Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.

On note i nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Pour tout nombre complexe z, on pose :

$$P(z) = z^3 + \left(2\sqrt{2} - 4\right) z^2 + \left(8 - 8\sqrt{2}\right) z + 16\sqrt{2}.$$

a. Calculer $P(-2\sqrt{2})$.

b. Déterminer une factorisation de $P(z)$ sous la forme :
$P(z) = \left(z + 2\sqrt{2}\right)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right)$ où α et β sont deux nombres réels que l'on déterminera.

c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $P(z) = 0$.

2. On note A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 2 + 2\mathrm{i},\ b = 2 - 2\mathrm{i}\ et\ c = -2\sqrt{2}$.

a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Démontrer que A, B, C sont sur un même cercle Γ de centre O, dont on donnera le rayon.

b. Déterminer un argument du nombre complexe a puis un argument du nombre complexe b.
En déduire une mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$.

c. Déterminer alors une mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{CB}},\ \overrightarrow{\mathrm{CA}}\right)$..

d. Démontrer qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$ est $\dfrac{3\pi}{8}$.

e. En déduire l'égalité : $\tan\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) = 1 + \sqrt{2}$.