Corrigé du BTS Métropole–Antilles–Guyane
13 mai 2015 - groupement B

Exercice 1 **10 points**

A. Résolution d'une équation différentielle

1. **a.** $r^2+5r+4=0$ est une équation du second degré dont les solutions sont : $r_1=-1$ et $r_2=-4$

   b. D'après le rappel des formules, la solution générale, sur $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle :

   $$y''+5y'+4y=0 \text{ est } y(x)=k_1\mathrm{e}^{-x}+k_2\mathrm{e}^{-4x}$$

   où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles.

2. Le résultat du logiciel de calcul formel permet de dire que f, la solution générale sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle

   $$y''+5y'+4y=10$$

   a pour expression :

   $$f(x)=k_1\mathrm{e}^{-x}+k_2\mathrm{e}^{-4x}+\frac{5}{2}$$

   où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles.
   On a donc $f'(x)=-k_1\mathrm{e}^{-x}+(-4)k_2\mathrm{e}^{-4x}=-k_1\mathrm{e}^{-x}-4k_2\mathrm{e}^{-4x}$.
   Déterminons la solution particulière telle que :
   $\begin{cases} f(0) &= 5\\ f'(0) &= -1\end{cases} \iff \begin{cases} k_1+k_2+\frac{5}{2} &= 5\\ -k_1-4k_2 &= -1\end{cases}$, d'où par somme
   $-3k_2=\frac{3}{2} \iff k_2=-\frac{1}{2}$.
   Par substitution dans la première équation :
   $k_1-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=5 \iff k_1=3$.
   La solution particulière est définie par : $f(x)=3\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4x}+\frac{5}{2}$.

B. Étude d'une fonction

1. D'après le graphique, la fonction $f : t\mapsto 3\mathrm{e}^{-t}-0,5\mathrm{e}^{-4t}+2,5$ semble décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$
2. Pour tout $t\in[0\,;\,+\infty[$ $f'(t)=-\mathrm{e}^{-4t}(3\mathrm{e}^{3t}-2)$, comme $3\mathrm{e}^{3t}-2>0$ sur $[0\,;\,+\infty[$, on sait également que pour tout $t\in[0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^{-4t}>0$, donc $f'(t)<0$ sur $[0\,;\,+\infty[$, par conséquent f est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$
3. Le développement limité de la fonction f, à l'ordre 2, au voisinage de 0 est : $f(t)=5-t-\frac{5}{2}t^2+t^2\epsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0}\epsilon(t)=0$.
4. $y=-t+5$ est l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
5. Pour l'étude de la positon relative de T par rapport à $\mathscr{C}$, il suffit d'étudier le signe de $f(t)-(-t+5)$ au voisinage de 0.
   D'après 2. a. $f(t)-(-t+5)=-\frac{5}{2}t^2+t^2\epsilon(t)=-t^2\left(\frac{5}{2}+\epsilon(t)\right)$, or $\frac{5}{2}+\epsilon(t)$ est positif car au voisinage de 0, $\epsilon(t)$ est négligeable devant $\frac{5}{2}$. Donc signe $(f(t)-(-t+5))=\text{signe}\left(-t^2\right)$, d'où $f(t)-(-t+5)\leqslant 0$, par conséquent T est au dessus de $\mathscr{C}$.

6. $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-t} = \lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-4t} = 0$
   par somme $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 2,5$.
7. Cette limite indique que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote d'équation $y = 2,5$ au voisinage de $+\infty$

C. Application au transfert de la pièce sur la tapis roulant

1. On peut observer que pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[,\ \ 2,5 < f(t) \leqslant 5$.
   Le tapis est à 250 cm = 2,5 m du sol, la pièce peut être transférée dès qu'elle se situe à 251 cm du sol soit 2,51 m. On cherche t_0 tel que $2,5 \leqslant f(t) \leqslant 2,51$, pour cela on trace la droite d'équation $y = 2,51$, cette droite coupe la courbe en un seul point d'abscisse t_0. Graphiquement on trouve $t_0 \simeq 5,7$
2. L'exécution de 3 étapes de cet algorithme donne les résultats suivants :

	étape 1	étape 2	étape 3
a	5	5,5	5,5
b	6	6	5,75
$b - a$	1	0.5	0,25
m	5,5	5,75	5,625

3. L'amplitude de l'encadrement de t_0 fourni à l'issue des trois étapes vaut 0,25. Cette amplitude est supérieure à 0,1 (condition d'arrêt de la boucle)

La traduction de cet algorithme avec **R-Project** donne :

```
f<-function(x){3*exp(-x)-0.5*exp(- 4*x) + 2.5}
a<-5; b<-6
while((b - a) > 0.1){m<-(a+b)/2; ifelse(f(m) > 2.51,a <- m,b <-
m)}
print(paste('a=',a,'et b=',b))
```

```
[1] « a= 5.6875 et b= 5.75 »
```

Exercice 2 **10 points**

A. Loi exponentielle

1. La variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre λ, on écrit : $T \sim> \mathscr{E}(\lambda = 0,005)$, donc
   $P(T \leqslant 100) = 1 - \mathrm{e}^{-0,005 \times 100} \simeq 0,393$.
2. $E(T) = \dfrac{1}{0,005} = 200$. Sur une longue période, la durée de fonctionnement moyenne entre deux calibrages est égale à 200 heures.

B. Loi binomiale et loi normale

1. Chaque prélèvement d'un rivet est une épreuve de Bernoulli, avec les deux évènements contraires : **succès** qui correspond à un rivet prélevé **non conforme** et échec qui correspond à un rivet conforme, d'après l'énoncé **P(succès)=0,01**. Cette **même épreuve** est **répétée 500 fois**, de plus les épreuves sont **indépendantes** car le prélèvement du lot de 500 rivets est assimilé à un tirage avec remise. La variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès, à l'issue de cette expérience aléatoire, est la somme de 500 variables de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $p = 0,01$. D'où X suit la **loi binomiale de paramètres n =500 et p=0,01**. On écrit :$X \sim> \mathscr{B}(500\ ;\ 0,01)$

2. **a.** $P(X = 0) = 0,007$. Il y a 7 chances sur 1 000 d'avoir un rivet non conforme sur un lot de 500 rivets prélevés au hasard dans le stock.

   b. On cherche $P(X \leqslant 7) = 0,868$

3. **a.** Si on approche X par la variable aléatoire Y qui suit une loi normale, celle-ci est caractérisée par ses paramètres $m = E(X) = np = 500 \times 0,01 = 5$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5 \times 0,99} \simeq 2,22$

   b. $P(Y \leqslant 7,5) \simeq 0,870$, on sait que $P(X \leqslant 7)$ est approchée par $P(Y \leqslant 7,5)$ (correction de continuité). L'approximation est valable car l'écart est voisin de 0,002

C. Test d'hypothèse

1. $\overline{Z} \sim> \mathcal{N}(45\ ;\ 0,015)$, d'après les résultats fournis $h = 0,0294$
2. Règle de décision : On prélève un échantillon au hasard de taille $n = 100$ rivets, on calcule sa moyenne $\overline{z}$, si $\overline{z} \in [44,971\ ;\ 45,029]$, on accepte H_0 avec un risque de 5%, sinon on rejette H_0 avec le même risque.
3. Ici $\overline{z} = 45,03 \notin [44,971\ ;\ 45,029]$, on peut rejeter H_0 et conclure, avec un risque de 5%, que la livraison n'est pas conforme pour le diamètre.