On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5x-5}{\mathrm{e}^x}.$$

On nomme $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans le plan (P) muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Calculer $f(0)$.

2. **a.** Vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$,

$$f(x) = \frac{5-\dfrac{5}{x}}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}}.$$

b. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Démontrer que pour tout nombre réel x positif : $f'(x) = \dfrac{-5x+10}{\mathrm{e}^x}$.

b. Étudier le signe de la fonction f'.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Représenter graphiquement la courbe $(\mathscr{C})$ dans le plan (P).

5. On note F la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par : $F(x) = -5x\mathrm{e}^{-x}$.

a. Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

b. On considère l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 4$.

Hachurer ce domaine sur le graphique précédent.

Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.