☙ BTS Groupement B – Mathématiques ❧

Éléments de correction

Session 2011

Exercice 1 :
Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1. (a) L'équation $r^2 - 3r + 2 = 0$ admet deux racines réelles $r = 1$ et $r = 2$.

$$S = \{1, 2\}$$

   (b) L'équation caractéristique associée à (E_0) est l'équation

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

   dont on a déterminé précédemment les solutions.
   La solution générale de (E_0) est alors

$$y(x) = \lambda \mathrm{e}^x + \mu \mathrm{e}^{2x} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$$

2. (a) La fonction dérivée de g est

$$g'(x) = (2x+2)\mathrm{e}^x$$

   (b) à l'aide de la dérivée d'un produit, et après simplification, on a

$$g''(x) = (2x+4)\mathrm{e}^x$$

   Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) &= (2x+4)\mathrm{e}^x - 3 \times (2x+2)\mathrm{e}^x + 2\left(2x\mathrm{e}^x + 2\right) \\ &= (2x + 4 - 6x - 6 + 4x)\mathrm{e}^x + 6 \\ &= -2\mathrm{e}^x + 6 \end{aligned}$$

   Par conséquent, la fonction g est une solution particulière de l'équation (E).

3. La solution générale de l'équation (E) s'obtient en ajoutant la solution générale de l'équation homogène associée (E_0) et une solution particulière de (E).

$$y(x) = \lambda \mathrm{e}^x + \mu \mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^x + 3 \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$$

4. On a déjà f de la forme $f(x) = \lambda \mathrm{e}^x + \mu \mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^x + 3$.
   Or $f(0) = 2$ d'où $\lambda + \mu + 3 = 2$, c'est-à-dire $\lambda + \mu = -1$.
   On a aussi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lambda \mathrm{e}^x + 2\mu \mathrm{e}^{2x} + g'(x) \\ &= \lambda \mathrm{e}^x + 2\mu \mathrm{e}^{2x} + (2x+2)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

   Or $f'(0) = 1$ d'où $\lambda + 2\mu + 2 = 1$, c'est-à-dire $\lambda + 2\mu = -1$.
   Il faut alors résoudre le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = -1 \\ \lambda + 2\mu = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

   La fonction f cherchée est alors

$$f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^x + 3$$

Partie B :

1. (a) On écrit $f(x) = 2x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 3$.
   Comme on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, alors, par somme :
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$$
   (b) D'après le résultat précédent, la courbe C admet la droite d'équation $y = 3$ comme asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.

2. (a) D'après le formulaire, on a le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro de e^x :
   $$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to0}\varepsilon(x) = 0$$
   alors, par produit avec $(2x-1)$ en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2 :
   $$\begin{aligned} f(x) = &= (2x-1)\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) + 3 + x^2\varepsilon(x) \\ &= -1 - x - \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2x^2 + 3 + x^2\varepsilon(x) \\ \\ &= 2 + x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \end{aligned}$$
   (b) Une équation de la tangente T à la courbe C est donnée par la 2partie affine de ce développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro de f
   $$(T): \quad y = 2 + x$$
   (c) La courbe C est au-dessus de la tangente T au voisinage de 0 car $\dfrac{3}{2}x^2$ est positif au voisinage de 0.

3. (a) Comme $f'(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x$ et que pour tout réel x, $\quad \mathrm{e}^x > 0$, alors $f'(x)$ est du signe de $(2x+1)$.
   $2x + 1 < 0 \iff x < -\dfrac{1}{2}$ et $2x + 1 > 0 \iff x > -\dfrac{1}{2}$, alors la fonction f est
   — strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right]$,
   — strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.
   (b) Le minimum de f est alors pour $x = -\dfrac{1}{2}$ et
   $$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} + 3 \\ &\approx 1,79 \end{aligned}$$

4. (a) On a
   $$\begin{aligned} I &= \int_0^{0,5}\left(2 + x + \frac{3}{2}x^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3\right]_0^{0,5} \\ &= 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{19}{16} \\ &= 1,1875 \end{aligned}$$
   (b) Pour intégrer par parties, on pose
   $$\begin{cases} u(x) = 2x - 1 \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned}
K &= \int_0^{0,5} (2x-1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\
&= \left[(2x-1)\mathrm{e}^x\right]_0^{0,5} - \int_0^{0,5} 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\
&= \left[(2x-1)\mathrm{e}^x\right]_0^{0,5} - 2\left[\mathrm{e}^x\right]_0^{0,5}\\
&= \left[(2x-3)\mathrm{e}^x\right]_0^{0,5}\\
&= -2\mathrm{e}^{0,5} + 3
\end{aligned}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{0,5} f(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{0,5} \big((2x-1)\mathrm{e}^x + 3\big)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{0,5} (2x-1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int_0^{0,5} 3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\
&= K + 3\,[x]_0^{0,5}\\
&= K + 3\times 0,5\\
&= \frac{9}{2} - 2\mathrm{e}^{0,5}
\end{aligned}$$

