*Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes*

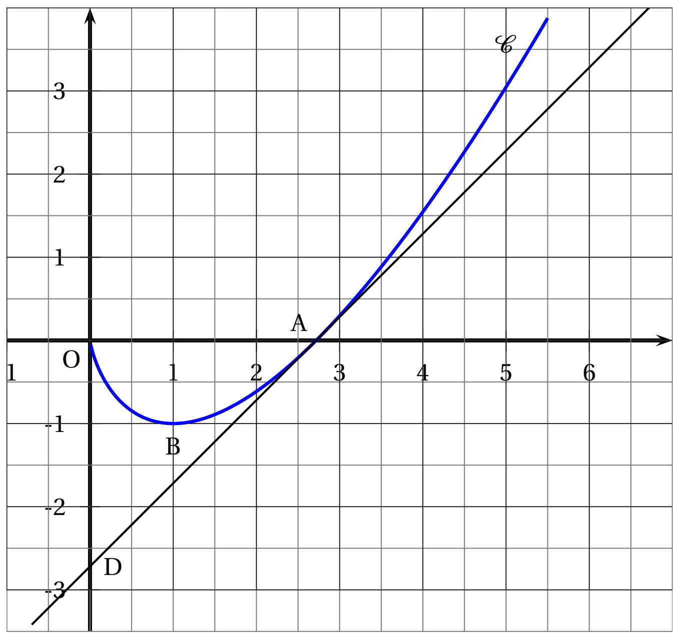
**Partie A. Lectures graphiques**

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction $f$ définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

On note $f'$ la fonction dérivée de $f$.

La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points A(e ; 0) et B(1 ; −1).

La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 et la tangente au point d'abscisse e passe par le point D(0 ; −e).




**1.** Déterminer une équation de la droite (AD).

*Aucune justification n'est exigée pour les réponses à la question* 2. 2.

**2.** Par lectures graphiques :

**a.** Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.

**b.** Dresser le tableau de signes de $f'$ sur $]0\ ;\ 5]$.

**c.** Soit $F$ une primitive de $f$ sur $]0\ ;\ +\infty[$. Déterminer les variations de $F$ sur $]0\ ;\ 5]$.

**d.** Encadrer par deux entiers consécutifs l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 4$ et $x = 5$.

**Partie B. Étude de la fonction**

La courbe $\mathscr{C}$ de la partie A est la représentation graphique de la fonction $f$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x(\ln x - 1).$$

**1.** **a.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

**b.** Soit $h$ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x\ln x$. On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

Déterminer la limite de $f$ en 0.

**2.** **a.** Montrer que, pour tout $x$ de $]0\ ;\ +\infty[$, on a : $f'(x) = \ln x$.

**b.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de $f$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3. **a.** Démontrer que la fonction $H$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par
$H(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \ln x - \dfrac{1}{4}x^2$ est une primitive sur $]0\,;\,+\infty[$ de la fonction $h$ définie à la question 1. b.

**b.** En déduire une primitive $F$ de $f$ et calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

**c.** En déduire l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$. On arrondira le résultat au dixième.