Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 3 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère le point A d'affixe $a = 2$ et le point B d'affixe $b = \sqrt{2} + \text{i}\sqrt{2}$.

1. On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^2 - \left(2+\sqrt{2}\right)z + \left(2+\sqrt{2}\right).$$

Déterminer les solutions de l'équation : $P(z) = 0$.

Dans la suite de l'exercice, on note C le point du plan d'affixe $c = \dfrac{2+\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}}{2}$.

2. Étude du triangle AOB.

a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

b. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe b.

c. En déduire la nature du triangle AOB, ainsi que la mesure de l'angle $\widehat{\text{AOB}}$.

3. Étude du triangle AOC.

a. Démontrer que C est le milieu du segment [AB].

b. En déduire la nature du triangle AOC, ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{\text{AOC}}$

c. En déduire un argument du nombre complexe c.

4. Calcul de la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

a. Démontrer que : $|c| = \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

b. Déduire des questions précédentes que $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.