

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 5 cm.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Le but de cet exercice est de déterminer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$

1.
 - a. Montrer que les points A et B appartiennent au cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1.
 - b. Déterminer un argument de z_B .
 - c. Tracer le cercle \mathcal{C} , et placer les points A et B.
 - d. Soit I le milieu du segment [AB] et z_I son affixe. Placer I sur la figure et prouver que $z_I = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$.
2.
 - a. Calculer la distance OI, et prouver que $OI = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.
 - b. Démontrer que la droite (OI) est la bissectrice de l'angle \widehat{AOB} . En déduire un argument de z_I .
 - c. Donner la forme trigonométrique de z_I .
3. Montrer à l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes que la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$ est $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.