Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Soit A le point d'affixe $z_A = 1 + i\sqrt{3}$.

a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_A.

b. Écrire le nombre complexe z_A sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

c. Placer le point A dans le repère $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ en prenant comme unité graphique 2 cm.

2. Soit B l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On appelle z_B l'affixe du point B.

a. Déterminer l'écriture du nombre complexe z_B sous la forme $re^{i\theta}$ (où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π).

b. Écrire le nombre complexe z_B sous forme algébrique.

c. Placer le point B dans le repère $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

3. Montrer que le triangle AOB est équilatéral.

4. Soit C le point d'affixe $z_C = z_A e^{i\frac{\pi}{4}}$.

a. Par quelle transformation géométrique le point C est-il l'image du point A ? Préciser les éléments caractéristiques de cette transformation.

b. Placer le point C dans le repère $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

c. Écrire le nombre complexe z_C sous forme trigonométrique.

d. Établir que $z_C = z_A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

En déduire l'écriture du nombre complexe z_C sous forme algébrique.

e. Déduiree des resultats précédents les valeurs exactes cos $\dfrac{7\pi}{12}$ et de sin $\dfrac{7\pi}{12}$.