Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$4y'' + y = 0, \qquad \text{(E)}$$

ou y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et ou y'' désigne sa dérivée seconde.

2. Le but de cette question est de trouver la solution particulière de (E), appelée f, dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est fournie en annexe. On note f' la fonction dérivée de f.

a. La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0\,;\,1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$. En déduire les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

b. Montrer que la solution particulière f de l'équation (E) est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

3. Soit D le domaine du plan délimité par :
– l'axe des abscisses ;
– l'axe des ordonnées ;
– la droite d'équation $x = \pi$,
– la courbe $\mathscr{C}_f$.
Hachurer le domaine D sur la feuille annexe.

4. Montrer que $[f(x)]^2 = 1 + \sin(x)$.

5. On considère le solide de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des abscisses.

Calculer la valeur exacte, en unité de volume, du volume V de ce solide.

On rappelle que $V = \pi \displaystyle\int_0^{\pi} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

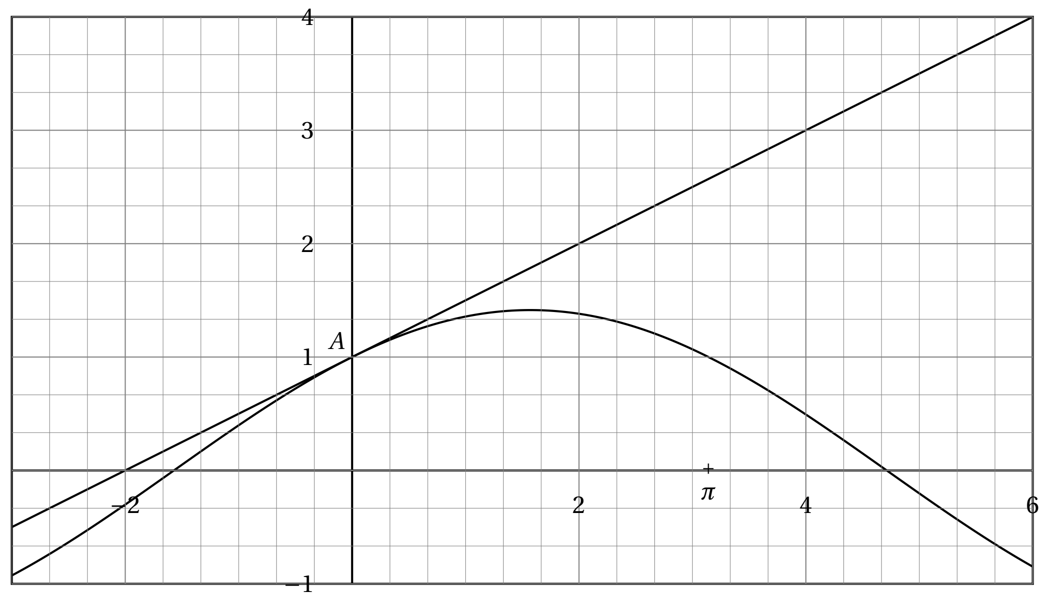

FIGURE 1 – Annexe – À rendre avec la copie