

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (7 - x)e^{x-4} \quad \text{et} \quad g(x) = 2\ln\left(\frac{x+5}{x+1}\right).$$

Partie A : Étude des fonctions f et g .

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- b. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ on a

$$f'(x) = (6 - x)e^{x-4}.$$

- c. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et établir son tableau de variations.
2. a. Soit h la fonction définie sur $] -\infty ; -1[\cup] -1 ; +\infty[$ par :

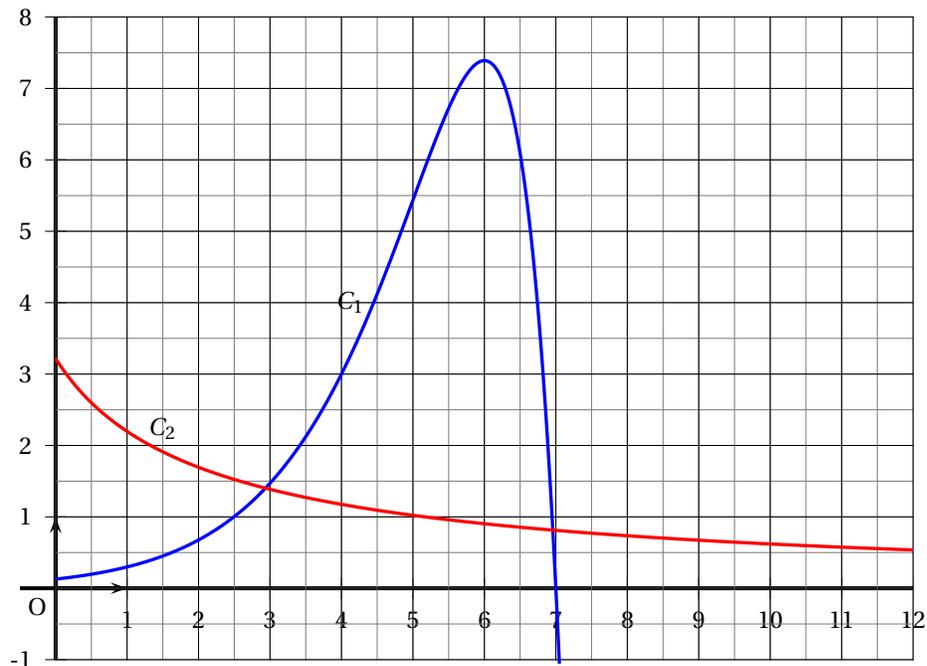
$$h(x) = \frac{x+5}{x+1}$$

Le tableau de variations de la fonction h est donné ci dessous :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h'(x)$	-		-
$h(x)$	1	$+\infty$	1

Déterminer, en le justifiant, le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$

- b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$. Quelle en est la conséquence graphique ?
3. Les courbes représentatives des fonctions f et g sont données dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) ci-dessous :



- a. Laquelle de ces deux fonctions est représentée par la courbe C_1 ?
- b. Déterminer graphiquement une valeur approchée arrondie à l'unité des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- c. Dans cette question, toute tentative d'explication de la démarche 011 de la méthode utilisée sera valorisée.

Le professeur a demandé à Perrine et Elliot de calculer $\int_0^3 f(x) dx$.

Voici des extraits de leurs productions :

Production de Perrine :

Une primitive de f est F telle que $F(x) = (8-x)e^{x-4}$, donc $\int_0^3 f(x) dx = 5e^{-1} - 8e^{-4} \approx 1,69$.

Production d'Elliot :

Une primitive de f est F telle que $F(x) = \left(7x - \frac{1}{2}x^2\right)e^{x-4}$, donc $\int_0^3 f(x) dx = 16,5e^{-1} \approx 6,07$.

Lors de la correction, le professeur indique que l'un des deux s'est trompé. Est-ce Perrine ou Elliot ? Justifier le choix.

Partie B : Application économique

Sur l'intervalle $[0; 5]$, la fonction f modélise la fonction d'offre des producteurs d'un certain produit et la fonction g modélise la fonction de demande des consommateurs pour ce même produit. La quantité x est exprimée en millier de tonnes et le prix $f(x)$ ou $g(x)$ est en euro par kg.

On rappelle que le prix d'équilibre est le prix qui se forme sur le marché lorsque l'offre est égale à la demande. La quantité d'équilibre est la quantité associée au prix d'équilibre.

Par lecture graphique, donner une valeur approchée de la quantité d'équilibre x_0 , ainsi qu'une valeur approchée du prix d'équilibre y_0 .