

1. Résoudre l'équation différentielle (E) :

$$9y'' + y = 0$$

où y désigne une fonction de la variable x et y'' la dérivée seconde de la fonction y .

2. On désigne par f la solution de (E) vérifiant $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

a. Déterminer la fonction f .

b. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)$.

3. La valeur efficace de la fonction f est le réel positif E défini par

$$E^2 = \frac{1}{6\pi} \int_0^{6\pi} [f(x)]^2 dx.$$

a. Montrer que, pour tout réel x , $[f(x)]^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2x}{3} + \frac{5\pi}{3}\right) \right]$.

b. Calculer le réel E .