Brevet de Technicien Supérieur – groupement B

durée : 2h

Spécialités : Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade–étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance industrielle, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Mise en forme des alliages moulés, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Réalisation d'ouvrages chaudronnés, Travaux publics.

Exercice 1 : (*9 points*)

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise de matériel pour l'industrie produit des modules constitués de deux types de pièces : P_1 et P_2.

1. Une pièce P_1 est considérée comme bonne si sa longueur, en centimètres, est comprise entre $293,5$ et $306,5$.

On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce P_1 choisie au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.

On suppose que L suit une loi normale de moyenne 300 et d'écart type 3.

Déterminer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'une pièce P_1 soit bonne.

2. On note A l'événement : « *une pièce P_1 choisie au hasard dans la production des pièces P_1 est défectueuse* ».

On note de même B l'événement : « *une pièce P_2 choisie au hasard dans la production des pièces P_2 est défectueuse* ».

On admet que les probabilités des deux événements A et B sont $p(A) = 0,03$ et $p(B) = 0,07$ et on suppose que ces deux événements sont indépendants.

Un module étant choisi au hasard dans la production, calculer, à 10^{-4} près, la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « *les deux pièces du module sont défectueuses* » ;

E_2 : « *au moins une des deux pièces du module est défectueuses* » ;

E_3 : « *aucune des deux pièces constituant le module n'est défectueuse* » ;

3. Dans un important stock de ces modules, on prélève au hasard 10 modules pour vérification. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 modules.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 modules associe le nombre de modules réalisant l'événement E_3 défini au **2.**

On suppose que la probabilité de l'événement E_3 est $0,902$.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binômiale ; déterminer les paramètres de cette loi.

b) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que, dans un tel prélèvement, 9 modules au moins réalisent l'événement E_3.

4. Dans cette question on s'intéresse au diamètre des pièces P_2.

Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 60 pièces P_2 prélevées au hasard et avec remise dans la production de la journée considérée, associe la moyenne des diamètres des pièces de cet échantillon. On suppose que $\overline{X}$ suit la loi normale :

$$\text{de moyenne inconnue } \mu \qquad \text{et} \qquad \text{d'écart type } \frac{\sigma}{\sqrt{60}} \quad \text{avec} \quad \sigma = 0,084.$$

On mesure le diamètre, exprimé en centimètres, de chacune des 60 pièces P_2 d'un échantillon choisi au hasard et avec remise dans la production d'une journée.

On constate que la valeur approchée arrondie à 10^{-3} près de la moyenne $\overline{x}$ de cet échantillon est $\overline{x} = 4,012$.

a) À partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle, à 10^{-3} près, de la moyenne μ des diamètres des pièces P_2 produites pendant cette journée.

b) Déterminer un intervalle de confiance centré en $\overline{x}$ de la moyenne μ des diamètres des pièces P_2 produites pendant la journée considérée, avec le coefficient de confiance de 95%.

c) On considère l'affirmation suivante : « *la moyenne μ est obligatoirement entre $3,991$ et $4,033$* ».

Peut-on déduire de ce qui précède qu'elle est vraie ?

Exercice 2 : (*11 points*)

Les parties **A.** *et* **B.** *peuvent être traitées de façon indépendante*

– Partie A – Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 2y' + y = \frac{x^2}{2} - x - 1$$

où y désigne une fonction de la variable x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E') \qquad y'' - 2y' + y = 0.$$

2. Déterminer les constantes réelles a, b, c pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

soit une solution particulière de l'équation (E)

3. Déduire du **1.** et du **2.** l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(1) = e + \frac{3}{2}.$$

– Partie B – Étude d'une fonction –

Soient f et g les deux fonctions de la variable x définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^x + \frac{x^2}{2} + x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x^2}{2} + x.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et $\mathcal{P}$ la courbe représentative de g dans le repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)]$.

Interpréter graphiquement le dernier résultat.

2. Étudier sur $\mathbb{R}$ la position relative des deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.

3. a) Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = (x+1)(e^x + 1)$.

b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. a) Compléter le tableau de valeurs figurant sur la feuille annexe (à rendre avec la copie) ; les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-2} près.

b) Construire la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sur la feuille annexe (à rendre avec la copie) où figure la courbe $\mathcal{P}$.

5. a) Démonter, à l'aide d'une intégration par parties, que la valeur exacte en cm^2 de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, la parabole $\mathcal{P}$ et les droites d'équations $x = -3$ et $x = -2$ est $A = 4\left(-4e^{-3} + 3e^{-2}\right)$.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de A.

Feuille annexe (à rendre avec la copie)

– Partie B –

4. *a)*

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1
$f(x)$									

b)