

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + 25y = 0$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation (E).
2. Soit f la fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} , dont on note f' la fonction dérivée, vérifiant les trois conditions suivantes :
 - f est solution de l'équation différentielle (E) ;
 - la courbe représentative de f dans un repère du plan passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{6}; -2\right)$;
 - $f'(0) = -5$.Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = \sqrt{3} \cos 5x - \sin 5x$.
3. Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) = 2 \cos\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$.
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.