l'intervalle $[10,5\,;\,11,5]$.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque pièce de ce type prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe sa cote x. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 10 et d'écart type 0,21.
   Calculer $P(9,5 \leqslant X \leqslant 10,5)$.
2. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque pièce de ce type prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe sa cote y. On admet que $P(10,5 \leqslant Y \leqslant 11,5) = 0,985$.
   On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
   On prélève une pièce au hasard dans la production d'une journée. Déterminer la probabilité qu'elle soit conforme.

B. Loi binomiale et loi de Poisson

On considère un stock important de pièces.
On note E l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans le stock est défectueuse ».
On suppose que $P(E) = 0,03$.
On prélève au hasard 50 pièces dans le stock de pièces pour vérification. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 pièces. On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de pièces de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer $P(Z = 0)$ et $P(Z \leqslant 2)$.
3. On considère que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Z peut être approchée par une loi de Poisson.
   (a) Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.
   (b) On désigne par Z_1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ a la valeur obtenue au a).
   En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 50 pièces, au plus deux pièces soient défectueuses.

C. Intervalle de confiance

Dans cette partie, on considère une grande quantité de pièces devant être livrées à une chaîne d'hypermarchés. On considère un échantillon de 100 pièces prélevées au hasard dans cette livraison. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.
On constate que 96 pièces sont sans défaut.

1. Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p des pièces de cette livraison qui sont sans aucun défaut.
2. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 pièces prélevées au hasard et avec remise dans cette livraison, associe la fréquence des pièces de cet échantillon qui sont sans défaut.

   On suppose que F suit la loi normale de moyenne p et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$, où p est la fréquence inconnue des pièces de la livraison qui sont sans aucun défaut.
   Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence p avec le coefficient de confiance de 95%.