Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$

1. Soit $P(z) = z^3 - 27$, où z désigne un nombre complexe.

   a. Vérifier que $P(z) = (z-3)\left(z^2+3z+9\right)$.

   b. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 3, \quad z_{\text{B}} = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{C}} = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}.$$

   a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_{B} et z_{C}.

   b. Écrire le nombre complexe z_{C} sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

   c. Justifier que les points A, B et C sont sur un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.

   d. Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

3. Le point D est l'image du point C par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. On appelle z_{D} l'affixe du point D.

Montrer que $z_{\text{D}} = -3$, puis placer le point D sur la figure précédente.

4. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité : $|z+3| = 3$.

   a. Vérifier que les points O, B et C appartiennent à l'ensemble $\mathscr{F}$.

   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   L'ensemble $\mathscr{F}$ est l'image du cercle Γ par certaines transformations du plan.

   En citer une et préciser ses éléments caractéristiques.