Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d' argument $\frac{\pi}{2}$.
Soit P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^3 + 2z^2 - 16.$$

1. Résolution de l'équation $P(z) = 0$.

   a. Calculer $P(2)$ et déterminer deux nombres réels α et β tels que
   $P(z) = (z-2)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right)$.

   b. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation
   $P(z) = 0$.

   On désigne par A, B, et C les points d'affixes respectives :
   $a = 2$; $b = -2-2\text{i}$; $c = 4\text{i}$. ,

2. Étude du triangle ABC

   a. Placer les points A, B, et C dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

   b. Calculer les modules des nombres complexes $b-a$, $c-a$ et $c-b$.

   c. Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

   d. Déterminer l'affixe d du point D tel que le quadrilatère ABDC soit un carré.

3. On note Ω le point du plan d'affixe $\omega = \sqrt{2}\text{e}^{\frac{3\text{i}\pi}{4}}$.

   a. Déterminer l'écriture algébrique de ω et placer le point Ω dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

   b. Démontrer que les points A, B, C, et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.