(d) On a

$$\begin{aligned}
J - I &= \frac{9}{2} - 2\mathrm{e}^{0,5} - 1,1875\\
&\approx 0,015\\
&< 2\times 10^{-2}
\end{aligned}$$

Exercice 2 :
Partie A :

X suit la loi normale $\mathcal{N}(8,33;0,09)$ alors $T = \dfrac{X-8,33}{0,09}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

1. On demande $p(8,18 \leqslant X \leqslant 8,48)$.

$$\begin{aligned} p(8,18 \leqslant X \leqslant 8,48) &= p\left(\frac{8,18-8,33}{0,09} \leqslant T \leqslant \frac{8,48-8,33}{0,09}\right) \\ &= p\left(-\frac{0,15}{0,09} \leqslant T \leqslant \frac{0,15}{0,09}\right) \\ &= p\left(-\frac{15}{9} \leqslant T \leqslant \frac{15}{9}\right) \\ &= \Pi\left(\frac{15}{9}\right) - \Pi\left(-\frac{15}{9}\right) \\ &= \Pi\left(\frac{15}{9}\right) - \left[1-\Pi\left(\frac{15}{9}\right)\right] \\ &= 2\Pi\left(\frac{15}{9}\right) - 1 \\ &\approx 2\Pi(1,67) - 1 \\ &\approx 2 \times 0,9525 - 1 \\ &\approx 0,905 \end{aligned}$$

2. En procédant de la même façon, on a

$$\begin{aligned} p(8,33-h \leqslant X \leqslant 8,33+h) &= p\left(\frac{8,33-h-8,33}{0,09} \leqslant T \leqslant \frac{8,33+h-8,33}{0,09}\right) \\ &= p\left(-\frac{h}{0,09} \leqslant T \leqslant \frac{h}{0,09}\right) \\ &= p\left(-\frac{100h}{9} \leqslant T \leqslant \frac{100h}{9}\right) \\ &= \Pi\left(\frac{100h}{9}\right) - \Pi\left(-\frac{100h}{9}\right) \\ &= \Pi\left(\frac{100h}{9}\right) - \left[1-\Pi\left(\frac{100h}{9}\right)\right] \\ &= 2\Pi\left(\frac{100h}{9}\right) - 1 \end{aligned}$$

Il faut alors résoudre

$$2\Pi\left(\frac{100h}{9}\right) - 1 = 0,95$$

c'est-à-dire

$$\Pi\left(\frac{100h}{9}\right) = 0,975$$

d'où

$$\frac{100h}{9} = 1,96$$

alors

$$h \approx 0,176$$

On a donc

$$p(8,154 \leqslant X \leqslant 8,506) = 0,95$$

c'est-à-dire que la probabilité qu'une pièce possède un diamètre compris entre $8,154$ et $8,506$ est égale à $0,95$.

Partie B :

1. — Chaque prélèvement est constitué de 50 épreuves élémentaires indépendantes puisque le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise ;
   — Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :
     — soit le succès : l'événement E, « une gaine prélevée dans un stock important est non conforme pour le diamètre intérieur », de probabilité $p = p(E) = 0,096$,
     — soit l'échec : l'événement $\bar{E}$, « une gaine prélevée dans un stock important est conforme pour le diamètre intérieur », de probabilité $q = 1 - p = 0,904$;
   — La variable aléatoire X mesure le nombre de succès,

   alors la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,096$.
2. On demande $p(X = 5)$.

$$\begin{aligned} p(X=5) &= \mathrm{C}_{50}^{5}\, 0,096^{5} \times 0,904^{45} \\ &\approx 0,184 \end{aligned}$$

3. On demande ici $p(X \leqslant 2)$.
   On a

$$\begin{aligned} p(X \leqslant 2) &= p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) \\ &= 0,904^{50} + 50 \times 0,096 \times 0,904^{49} + \mathrm{C}_{50}^{2}\, 0,096^{2} \times 0,904^{48} \\ &\approx 0,129 \end{aligned}$$

Partie C :

1. La règle de décision permettant d'utiliser ce test est la suivante : on prélève un échantillon aléatoire de 300 pastilles, on mesure le diamètre des pastilles et on calcule la moyenne $\bar{d}$ de ces diamètres :
   — Si $\bar{d} \in [8,106 ; 8,154]$, on accepte l'hypothèse H_0 et on rejette H_1 : la livraison est conforme pour le diamètre, au seuil de 5%.
   — Si $\bar{d} \notin [8,106 ; 8,154]$, on rejette H_0 et on accepte H_1 : la livraison est non conforme pour le diamètre.
2. Ici, $\bar{d} \notin [8,106 ; 8,154]$, par conséquent la livraison n'est pas conforme pour le diamètre, au seuil de 5 %.

Suggestions ou remarques : xavier.tisserand@ac-poitiers.fr