

On note (E) l'équation différentielle

$$y'' + 4y = 0,$$

où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) .
2. On note f la solution particulière de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2.$$

Déterminer l'expression de la fonction f .

3. Démontrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.
4. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.