Dans une entreprise, le résultat mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé en vendant $x$ centaines d'objets fabriqués, est modélisé par la fonction $B$ définie et dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,15]$ par :

$$B(x) = (x-5)\mathrm{e}^{u(x)} + 2 \quad \text{avec} \quad u(x) = -0,02x^2 + 0,2x - 0,5.$$

Si $B(x)$ est positif il s'agit d'un bénéfice, s'il est négatif il s'agit d'une perte.

**1.** On note $B'$ la fonction dérivée de la fonction $B$ et $u'$ la fonction dérivée de la fonction $u$.

**a.** Calculer $u'(x)$ et démontrer que, pour tout $x$ de l'intervalle $[1\,;\,15]$, on a :

$$B'(x) = (-0,04x^2 + 0,4x)\mathrm{e}^{u(x)}.$$

**b.** Étudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,15]$ puis dresser le tableau de variations de la fonction $B$.

**2.** **Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**

Déterminer le nombre minimum d'objets que l'entreprise doit vendre pour réaliser un bénéfice.

Pour quel nombre d'objets ce bénéfice est-il maximal ? Et quel est alors ce bénéfice maximal (arrondi à l'euro près) ?

**3.** La valeur moyenne $m$ d'une fonction $f$ qui admet des primitives sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$ est : $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

**a.** Vérifier que $B(x) = -25 \times u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} + 2$.

**b.** En déduire l'arrondi au millième de la valeur moyenne de $B$ sur $[1\,;\,15]$.

**c.** Interpréter ce résultat pour l'entreprise.